Exercices résolus de mathématiques.

Trigonométrie
Calcul numérique

TRI 35

EXTRI350-EXTRI359

http://www.matheux.c.la

Jacques Collot
Benoit Baudelet – Steve Tumson
Jan Frans Broeckx – Nicole Berckmans
Fabienne Zoetard

Septembre 2013

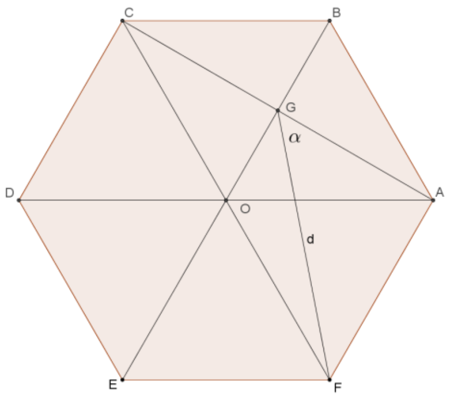
EXTRI350 – EPL, UCL, LLN, juillet 2013.

Une pièce ayant la forme d'un hexagone régulier $ABCDEF$, de centre O et de côté de longueur a, est d'abord découpée le long du segment AC dont l'intersection avec BO est nommée G.
On découpe ensuite la pièce le long du segment FG.

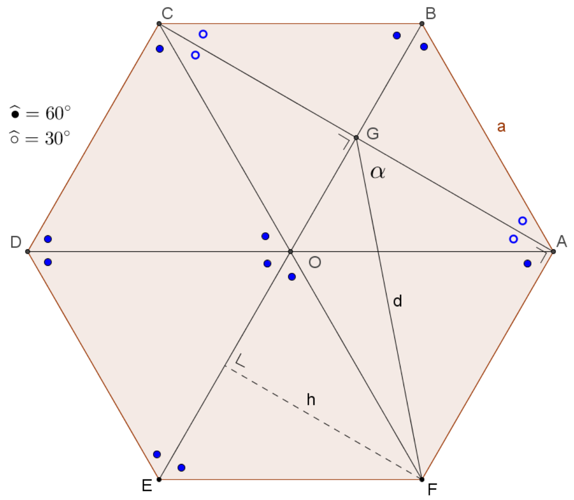
- Calculer la surface restante de la pièce (c'est-à-dire $CDEFG$) appelée S, en fonction a.
- Calculez la valeur de a telle que

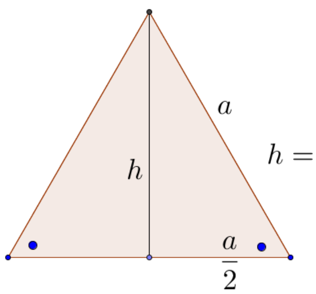
$$S=\left(4d^{2}-\frac{1}{2}\right).\tan\left(\frac{\pi}{3}\right)+3a.\tan\alpha$$

où α est l'angle FGA.

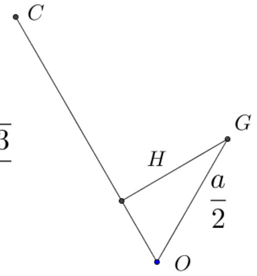


Solution proposée par Nicole Berckmans





$$h=\frac{a\sqrt{3}}{2}$$



Aire $\triangle CDO = \frac{1}{2}ah = a^2\frac{\sqrt{3}}{4}$.

$\triangle COFG$ de base $CF = 2a$ et de hauteur $H = \frac{a\sqrt{3}}{4}$ (Voir schéma).

Aire $\triangle COFG = \frac{1}{2}.2a.\frac{a\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

Aire $SDEFG = S = 3a^2\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = a^2\sqrt{3}$

$d = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4} - 2a.\frac{a}{2}.\cos 120°} = \frac{\sqrt{7}}{2}a;$ $\qquad \tan\alpha = \frac{AF}{AG} = \frac{a}{a\cos 30°} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

$S = \left(\frac{4\times 7a^2}{4} - \frac{1}{2}\right)\sqrt{3} + 3.a.\frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(14a^2 + 4a - 1\right)$

$$S = a^2\sqrt{3} \Rightarrow 12a^2 + 4a - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{2} & \text{rejeté} \\ \boxed{a = \frac{1}{6}} \end{cases}$$

Solution proposée par Dominique Druez

La hauteur d'un triangle équilatéral de côté a : $\frac{\sqrt{3}}{2}a$

La surface d'un triangle équilatéral de côté a : $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$

L'angle FAG vaut 60°+60°/2=90°

$S = l'aire\ de\ l'hexagone$
$\quad - l'aire\ de\ deux\ demi\ triangles\ equilatéraux\ (CGB\ et\ AGB)$
$\quad - l'aire\ du\ triangle\ rectangle\ FGA$

$S = 5.\frac{\sqrt{3}}{4}a^2 - aire\ FGA = 5.\frac{\sqrt{3}}{4}a^2 - \frac{ah}{2} = 5.\frac{\sqrt{3}}{4}a^2 - \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = \sqrt{3}a^2$

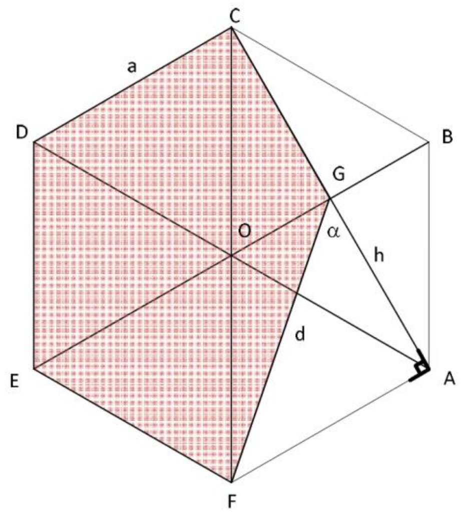
d est l'hypoténuse du triangle rectangle FGA et vaut donc (Pythagore) :

$$d = \sqrt{h^2 + a^2} = \sqrt{\frac{3}{4}a^2 + a^2} = \frac{\sqrt{7}}{2}a$$

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{opposé}{adjacent} = \frac{FA}{GA} = \frac{a}{\frac{\sqrt{3}}{2}a} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$S = \sqrt{3}a^2 = \left(4.d - \frac{1}{2}\right)\mathrm{tg}\frac{\pi}{3} + 3a\,\mathrm{tg}\,\alpha = \left(4.\frac{7}{4}a^2 - \frac{1}{2}\right)\sqrt{3} + 3a\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\sqrt{3}a^2 = \left(7a^2 - \frac{1}{2}\right)\sqrt{3} + 2\sqrt{3}a \to 6a^2 + 2a - \frac{1}{2} = 0 \to \begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ a = \frac{1}{6} \end{cases}$$



Rem : En conclusion, les triangles EFO, FAG et FGC ont même surface.

Le 8 septembre 2013. Modifié le 18 février (Dominique Druez)

EXTRI351 – EPL, UCL, LLN, juillet 2013.

Pour quels valeurs de x comprises dans l'intervalle $[0°,180°]$, la fonction $f(x)$ suivante est-elle strictement positive?

$$f(x) = 1 - 2\sin^2 x + \sin 5x + \sin x$$

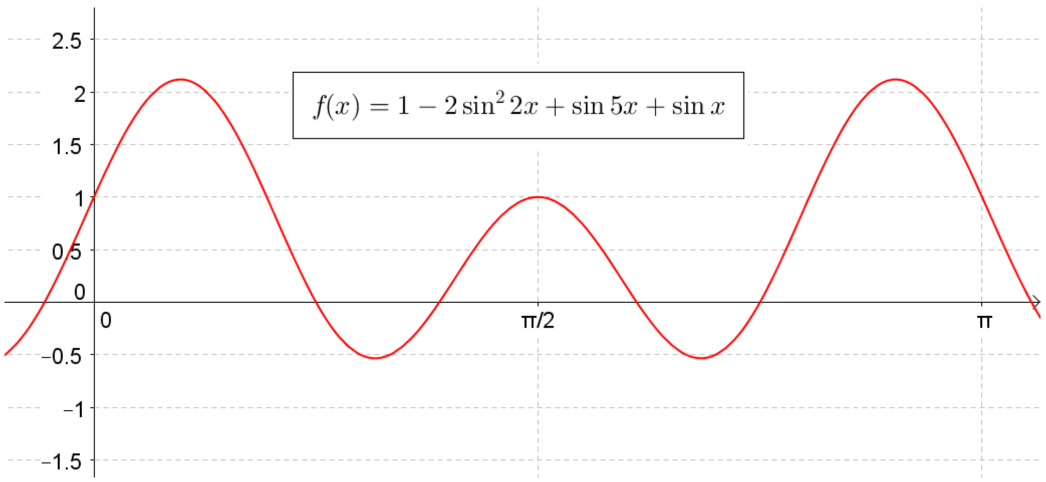
Solution proposée par Nicole Berckmans

$$f(x) = \cos 2x + 2\sin 3x.\cos 2x = \cos 2x(1 + 2\sin 3x)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos 2x = 0 \Rightarrow 2x = 90° + k180° \Rightarrow x = 45° + k90° \Rightarrow x = 45° \text{ ou } 135° \\ \sin 3x = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} 3x = -30° + k360° \Rightarrow x = -10° + k120° \Rightarrow x = 110° \\ 3x = 210° + k360° \Rightarrow x = 70° + k120° \quad \Rightarrow x = 70° \end{cases} \end{cases}$$

x	0°		45°		70°		110°		135°		180°
$\cos 2x$	+	+	0	−	−	−	−	−	0	+	+
$1+\sin 3x$	+	+	+	+	0	−	0	+	+	+	+
$f(x)$	+	+	0	−	0	+	0	−	0	+	+

Conclusion : $\boxed{[0°,45°[\cup]70°,110°[\cup]135°,180°]}$



Remarque : le graphe est donné à titre indicatif. Une résolution avec machine graphique n'est pas acceptée.

Le 8 septembre 2013

EXTRI352 – EPL, UCL, LLN, juillet 2013.

Cochez chaque fois l'unique affirmation vraie parmi les trois possibilités.

Réponse juste = 1 point; autre réponse = 0.

- L'aire d'un triangle, où a, b et c sont les longueurs des côtés et s le demi-périmètre est égal à

  $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ ☐

  $s(s-a)(s-b)(s-c)$ ☐

  $s^2(s-a)^2(s-b)^2(s-c)^2$ ☐

- Dans l'intervalle $o < x < \pi$, l'équation $\cos 2x + \sin 2x + 1 = 0$ admet exactement

  0 solution ☐ 1 solution ☐ 2 solutions ☐

- L'expression $\sin(a+b)\sin(a-b)$ est identiquement égale à

  $\cos^2 a - \cos^2 b$ ☐ $\sin^2 a - \cos^2 b$ ☐ $\sin^2 a - \sin^2 b$ ☐

- Dans un triangle ABC, si $B \neq$ et $\cos A = \sin^2 B - \cos^2 C$, alors

  $A = 30°$ ☐ $A = 45°$ ☐ $A = 90°$ ☐

Solution proposée par Nicole Berckmans

1) $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-b)}$ car si les longueurs sont en m, l'aire est en m^2

2) $\cos^2 - \sin^2 x + 2\sin x \cos x + 1 = 0 \Rightarrow 2(\cos^2 x + \sin x \cos x) = 0$

$$\Rightarrow \cos x(\cos x + \sin x) = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} \text{ et } x = \frac{3\pi}{4}$$

3) $\sin^2 a - \sin^2 b$ car si $a = 0$ alors $\sin(a+b)\sin(a-b) = \sin^2 b$

4) $A = 90°$ car :

<u>1ère méthode.</u> $A = 90°$ est la seule solution qui vérifie la condition donnée.

<u>2ème méthode.</u> On part des relations aux cosinus et aux sinus.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A \Rightarrow a^2 = \left(a\frac{\sin B}{\sin A}\right)^2 + \left(a\frac{\sin C}{\sin A}\right)^2 - 2\left(a\frac{\sin B}{\sin A}\right)\left(a\frac{\sin C}{\sin A}\right)\cos A$$

$$\Rightarrow \sin^2 A = \sin^2 B + \sin^2 C - 2\sin B \sin C \cos A$$

$$\Rightarrow 1 - \cos^2 A = \cos A + 1 - [\cos(B-C) - \cos(B+C)\cos A] \quad \text{or} \quad B + C = 180° - A$$

$$\Rightarrow -\cos^2 A = \cos A - \cos(B-C)\cos A - \cos^2 A \Rightarrow \cos A(1 - \cos(B-C)) = 0$$

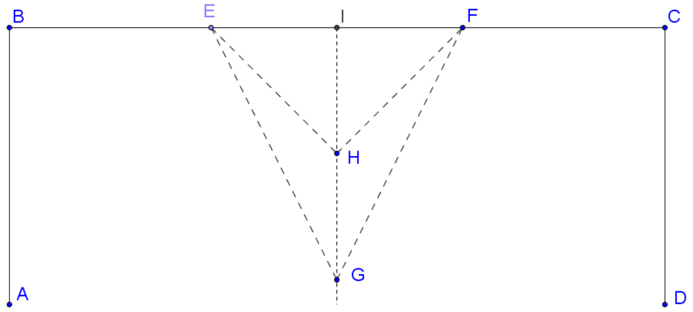
$$\Rightarrow \begin{cases} \cos A = 0 \Rightarrow A = 90° \\ \cos(B-C) = 1 \Rightarrow B = C \text{ à rejeter} \end{cases}$$

Le 6 septembre 2013

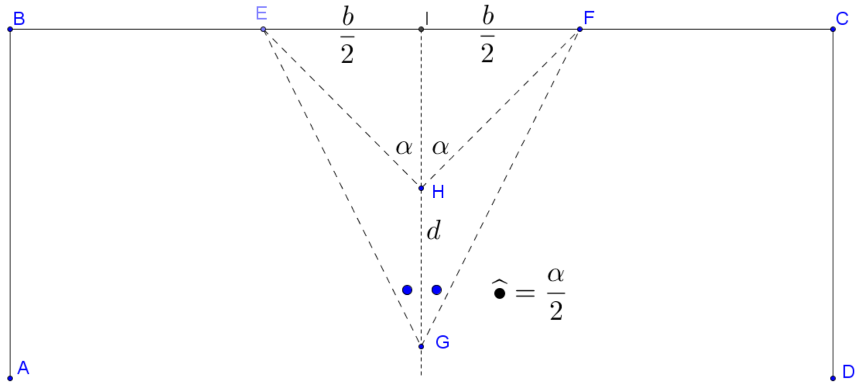
EXTRI353 – EPL, UCL, LLN, juillet 2013.

Le croquis ci-dessous schématise une partie d'un terrain de football. Le but EF se trouve à égale distance des deux lignes de touche AD et BC. Un joueur, qui évolue à égale distance des deux lignes de touche, reçoit le ballon en G où il dispose d'un angle de tir $EGF = \alpha$ de valeur inconnue. Il progresse ensuite d'une distance d jusqu'en H, où il tire au but en disposant d'un angle de tir deux fois plus grand (donc $EHF = 2\alpha$).

1) Donnez d'abord une formule exprimant la tangente d'un angle en fonction de la moitié de cet angle. (Cette formule peut faciliter la résolution de la question suivante.
2) Donnez la distance $x = HI$ entre le joueur et la ligne de but lors du tir, en fonction de d et de la largeur $b = EF$ du but.
3) Calculez x au cm près pour les données suivantes: $d = 9$ m, $b = 7.32$ m



Solution proposée par Nicole Berckmans



1) $\tan\alpha = \dfrac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}$

2) $\tan\alpha = \dfrac{b/2}{x}; \quad \tan\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{b/2}{x+d}$

$$\frac{b/2}{x} = \frac{2\dfrac{b}{2(x+d)}}{1-\dfrac{b^2}{4(x+d)^2}} \Rightarrow \frac{\cancel{b/2}}{x} = \frac{2(x+d)\,\cancel{b/2}}{(x+d)^2-\dfrac{b^2}{4}} \Rightarrow 2x(x+d) = (x+d)^2 - \frac{b^2}{4}$$

$$x^2+d^2-\frac{b^2}{4}$$

3) $x^2 = 81-\left(\dfrac{7.32}{2}\right)^2 \Rightarrow x = 8.22 \text{ m}$

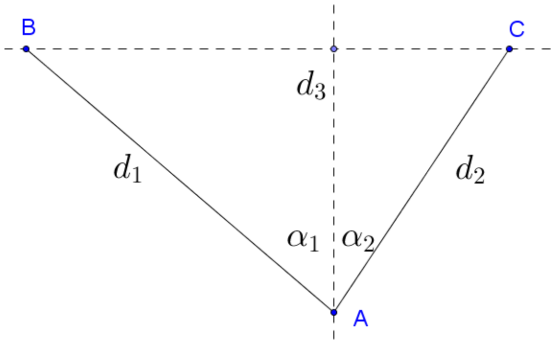
EXTRI354 – EPL, UCL, LLN, septembre 2013.

Un bateau est situé au point A, à une distance d_1 d'un point B et une distance d_2 d'un point C; B et C étant situés sur une droite est-ouest (EO). Cette droite EO se situe à une distance d_3 au nord de A, selon une droite nord-sud (NS) qui passe entre B et C. L'angle en A entre cette droite NS et la droite AB est noté α_1 et l'angle en A entre NS et la droite AC est noté α_2. On considère que la terre est plate.

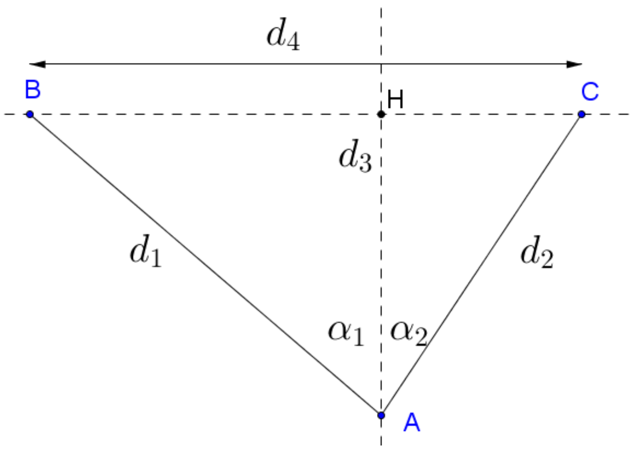
1) Trouvez en fonction de d_1, d_2, α_1 et α_2, les expressions de la distance d_3 définie ci-dessus et de la distance d_4 entre B ete C.

2) Calculez α_1, α_2, d_3 et d_4 pour $d_1 = 10$ km, $d_2 = 5\sqrt{2}$ et $\alpha_1 + \alpha_2 = 105°$ (en simplifiant au maximum les expressions des valeurs obtenues, mais sans approximations numériques).

3) Dans un autre cas, à quelles distances x de B et y de C faut-il placer un point D, tel que l'angle BDC (en D, notée β) soit égal à 60° et que $x + y$ soit égale à une distance d_5? Donnez d'abord l'équation à résoudre en x, puis calculez le résultat avec $d_4 = 10\sqrt{6}$ km et $d_5 = 20\sqrt{3}$ km? (En simplifiant au maximum les expressions des valeurs obtenues, mais sans approximations numériques.)



Solution proposée par Nicole Berckmans et Louis François



1) $\left.\begin{array}{l}\Delta AHC : d_3 = d_2 \cos\alpha_2 \\ \Delta AHB : d_3 = d_1 \cos\alpha_1\end{array}\right\} \Rightarrow d_2 \cos\alpha_2 = d_1 \cos\alpha_1 \qquad (1)$

$$d_4 = \sqrt{d_1^2 + d_2^2 - 2d_1 d_2 \cos(\alpha_1 + \alpha_2)}$$

2) Calculons $\cos 105°$ et $\sin 105°$

$$105° = 60° + 45° \Rightarrow \begin{cases} \cos 105° = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(1-\sqrt{3}\right) \\ \sin 105° = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(1+\sqrt{3}\right) \end{cases}$$

Reprenons l'équation $(1) \Rightarrow 5\sqrt{2}\cos\alpha_2 = 10\cos\alpha_1$ avec $\alpha_1 + \alpha_2 = 105°$

$$\Rightarrow \sqrt{2}\cos(105° - \alpha_1) = 2\cos\alpha_1$$

$$\Rightarrow \sqrt{2}\left[\frac{\sqrt{2}}{4}\left(1-\sqrt{3}\right)\cos\alpha_1 + \frac{\sqrt{2}}{4}\left(1+\sqrt{3}\right)\sin\alpha_1\right] = 2\cos\alpha_1$$

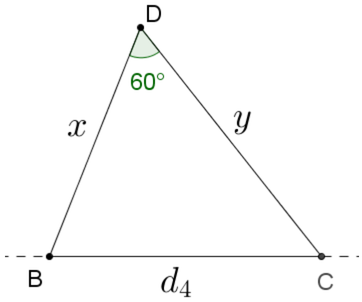
$$\Rightarrow \left(1-\sqrt{3}\right)\cos\alpha_1 + \left(1+\sqrt{3}\right)\sin\alpha_1 = 4\cos\alpha_1$$

C'est une équation homogène. Divisons par $\cos\alpha_1$

$$\Rightarrow \left(1+\sqrt{3}\right)\tan\alpha_1 = 3+\sqrt{3} \Rightarrow \tan\alpha_1 = \sqrt{3} \Rightarrow \alpha_1 = 60° \Rightarrow \alpha_2 = 45°$$

Calculons $d_4 = \sqrt{100 + 50 - 2\times 50\sqrt{2}\cos 105°}$

$$= \sqrt{150 - 100\times\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{3}\right)} = 5\sqrt{2\left(2+\sqrt{3}\right)}$$



$$d_4 = \overline{BC} = 10\sqrt{6} \qquad d_5 = x + y = 20\sqrt{3}$$

$$d_4^2 = x^2 + y^2 - 2xy\cos 60°$$

$$d_4^2 = x^2 + \left(20\sqrt{3} - x\right)^2 - 2x\left(20\sqrt{3} - x\right)\frac{1}{2}$$

$$3x^2 - 3\times 20\sqrt{3}x + 3\times 400 - 6\times 100 = 0$$

$$x^2 - 20\sqrt{3}x + 200 = 0 \Rightarrow \mathrm{S} : x, y \in \left\{10\left(\sqrt{3}+1\right), 10\left(\sqrt{3}-1\right)\right\}$$

Remarque de Dominique Druez

Alternative pour le calcul de d_4:

$$d_4 = d_1 \sin\alpha_1 + d_2 \sin\alpha_2$$

$$d_4 = 10\sin 60° + 5\sqrt{2}\sin 45° = 10.\frac{\sqrt{3}}{2} + 5\sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{2} = 5\sqrt{3} + 5$$

Le 8 septembre 2013. Modifié le 17 décembre 2013 (Dominique Druez)

EXTRI355 – EPL, UCL, LLN, septembre 2013.

Pour quelles valeurs de x comprises dans l'intervalle $\left[\ 0,\pi\ \right]$, la fonction $f\left(x\right)$ suivante est-elle strictement positive.

$$f\left(x\right)=\frac{\sin x}{\cos 2x}+\sin x-\cos x$$

Solution proposée par Nicole Berckmans et Louis François

$$CE:\cos 2x\neq 0\Rightarrow 2x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi\Rightarrow x\neq\frac{\pi}{4}\text{ et }x\neq\frac{3\pi}{4}$$

$$f\left(x\right)=\frac{\sin x\left(1+\cos 2x\right)-\cos x\cos 2x}{\cos 2x}\qquad\text{or }\ 1+\cos 2x=2\cos^2 x$$

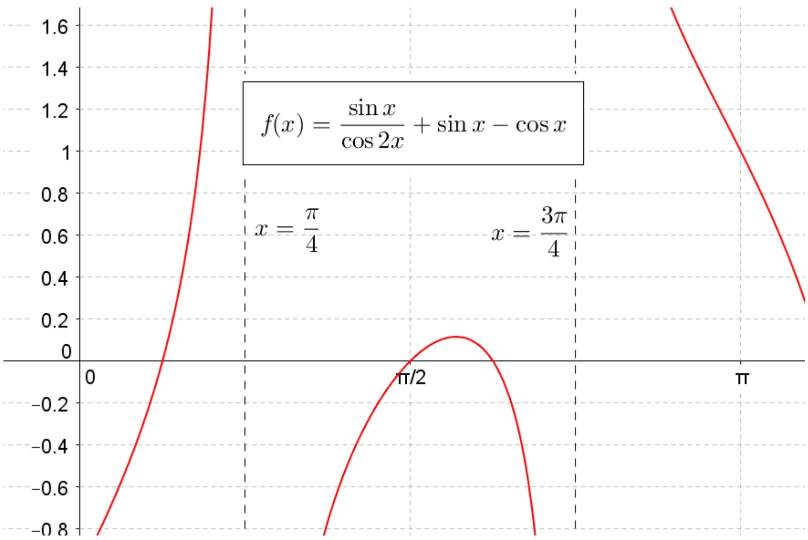
$$=\frac{\cos x}{\cos 2x}\left(2\sin x\cos x-\cos 2x\right)=\frac{\cos x}{\cos 2x}\left(\sin 2x-\cos 2x\right)$$

$$=\cos x\left(\tan 2x-1\right)$$

$$\cos x=0\Rightarrow x=\frac{\pi}{2};\qquad \tan 2x=1\Rightarrow x=\frac{\pi}{8}\text{ ou }x=\frac{5\pi}{8}$$

x	0		$\pi/8$		$\pi/4$		$\pi/2$		$5\pi/8$		$3\pi/4$		π
$\cos x$	+	+	+	+	+	+	0	−	−	−	−	−	−
$\sin 2x-\cos 2x$	−	−	0	+	+	+	+	+	0	−	−	−	−
$\cos 2x$	+	+	+	+	0	−	−	−	−	−	0	+	+
$f\left(x\right)$	−	−	0	+	/	−	0	+	0	−	/	+	+

<u>Conclusion</u> : $\boxed{\left]\frac{\pi}{8},\frac{\pi}{4}\right[\text{ ou }\left]\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{8}\right[\text{ ou }\left]\frac{3\pi}{4},\pi\right]}$



Remarque : le graphe est donné à titre indicatif. Une résolution avec machine graphique n'est pas acceptée.

Le 8 septembre 2013

EXTRI356 – EPL, UCL, LLN, septembre 2013.

Cochez chaque fois l'unique affirmation vraie parmi les trois possibilités.
Réponse juste = 1 point; autre réponse = 0

- Soit ABC un triangle non plat, G son centre de gravité (le point d'intersection des trois médianes), H son orthocentre (le point d'intersection des trois hauteurs), I le centre de son cercle inscrit, et S le centre de son cercle circonscrit.

  GHI sont alignés ☐ GHS sont alignés ☐ GIS sont alignés ☐

- Dans l'intervalle $-\pi < x < \pi$, l'équation $\cos 3x - 4\cos^3 x + 5\cos x = 0$ admet exactement :

  0 solution ☐ 1 solution ☐ 2 solutions ☐

- L'expression $\dfrac{\sin a}{\cos a + 1}$ est identiquement égale à

  $\dfrac{1}{2}\tan\dfrac{a}{2}$ ☐ $\tan\dfrac{a}{2}$ ☐ $2\tan\dfrac{a}{2}$ ☐

- Dans un triangle ABC de côtés a, b et c (opposés aux angles respectifs A, B et C), si $a^2 = b^2 - bc + c^2$, alors

  $A = 30°$ ☐ $A = 45°$ ☐ $A = 60°$ ☐

Solution proposée par Nicole Berckmans et Louis François

1) GHS sont alignés. C'est la droite d'Euler.
Pour un triangle rectangle OAB, l'orthocentre $H = O$, le centre du cercle inscrit est S, le milieu de l'hypotènuse AB et donc G, le centre gravité appartient à la médiane HS.
Le centre du cercle inscrit n'y appartient que si le triangle est isocèle.

2) $\cos 3x - \cos^3 x + 5\cos x = 0 \Rightarrow 4\cos^3 x - 3\cos x - 4\cos^3 x + 5\cos x = 0$

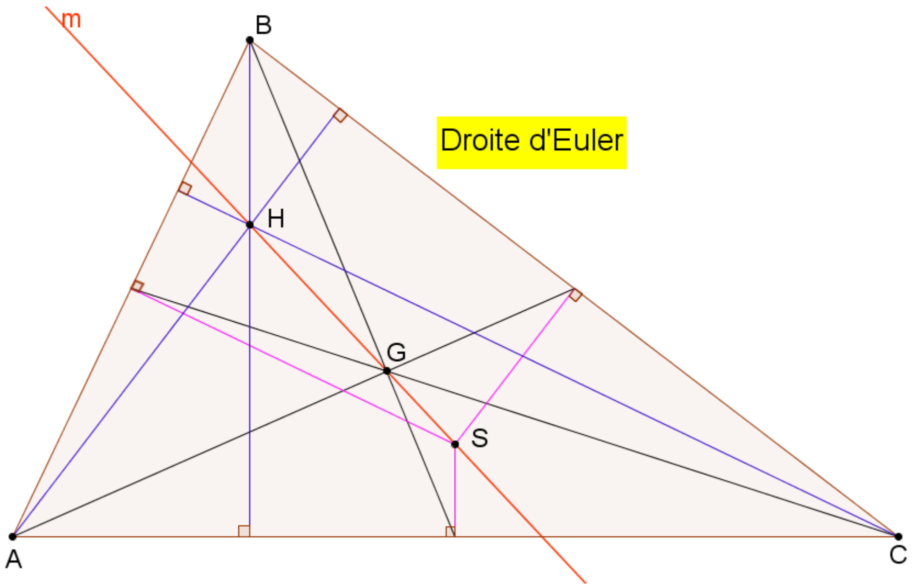
$$\Rightarrow \cos x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{2} \\ x = -\dfrac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow 2 \text{ solutions}$$

3) $\tan\dfrac{a}{2}$. Par les formules en $\tan\dfrac{a}{2}$ ou en choisissant $a = \dfrac{\pi}{2}$

4) $$\left.\begin{array}{l} a^2 = b^2 - bc + c^2 \\ a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \end{array}\right\} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 60°$$

Rappel : La droite d'Euler

En géométrie euclidienne, dans un triangle non équilatéral, l'orthocentre H, le centre de gravité G et le centre du cercle circonscrit S sont alignés et ne sont pas confondus.
On appel, droite d'Euler la droite passant par ces trois points.



Le 8 septembre 2013

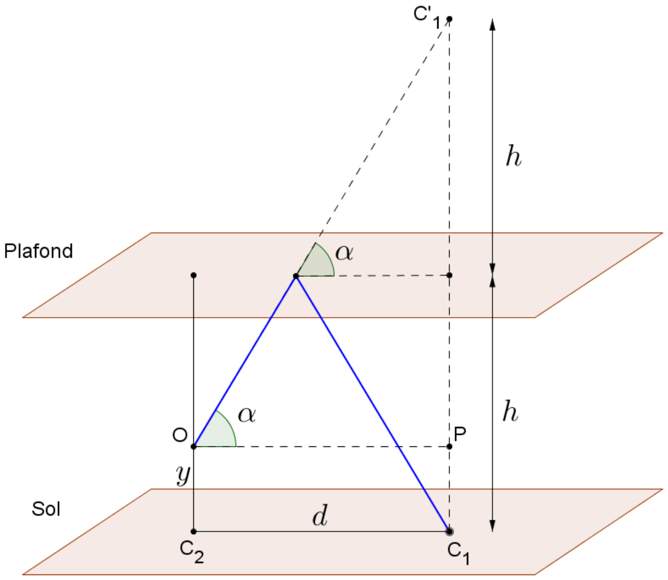
EXTRI357 – EPL, UCL, LLN, septembre 2013.

Dans le hall Sainte Barbe, dont le plafond est recouvert de miroirs parallèles au sol, je trace deux croix sur le sol et je constate que je dois élever mon regard d'un angle α par rapport à l'horizontale pour fixer des yeux le reflet d'une des croix sur le plafond lorsque que je me place sur l'autre croix. Je connais la distance d entre les croix et la hauteur y de mes yeux par rapport au sol.

1) Faites un croquis de la situation et indiquez-y les quantités mentionnées ci-dessus ainsi que les variables que vous utiliserez dans vos calculs.
2) Donner la hauteur h du hall Sainte Barbe en fonction de y, d et α. Veuillez à simplifier l'expression obtenue pour que y, d et α apparaissent un minimum de fois.
3) Calculez h au cm près pour les données suivantes : $y = 150$ cm, $d = 6$ m, $\alpha = 75°$.

NB: Une onde réfléchie dans un miroir a un angle réfléchi égal à l'angle d'incidence.

Solution proposée par Nicole Berckmans et Louis François



$$2)\ \tan\alpha = \frac{PC'_1}{OP} = \frac{2h - y}{d} \Rightarrow \boxed{h = \frac{d\tan\alpha + y}{2}}$$

$$3)\ h = \frac{600\tan 75 + 150}{2} \cong 1195 \text{ cm} = \boxed{11.95 \text{ m}}$$

Le 8 septembre 2013

EXTRI358 – FACSA, ULG, Liège, juillet 2012.

Montrer que :

$$\frac{1+\sin x}{1-\sin x}=\left(\frac{1+\tan\frac{x}{2}}{1+\tan\frac{x}{2}}\right)^2$$

On sait que : $\sin x=\dfrac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}$

On remplace : $\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}=\dfrac{1+\dfrac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}}{1-\dfrac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}}=\dfrac{1+\tan^2\frac{x}{2}+2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}-2\tan\frac{x}{2}}=\left(\dfrac{1+\tan\frac{x}{2}}{1+\tan\frac{x}{2}}\right)^2$

Le 15 octobre 2013

EXTRI359 – FACSA, ULG, Liège, juillet 2012.

Résoudre

$$\frac{1}{\cos x}+\frac{1}{\sin x}=2\sqrt{6}$$

Représenter les solutions sur le cercle trigonométrique.

Solution proposée par Hugues VERMEIREN

L'équation est symétrique : en permutant $\sin x$ et $\cos x$, on ne modifie pas l'équation.

Le "truc" avec ce type d'équation est de poser $x = y + \frac{\pi}{4}$. On a alors:

- $\cos x = \cos\left(y+\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot(\cos y + \sin y)$
- $\sin x = \sin\left(y+\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot(\cos y - \sin y)$

Et donc en additionnant et en multipliant membre à membre:

$$\cos x + \sin x = \sqrt{2}\cdot\cos y \quad \text{et} \quad \cos x\cdot\cos y = \frac{1}{2}\cdot\left(\cos^2 y - \sin^2 y\right)$$

Les solutions d'une équation symétriques peuvent toujours être groupées par paires d'angles complémentaires.

L'équation s'écrit alors, si $x \neq k\frac{\pi}{2}$:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\cos x}+\frac{1}{\sin x}=2\sqrt{6} &\iff \cos x+\sin x = 2\sqrt{6}\cdot\sin x\cos x \\
&\iff \sqrt{2}\cos y = 2\sqrt{6}\cdot\frac{1}{2}\left(\cos^2 y-\sin^2 y\right) \\
&\iff \cos y = \sqrt{3}\left(2\cos^2 y - 1\right) \\
&\iff 2\sqrt{3}\cos^2 y - \cos y - \sqrt{3} = 0 \\
&\iff \cos y = \frac{\sqrt{3}}{2} \ \text{ ou } \ \cos y = \frac{-\sqrt{3}}{3} \\
&\iff x = \pm\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4} \ \text{ ou } \ x = \pm\arccos(-\sqrt{3}/3)+\frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

En notant $\alpha = \arccos\left(-\sqrt{3}/3\right) \approx 2,186$, les solutions sont finalement:

$$x = \frac{\pi}{12}+2k\pi \quad , \quad x = \frac{5\pi}{6}+2k\pi \quad , \quad x = \pm\alpha+\frac{\pi}{4}+2k\pi\ .$$

Les solutions principales en degrés sont

$$x_1 = 15^\circ \quad , \quad x_2 = 75^\circ \quad , \quad x_3 \approx 170,26^\circ \quad \text{et} \quad x_4 \approx 279,74^\circ\ .$$

Solution proposée par Jacques COLLOT

$$\frac{1}{\cos x}+\frac{1}{\sin x}=2\sqrt{6}\Rightarrow CE\begin{cases}\cos x\neq 0\Rightarrow x\neq \dfrac{\pi}{2}+k\pi \\ \sin x\neq 0\Rightarrow x\neq k\pi\end{cases}\Rightarrow x\neq k\frac{\pi}{2}$$

L'équation devient : $\sin x+\cos x=2\sqrt{6}\sin x\cos x \qquad (1)$

On élève au carré $\Rightarrow \sin^2 x+2\sin x\cos x+\cos^2 x=24\sin^2 x\cos^2 x$

$$\Rightarrow 6\sin^2 2x-\sin 2x-1=0\Rightarrow\begin{cases}\sin 2x=\dfrac{1}{2}\\ \sin 2x=-\dfrac{1}{3}\end{cases}$$

1) Soit $\sin 2x=\frac{1}{2}$, l'équation (1) devient : $\sin x+\cos x=\frac{\sqrt{6}}{2} \qquad (2)$

On pose $\tan\phi=1\Rightarrow\phi=45°$ et l'équation (2) donne :

$$\sin(x+\phi)=\frac{\sqrt{6}}{2}\cos\phi\Rightarrow\sin(x+45)=\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow\begin{cases}x+45°=60°+k360° \Rightarrow x=15°+k360°\\ x+45°=180°-60°+k360°\Rightarrow x=75°+k360°\end{cases}$$

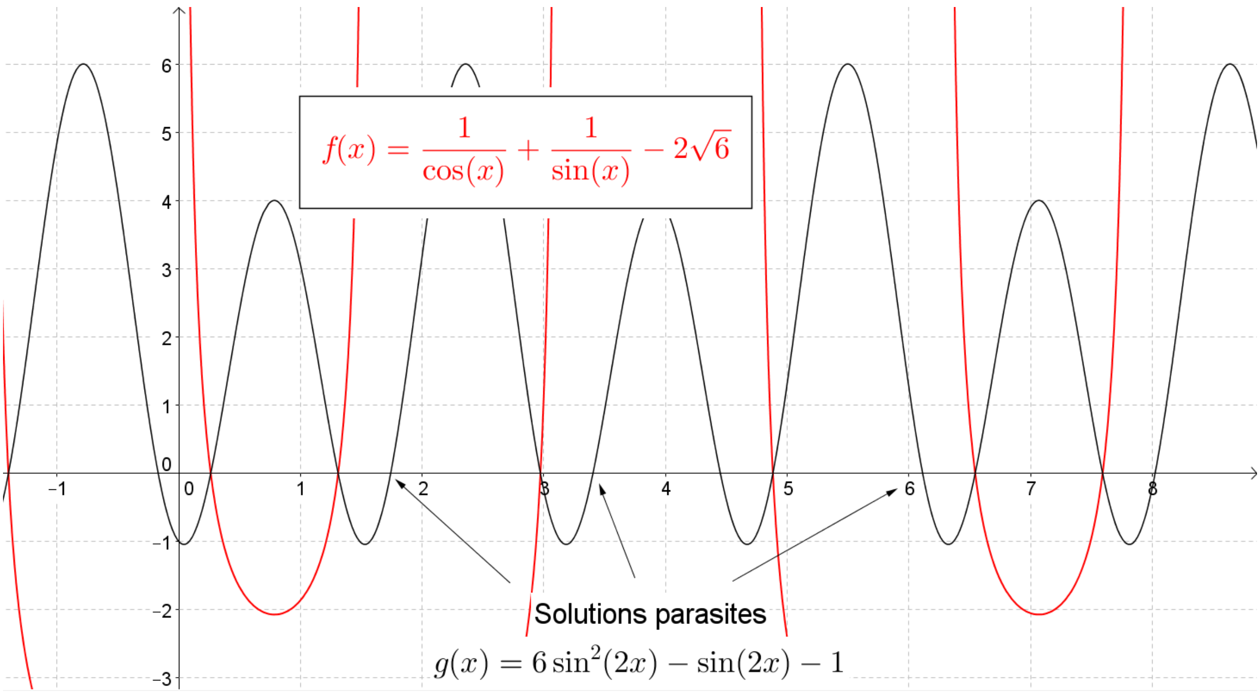
2) Soit $\sin 2x=-\frac{1}{3}$, l'équation (1) devient : $\sin x+\cos x=-\frac{\sqrt{6}}{3} \qquad (3)$

On pose $\tan\phi=1\Rightarrow\phi=45°$ et l'équation $(-)$ donne :

$$\sin(x+\phi)=-\frac{\sqrt{6}}{3}\cos\phi\Rightarrow\sin(x+45)=-\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x+45°=-35.264°+k360° \Rightarrow x=-80.264°+k360°\Rightarrow x=279.736°+k360°\\ x+45°=180°+35.264°+k360°\Rightarrow x=215.264°+k360°\Rightarrow x=170.264°+k360°\end{cases}$$

Remarque. Si on résout $\sin 2x=\frac{1}{2}$ ou $\sin 2x=-\frac{1}{3}$. On arrive par exemple pour $\frac{1}{2}$ à $x=15°+k180°$ et $x=75°+k180°$ c'est-à-dire des solutions de période 180°. Or l'équation de départ implique que l'on doit avoir des solutions de période 360°. L'introduction de ces solutions parasites se fait lorsqu'on élève au carré. (Voir graphique ci-dessous)



Remarque : le graphe est donné à titre indicatif. Une résolution avec machine graphique n'est pas acceptée.

15 octobre 2013