Exercices résolus de mathématiques.

Trigonométrie
Calcul numérique

TRI 33

EXTRI330-EXTRI339

http://www.matheux.c.la

Jacques Collot
Benoit Baudelet – Steve Tumson
Jan Frans Broeckx – Nicole Berckmans

Février 2012

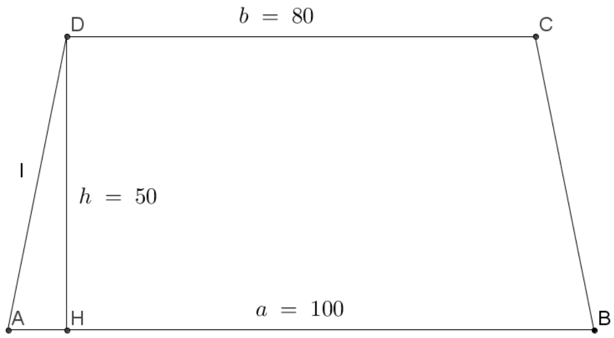
EXTRI330 – FACSA, ULG, Liège, juillet 2011

Dans le trapèze isocèle $ABCD$, on donne les bases a et b et la hauteur h.

On demande :

1. La longueur l des côtés AD et BC;
2. Les angles A et D en radians avec 4 chiffres après la virgule;
3. Le rayon R du cercle circonscrit. On rappelle que dans un triangle quelconque XYZ on a :

$$\frac{x}{\sin \widehat{X}} = \frac{y}{\sin \widehat{Y}} = \frac{z}{\sin \widehat{Z}} = 2R$$



Nous reprenons la solution proposée par l'université. Prof J.F.Debongnie et P. Duysinx.
http://www.facsa.ulg.ac.be/cms/index.php?page=questions-des-sessions-precedentes

Le plus simple est de résoudre d'abord la partie 2 de la question, ce que nous ferons ici.

2 - Il est clair que $AH = \frac{a-b}{2}$, d'où

$$\operatorname{tg}\hat{A} = \frac{h}{AH} = \frac{2h}{a-b}, \quad \text{et} \quad \hat{A} < \frac{\pi}{2}$$

On a alors

$$\hat{A} + \hat{D} = \pi \quad \text{d'où} \quad \hat{D} = \pi - \hat{A}$$

1 -

$$\ell = \frac{h}{\sin\hat{A}}$$

3 - le cercle circonscrit au trapèze l'est également au triangle ABD, qui ne possède *qu'un seul* cercle circonscrit. On a donc

$$2R = \frac{BD}{\sin\hat{A}}$$

Il suffit donc de calculer BD, par la formule classique

$$\overline{BD}^2 = a^2 + \ell^2 - 2a\ell\cos\hat{A}$$

ce qui résout le problème.

Application numérique : $a = 100, \ b = 80, \ h = 50$

2 -

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}\hat{A} &= \frac{2 \cdot 50}{100 - 80} = 5 \\ \hat{A} &= 1,3734 rad \\ \hat{C} &= 1,7682 \end{aligned}$$

1 -

$$\begin{aligned} \sin\hat{A} &= 0,9806 \\ \ell &= \frac{50}{\sin\hat{A}} = 50,9902 \end{aligned}$$

3 -

$$\begin{aligned} BD &= \sqrt{a^2 + \ell^2 - 2a\ell\cos\hat{A}} = 102,9563 \\ R &= = \frac{BD}{2\sin\hat{A}} = 52,4976 \end{aligned}$$

EXTRI331 – FACSA, ULG, Liège, juillet 2011.

Résoudre l'inéquation

$$\sin^3 x \sin\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) + \cos^3 x \cos\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) \geq \frac{3\sqrt{3}}{8}$$

Dessiner l'ensemble des solutions sur le cercle trigonométrique.

Nous reprenons la solution proposée par l'université. Prof J.F.Debongnie et P. Duysinx.
http://www.facsa.ulg.ac.be/cms/index.php?page=questions-des-sessions-precedentes

Tout d'abord, le premier membre I de l'inéquation se transforme de façon évidente comme suit :

$$I = \sin^3 x \sin\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) + \cos^3 x \cos\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) = \sin^3 x \cos 3x + \cos^3 x \sin 3x$$

Nous aurons besoin des formules de $\sin 3x$ et $\cos 3x$, qui peuvent se calculer comme suit :

– *cosinus*

$$\begin{aligned}
\cos 3x &= \cos(2x + x) \\
&= \cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x \\
&= (2\cos^2 - 1)\cos x - 2\sin^2 x \cos x \\
&= 2\cos^3 x - \cos x - 2\cos x + 2\cos^3 x \\
&= 4\cos^3 x - 3\cos x
\end{aligned}$$

d'où l'on tire

$$\cos^3 x = \frac{1}{4}(\cos 3x + 3\cos x) \tag{1}$$

– *sinus*

$$\begin{aligned}
\sin 3x &= \sin(2x + x) \\
&= \sin 2x \cos x + \sin x \cos 2x \\
&= 2\sin x \cos^2 x + \sin x(1 - 2\sin^2 x) \\
&= 2\sin x(1 - \sin^2 x) + \sin x - 2\sin^x \\
&= 3\sin x - 4\sin^3 x
\end{aligned}$$

d'où l'on tire

$$\sin^3 x = \frac{1}{4}(3\sin x - \sin 3x) \tag{2}$$

L'introduction des résultats 1 et 2 dans le premier membre I de l'inéquation donne

$$\begin{aligned} I &= \frac{3}{4}\sin x\cos 3x - \frac{1}{4}\sin 3x\cos 3x + \frac{1}{4}\cos 3x\sin 3x + \frac{3}{4}\cos x\sin 3x \\ &= \frac{3}{4}(\sin x\cos 3x + \cos x\sin 3x) \\ &= \frac{3}{4}\sin 4x \end{aligned}$$

La solution de cette inéquation est

$$4x \in [\frac{\pi}{3},\ \frac{2\pi}{3}] \bmod 2\pi$$

ce qui revient à dire

$$\frac{\pi}{3} + 2k\pi \leq 4x \leq \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$$

Divisant par 4, on obtient

$$\frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2}$$

Le 4 février 2012

EXTRI332 – FACSA, ULG, Liège, Septembre 2011.

Dans un triangle ABC, on a la relation suivante entre les angles B et C.

$$1+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}=\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}$$

Que vaut l'angle A?

Nous reprenons la solution proposée par l'université. Prof J.F.Debongnie et P. Duysinx.
http://www.facsa.ulg.ac.be/cms/index.php?page=questions-des-sessions-precedentes

En multipliant la relation donnée par $\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}$, on obtient

$$\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\operatorname{tg}\frac{C}{2}=1$$

soit

$$\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\operatorname{tg}\frac{C}{2}=1-\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}$$

ou encore

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\operatorname{tg}\frac{C}{2}}{1-\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}}=1$$

ce qui revient à dire

$$\operatorname{tg}\left(\frac{B+C}{2}\right)=1$$

On a donc

$$\frac{B+C}{2}=\frac{\pi}{4},\quad B+C=\frac{\pi}{2}$$

et, par conséquent,

$$A=\pi-(B+C)=\pi/2$$

Le 4 février 2012

EXTRI333 – FACSA, ULG, Liège, Septembre 2011.

Résoudre l'équation : $\sin^2 3x - \cos^2 x = 1$

Nous reprenons la solution proposée par l'université. Prof J.F.Debongnie et P. Duysinx.
http://www.facsa.ulg.ac.be/cms/index.php?page=questions-des-sessions-precedentes

Solution Cette équation se réduit immédiatement à

$$\cos^2 3x + \cos^2 x = 0$$

Toute solution doit donc vérifier $\cos 3x = 0$ *et* $\cos x = 0$. La première condition donne

$$3x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad x = \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3}$$

soit, dans l'intervalle $[0,\ 2\pi[$, les valeurs du tableau ci-dessous. Pour chacune d'elles, nous allons nous poser la question Q : a-t-on également $\cos x = 0$?

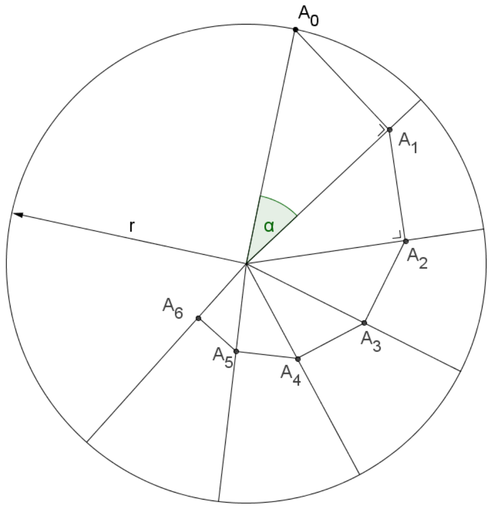
$n°$	racine	Q
1	$\frac{\pi}{6}$	N
2	$\frac{3\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$	O
3	$\frac{5\pi}{6}$	N
4	$\frac{7\pi}{6}$	N
5	$\frac{9\pi}{6} = \frac{3\pi}{2}$	O
6	$\frac{11\pi}{6}$	N

On constate donc que les seules solutions acceptable sont les solutions 2 et 5.

Le 4 février 2012

EXTRI334 – FACSA, ULG, Liège, Septembre 2011.

On se donne un cercle de rayon r. Par le centre, on fait passer des rayons de gauche à droite, distants chacun d'un angle α, $0 < \alpha < 90°$. Soit A_0 le point de concours du premier rayon avec la circonférence. A partir de ce point on trace, le segment A_0A_1 perpendiculaire au deuxième rayon en A_1. A partir de A_1, on trace le segment A_1A_2 perpendiculaire au troisième rayon en A_2, et ainsi de suite.



1. Appelons $\mathcal{L}_n$ la longueur $\overline{A_0A_1} + \overline{A_1A_2} + ... + \overline{A_{n-1}A_n}$. Que vaut cette longueur?
2. Montrer que la limite pour une infinité de segments est donnée par $\mathcal{L}_\infty = r\dfrac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}$
3. Dans le cas où $\alpha = 30°$, montrer que $\mathcal{L}_\infty$ est la somme du diamètre du cercle et du côté du triangle équilatéral inscrit à ce cercle.

Nous reprenons la solution proposée par l'université. Prof J.F.Debongnie et P. Duysinx.
http://www.facsa.ulg.ac.be/cms/index.php?page=questions-des-sessions-precedentes

1. On a évidemment

$$\overline{A_0A_1} = r\sin\alpha$$

puis

$$\overline{A_1A_2} = r\cos\alpha\sin\alpha$$

ensuite,

$$\overline{A_2A_3} = r\cos^2\alpha\sin\alpha$$

etc..., donc

$$\mathcal{L}_n = r\sin\alpha(1+\cos\alpha+\cos^2\alpha+\ldots+\cos^{n-1}\alpha)$$

2. Pour $n \to \infty$, on obtient la série géométrique

$$\mathcal{L}_\infty = r \sin\alpha(1 + \cos\alpha + \cos^2\alpha + \ldots) = r\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}$$

   Multipliant haut et bas par $1 + \cos\alpha$, on trouve

$$\mathcal{L}_\infty = r\frac{\sin\alpha(1+\cos\alpha)}{1-\cos^2\alpha} = r\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

3. Pour $\alpha = 30°$, on obtient

$$\mathcal{L}_\infty = r\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = 2r(1+\frac{\sqrt{3}}{2})$$

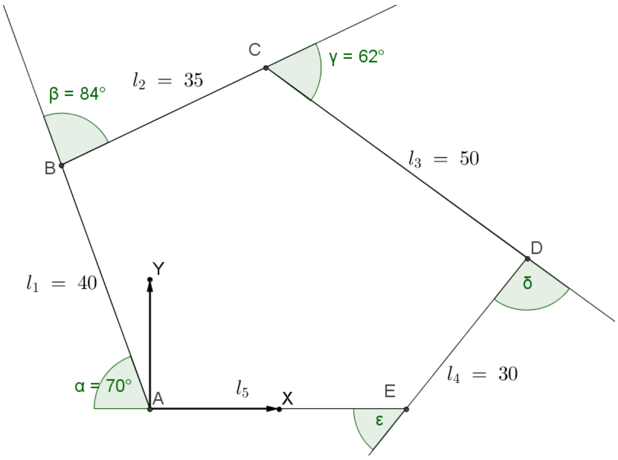
   Or, le côté du triangle équilatéral inscrit est la corde d'un arc de $120°$ et vaut donc $2r\sin 60° = 2r\frac{\sqrt{3}}{2}$

Le 4 février 2012

EXTRI335 – FACSA, ULG, Liège, Septembre 2011.

On considère le pentagone irrégulier *ABCDE*. On place en *A* un système d'axes orthonormés *XY* avec l'axe *X* selon l'horizontale *AE* et l'axe vertical *Y* pointant vers le point *B*.
On donne les longueurs et les angles suivants :
$l_1 = 40$ cm, $l_2 = 35$ cm, $l_3 = 40$ cm, $l_4 = 30$ cm.
$\alpha = 70°, \beta = 84°, \gamma = 62°$.
On demande de calculer avec quatre chiffres après la virgule les données suivantes:

- – Les coordonnées X et Y des points A, B, C, D
- – La longueur l_5, distance le long de l'axe des X entre A et E
- – Les angles δ et ε.



Nous reprenons la solution proposée par l'université. Prof J.F.Debongnie et P. Duysinx.
http://www.facsa.ulg.ac.be/cms/index.php?page=questions-des-sessions-precedentes

- On a évidemment $x_A = 0, \ y_A = 0$.
- En notant $\mathcal{A}$ l'angle du vecteur **AB** avec l'axe des x, on a

$$\mathcal{A} = 180° - 70° = 110°$$

donc

$$\begin{aligned} x_B &= 40 \cos 110° = -13,6808 \ cm \\ y_B &= 40 \sin 110° = 37,5877 \ cm \end{aligned}$$

- L'angle $\mathcal{B}$ du vecteur **BC** avec l'axe des x est donné par

$$\mathcal{B} = \mathcal{A} - 84° = 110° - 84° = 26°$$

ce qui permet d'écrire

$$\begin{aligned} x_C &= x_B + 35 \cos 26° = 17,7770 \ cm \\ y_C &= y_B + 35 \sin 26° = 52,9307 \ cm \end{aligned}$$

- L'angle $\mathcal{C}$ du vecteur **CD** avec l'axe des x vaut

$$\mathcal{C} = \mathcal{B} - 62° = 26° - 62° = -36°$$

si bien que

$$\begin{aligned} x_D &= x_C + 50 \cos(-36°) = 58,2278 \ cm \\ y_D &= y_C + 50 \sin(-36°) = 23,5414 \ cm \end{aligned}$$

- L'angle ε est visiblement donné par

$$\sin \varepsilon = \frac{y_D}{\ell_4} = \frac{y_D}{30} = 0,7847$$

ce qui correspond à

$$\varepsilon = 51,6943°$$

On en déduit

$$\ell_5 = x_E = x_D - 30 \cos \varepsilon = 39,6321 \ cm$$

- On trouve alors δ par la condition $\alpha + \beta + \gamma + \delta + \epsilon = 360°$ ce qui donne

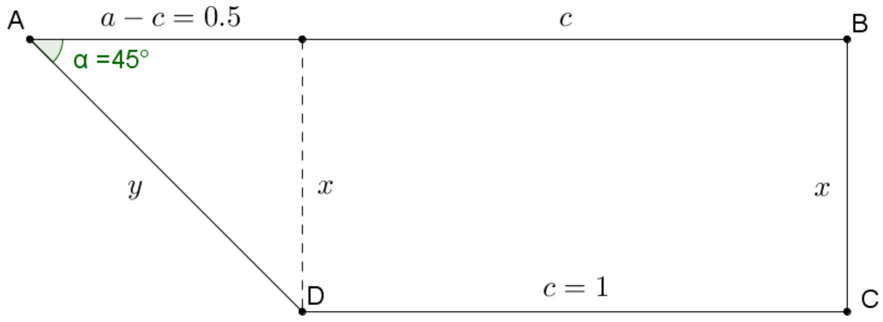
$$\delta = 360° - 70° - 84° - 62° - 51,6943° = 92,3057°$$

EXTRI336 – EPL, UCL, LLN, Juillet 2012.

Dans un quadrilatère $ABCD$, on donne les longueurs des côtés opposés $AB = a$ et $CD = c$, les angles en B et C sont égaux à 90° et l'angle aigu en A égal à α.

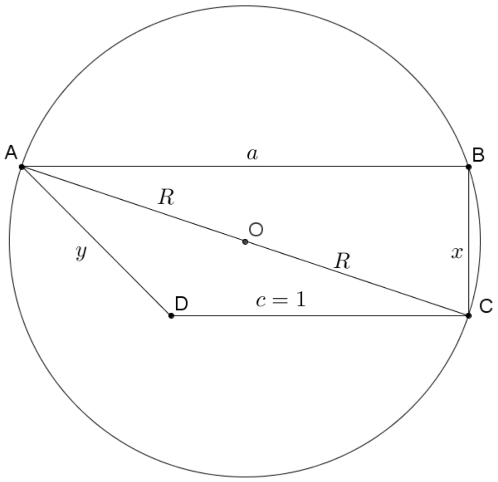
– Réprésentez la figure géométrique et reportez-y les notations.
– Calculez le périmètre p en fonction de a, c et α.
– Calculez la valeur de p pour $a = 1.5$ dm, $c = 1$ dm et $\alpha = 45°$.
– On désire découper ce quadrilatère dans un disque de diamètre minimal.
Donnez la formule de ce diamètre et la formule de la perte de la découpe en fonction de a, c et α.

Solution proposée par Nicole BERCKMANS



$$\tan\alpha = \frac{x}{a-c};\ x = \frac{1}{2};\ \cos\alpha = \frac{a-c}{y};\ y = \frac{1\times 2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$p = a + c + (a-c)\tan\alpha + \frac{a-c}{\cos\alpha} = \frac{5}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}.\frac{2}{\sqrt{2}} = 3 + \frac{\sqrt{2}}{2}$$



$$\text{Diamètre} = 2R = \sqrt{a^2 + x^2} = \sqrt{a^2 + (a-c)^2 \tan^2 \alpha}$$

$$\text{Surface du cercle } = \pi R^2 = \frac{\pi}{4}\left[a^2 + (a-c)^2 \tan^2 \alpha\right] \qquad (1)$$

$$\text{Surface du trapèze} = \frac{a+c}{2}.x = \frac{1}{2}\left(a^2 - c^2\right)\tan\alpha \qquad (2)$$

$$\text{Chute } = (1) - (2) = \frac{\pi}{4}\left[a^2 + (a-c)^2\right] - \frac{a^2 - c^2}{2}\tan\alpha$$

Le 7 juillet 2012

EXTRI337 – EPL, UCL, LLN, Juillet 2012.

Résoudre dans $\left[-\pi,\pi\right]$: $\sin 3x + 2\sin^2 x - \sin x > 0$

Solution proposée par Nicole BERCKMANS

$$\sin 3x + 2\sin^2 x - \sin x > 0$$
$$\Rightarrow 3\sin x - 4\sin^3 x + 2\sin^2 x - \sin x > 0$$
$$\Rightarrow \sin x\left[-4\sin^2 x + 2\sin x + 2\right] > 0$$

- $\sin x$ racines : $0, \pi, -\pi$
- $-4\sin^2 x + 2\sin x + 2$ racines : $\frac{\pi}{2}, -\frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{6}$

x	$-\pi$		$-\frac{5\pi}{6}$		$-\frac{\pi}{6}$		0		$\frac{\pi}{2}$		π
$\sin x$	0	−	−	−	−	−	0	+	+	+	0
$-4\sin^2 x + 2\sin x + 2$	+	+	0	−	0	+	+	+	0	+	0
Produit	0	−	0	+	0	−	0	+	0	+	0

Réponse : $\boxed{\left]-\frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{6}\right[\cup \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[}$

Le 31 janvier 2012

EXTRI338 – EPL, UCL, LLN, Juillet 2012.

Pour les affirmations suivantes, cochez laquelle de ces affirmations est la vraie.

- la moyenne des angles d'un quadrilatère non croisé est

  toujours égale à 60° ☐

  toujours égale à 90° ☐

  aucune de ces deux réponses ☐

- Dans l'intervalle $0 < a < \frac{\pi}{2}$, l'équation $\sin 2a = \frac{2}{1+\tan^2 a}$ possède exactement.

  0 solution ☐ 1 solution ☐ 2 solutions ☐

- L'expression $\sin(a+b+c)$ est identiquement égale à

  $\sin a \cos b \cos c + \cos a \sin b \cos c + \cos a \cos b \sin c$ - $\cos a \cos b \cos c$ ☐

  $\sin a \cos b \cos c + \cos a \sin b \cos c + \cos a \cos b \sin c - \sin a \sin b \sin c$ ☐

  $\cos a \sin b \sin c + \sin a \cos b \sin c + \sin a \sin b \cos c - \cos a \cos b \cos c$ ☐

- Si dans un triangle ABC non dégénéré (les trois sommets ne sont pas alignés)

  on a que $\sin A = \frac{1}{2}\frac{\sin B + \sin C}{\cos B + \cos C}$, alors

  $A = 30°$ ☐ $A = 60°$ ☐ A est indéterminé ☐

Solution proposée par Nicole BERCKMANS

1) Toujours égale à 90°.

2) Une solution car : $\sin 2a = \frac{2\tan a}{1+\tan^2 a} = \frac{2}{1+\tan^2 a}$ d'où dans $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$: $a = \frac{\pi}{4}$

3) Si $a = b = c = 0$ alors $\sin(a+b+c) = 0. \Rightarrow$ Réponse 2.

4) $\sin A = 2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$ $\qquad (i)$

$$\sin A = \frac{1}{2}\frac{2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}}{2\cos\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}} \qquad \text{(par Simpson)}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\cos\frac{A}{2}}{\sin\frac{A}{2}} \quad \text{car} \quad \frac{B+C}{2} = 90° - \frac{A}{2} \qquad (ii)$$

(i) et (ii) impliquent $\sin^2\frac{A}{2} = \frac{1}{4} \Rightarrow \sin\frac{A}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{A}{2} = 30° \Rightarrow A = 60°$

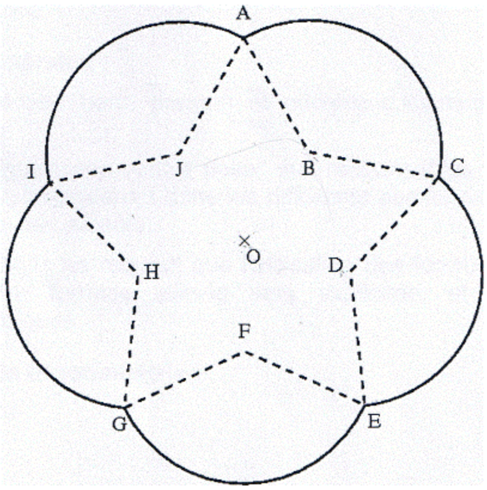
Le 31 janvier 2012

EXTRI339 – EPL, UCL, LLN, Juillet 2012.

On veut créer un parterre de tulipes et de jonquilles selon le croquis ci-dessous.
Les tulipes occupent la surface en forme d'étoile délimitées par les traits pointillés, tandis que les jonquilles occupent le reste de la surface délimitée par la courbe pleine.
On donne les distances $R = AO = CO = EO = GO = IO$ et $r = BO = DO = FO = HO = JO$.
La courbe pleine est composée d'arcs de cercles centrés en B, D, F, H et J.
L'étoile est règulière, c'est-à-dire que $AB = BC = CD = DE = EF = FG = GH = HI = IJ = JA$.

1) Donnez l'aire T occupée par les tulipes en fonction de R et r.
2) Donnez l'aire J occupée par les jonquilles en fonction de R et r.
3) Calculez T et J à un dm^2 près pour les données suivantes : $R = 10$ m, $r = 6$ m.

Indiquez sur le croquis les variables intermèdiaires utilisées.



Solution proposée par Nicole BERCKMANS

Aire de l'étoile : $T = 10$ aire du triangle AOB de base $AO = R$ et de hauteur $h = r\sin 36°$

car on a un angle au centre $= \dfrac{360°}{10} \Rightarrow T = \dfrac{1}{2}.10.Rr\sin 36° = 176.34 \text{ m}^2 = 17634 \text{ dm}^2$.

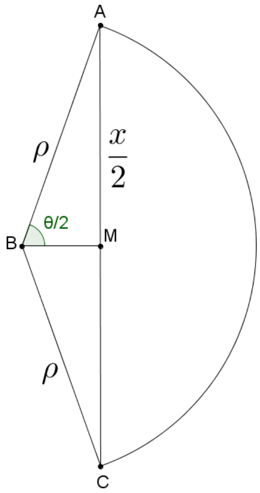
Le rayon ρ d'un secteur circulaire est : $\rho = \sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr\cos 36} = 6.2384$
(Voir figure ci-dessous).

La corde AC calculée dans le triangle AOC vaut : $x = \overline{AC} = \sqrt{2R^2 - 2R^2\cos 72°} = 11.7557$

Dans le triangle BAC : $\sin\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{x/2}{\rho} \Rightarrow \dfrac{\theta}{2} = 70.4252° = 1.2291$ rad

Aire d'un secteur circulaire : $A = \dfrac{\rho^2\theta}{2} = 47.8357 \text{ m}^2$

Aire du parterre de jonquilles : $23\,918 \text{ dm}^2$



1 février 2012