Exercices résolus de mathématiques.

Trigonométrie
Calcul numérique

TRI 44

EXTRI440-EXTRI449

http://www.matheux.c.la

Jacques Collot
Jan Frans Broeckx – Nicole Berckmans
Fabienne Zoetard

Janvier 2017

EXTRI440 – FACSA, ULG, Liège, septembre 2016.

Si A, B et C désignent les angles d'un triangle et *a*, *b* et *c* les longueurs des côtés opposés à ces angles, montrez que

$$\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}=\frac{a+b+c}{2a}\sin\frac{A}{2}$$

Solution proposée par Jan Frans Broeckx

Dans un triangle non dégénéré, $a \neq 0$. Il n'y a donc pas de conditions d'existence pour cette relation. Aussi, $0 < A < \pi$, et donc $\sin\frac{A}{2} \neq 0$ et $\cos\frac{A}{2} \neq 0$, dont nous aurons besoin dans la suite.

A l'aide de la règle aux sinus,

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2r \qquad (r = \text{rayon du cercle circonscrit})$$

on transforme le membre droit, dans le but d'aboutir au membre gauche :

$$\begin{aligned}
\frac{a+b+c}{2a}\sin\frac{A}{2} &= \frac{2r(\sin A+\sin B+\sin C)}{2r(2\sin A)}\sin\frac{A}{2}\\
&= \frac{\sin A+(\sin B+\sin C)}{2\sin A}\sin\frac{A}{2}\\
&= \frac{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}+2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}}{4\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}\sin\frac{A}{2} && \left(\sin\frac{A}{2}\neq 0\right)\\
&= \frac{\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}+\sin\frac{\pi-A}{2}\cos\frac{B-C}{2}}{2\cos\frac{A}{2}}\\
&= \frac{\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2}}{2\cos\frac{A}{2}} && \left(\cos\frac{A}{2}\neq 0\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\sin\frac{A}{2}+\cos\frac{B-C}{2}\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\sin\frac{\pi-(B+C)}{2}+\cos\frac{B-C}{2}\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\cos\frac{B+C}{2}+\cos\frac{B-C}{2}\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(2\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\right)\\
&= \cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}
\end{aligned}$$

---

12 janvier 2017

EXTRI441 – POLYTECH, UMONS, Mons, juillet 2016.

Démontrer que l'identité suivante est vérifiée dans tout triangle ABC :

$$\frac{\sin B}{\cos\left(\frac{B-C}{2}\right)}=\frac{2b\cos\left(\frac{A}{2}\right)}{b+c}$$

Solution proposée par Fabienne Zoetard

Dans le triangle ABC, on a : $A+B+C=2\pi \Rightarrow \frac{A}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{B+C}{2} \Rightarrow \cos\frac{A}{2}=\sin\frac{B+C}{2}$.

On a aussi : $\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C} \Rightarrow c=b\frac{\sin C}{\sin B} \Rightarrow b+c=b\left(1+\frac{\sin C}{\sin B}\right)=b\frac{\sin B+\sin C}{\sin B}$

L'expression à démontrer devient alors :

$$\frac{\cancel{\sin B}}{\cos\frac{B-C}{2}}=\frac{2\cancel{b}\sin\frac{B+C}{2}}{\cancel{b}(\sin B+\sin C)}.\cancel{\sin B} \Rightarrow \frac{1}{\cos\frac{B-C}{2}}=\frac{2\sin\frac{B+C}{2}}{\sin B+\sin C}$$

$$\Rightarrow \sin B+\sin C=2\sin\frac{B+C}{2}.\cos\frac{B-C}{2}$$

Expression qui est vraie en vertu des relations de Simpson.

Solution proposée par Jacques Collot

L'expression a démontrer peut se réécrire : $\frac{\sin B}{b}=\frac{2\cos\frac{B-C}{2}\cos\frac{A}{2}}{b+c} \quad (1)$

Or : $\frac{\sin B}{b}=\frac{\sin C}{c}=k$. Il suffit donc de prouver que le deuxième membre de (1) est égal à k.

En effet, sachant que $A+B+C=\pi \Rightarrow \frac{A}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{B+C}{2} \Rightarrow \cos\frac{A}{2}=\sin\frac{B+C}{2}$, et en appliquant

Simpson, on a : $\frac{2\cos\frac{B-C}{2}\cos\frac{A}{2}}{b+c}=\frac{2\cos\frac{B-C}{2}\sin\frac{B+C}{2}}{b+c}=\frac{\sin B+\sin C}{b+c}=\frac{k(b+c)}{b+c}=k$

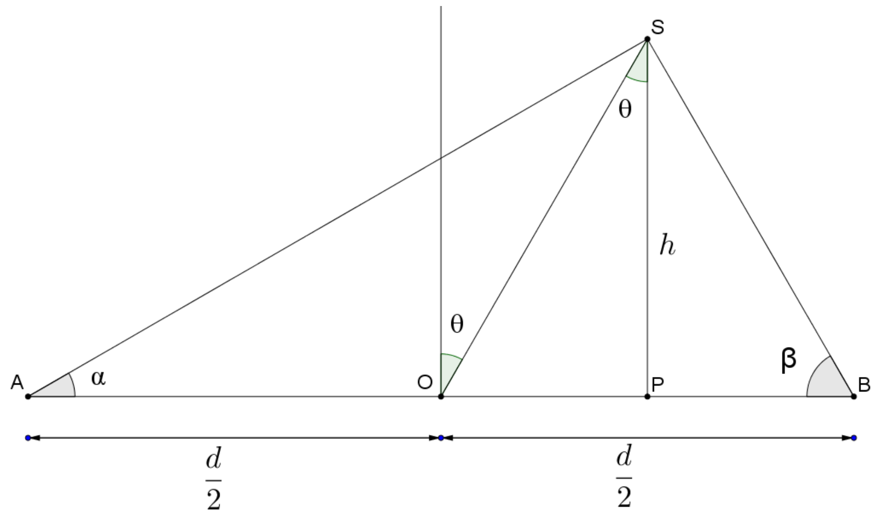
---

27 janvier 2017

EXTRI442 – POLYTECH, UMONS, Mons, juillet 2016.

Soient deux observateurs A et B situés au niveau du sol, supposé parfaitement horizontal, ainsi qu'un mât dressé de manière rigide en un point O situé à mi-distance de AB et incliné d'un angle θ par rapport à la verticale dans le plan formé par AB et le mât.
L'observateur A voit le mât, du point O à son sommet S, sous un angle α, alors que l'observateur B voit le mât OS sous un angle β supérieur à α.
Exprimer l'angle θ en fonction des angles α et β, de la distance d entre les deux observateurs et de la hauteur h abaissée du mât perpendiculairement au sol.
Calculer ensuite en degrés la valeur numérique de l'angle θ si $\alpha = 30°, \beta = 60°$ et que le rapport $d / h = 4 / \sqrt{3}$.

Solution proposée par Fabienne Zoetard



On a dans le ΔSOP : $\tan\theta = \dfrac{\overline{OP}}{h} \Rightarrow \overline{OP} = h\tan\theta.$

On en déduit que $\overline{PB} = \dfrac{d}{2} - h\tan\theta$ et $\overline{PA} = \dfrac{d}{2} + h\tan\theta.$

D'autre part :

$$\Delta PSB \Rightarrow \tan\beta = \frac{h}{\overline{\overline{PB}}} = \frac{h}{\dfrac{d}{2} - h\tan\theta} \text{ et } \Delta PSA \Rightarrow \tan\alpha = \frac{h}{\overline{\overline{PA}}} = \frac{h}{\dfrac{d}{2} + h\tan\theta}$$

Ce qui donne successivement :

$$\tan\beta\left(\frac{d}{2} - h\tan\theta\right) = \tan\alpha\left(\frac{d}{2} + h\tan\theta\right) \Rightarrow \frac{\tan\beta}{\tan\alpha} = \frac{\dfrac{d}{2} + h\tan\theta}{\dfrac{d}{2} - h\tan\theta}$$

$\Rightarrow \quad \tan\beta.d - 2h\tan\beta\tan\theta = \tan\alpha.d + 2h\tan\alpha\tan\theta$

$\Rightarrow \quad \tan\theta.2h(\tan\alpha + \tan\beta) = (\tan\beta - \tan\alpha)d$

$\Rightarrow \quad \boxed{\tan\theta = \dfrac{d}{2h} = \dfrac{\tan\beta - \tan\alpha}{\tan\beta + \tan\alpha}}$

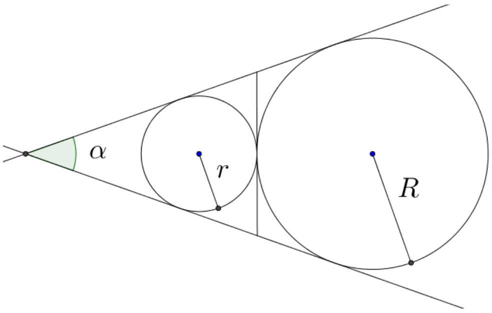
$$\text{Si } \alpha = 30°, \beta = 60° \text{ et } \frac{d}{h} = \frac{4}{\sqrt{3}} \Rightarrow \tan\theta = \frac{4}{2\sqrt{3}}.\frac{\sqrt{3} - \dfrac{\sqrt{3}}{3}}{\sqrt{3} + \dfrac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}.\frac{1 - \dfrac{1}{3}}{1 + \dfrac{1}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$\Rightarrow \quad \boxed{\theta = 30°}$

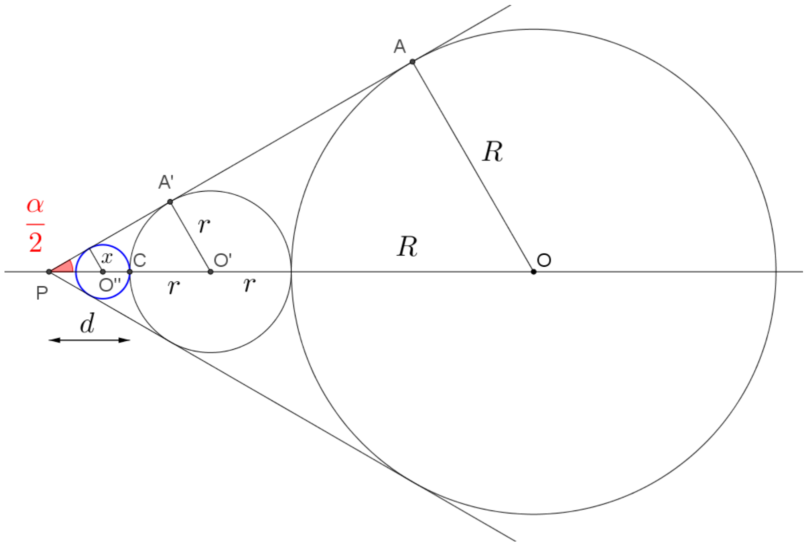
27 janvier 2017

EXTRI443 - POLYTECH, UMONS, Mons, septembre 2016.

Soient deux cercles tangents entre eux et de rayons différents, ainsi que les deux droites tangentes de manière commune à ces deux cercles. Exprimer l'angle α que forment ces deux droites en fonction des rayons respectifs r et R des deux cercles.
Soit un troisième cercle, tangent au plus petit des deux cercles précédents et également tangent aux deux droites précédentes. Exprimer le rayon x de ce troisième cercle en fonction des rayons respectifs r et R des deux premiers cercles.
Calculer la valeur numérique de l'angle α ainsi que celle du rayon x si $r = 4$ cm et $R = 12$ cm.



Voir aussi EXTRI308 et EXTRI407



Dans les triangles rectangles $PA'O'$ et PAO, on a

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{r}{r+d} \quad (1) \quad \text{et} \quad \sin\frac{\alpha}{2}=\frac{R}{R+2r+d} \quad (2)$$

De (1), on tire : $r+d=\dfrac{r}{\sin\frac{\alpha}{2}}$ et on remplace dans $(2)\Rightarrow \sin\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{R}{R+r+\dfrac{r}{\sin\frac{\alpha}{2}}}$

$$\Rightarrow \quad \cancel{\sin\frac{\alpha}{2}}=\frac{R\cancel{\sin\frac{\alpha}{2}}}{\sin\frac{\alpha}{2}(R+r)+r}\Rightarrow \boxed{\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{R-r}{R+r}}$$

Pour calculer x, il suffit d'appliquer la formule précédente :

$$\Rightarrow \quad \sin\frac{\alpha}{2}=\frac{R-r}{R+r}=\frac{r-x}{r+x}\Rightarrow\frac{R-r}{R+r}r+\frac{R-r}{R+r}x=r-x\Rightarrow x\left(1+\frac{R-r}{R+r}\right)=r\left(1-\frac{R-r}{R+r}\right)$$

$$\Rightarrow \quad x=r\frac{R+r-R+r}{R+r+R-r}\Rightarrow\boxed{x=\frac{r^2}{R}}$$

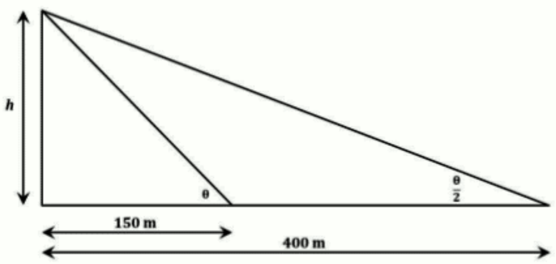
Si $r=4$ cm et $R=12$ cm $\Rightarrow \boxed{x=\dfrac{4}{3}}$

EXTRI444 – EPB, ULB, Bruxelles, juillet 2017.

Un ingénieur souhaite déterminer la hauteur d'un gratte-ciel en mesurant la longueur de son ombre. A midi, la direction du soleil forme un angle θ par rapport à l'horizon (angle d'élévation) et l'ombre s'étend à 150 m de la base du gratte-ciel. A un certain instant dans l'après-midi, lorsque le soleil a baissé dans le ciel et l'angle d'élévation prend une valeur moitié de celle qui était observé à midi, l'ombre du gratte-ciel couvre une distance de 400 m. Quelle est la hauteur du gratte-ciel ?

Indication. On assimile ici le gratte-ciel à un segment vertical touchant le sol en l'une de ses extrémités. Le sol est supposé parfaitement horizontal.

Solution proposée par Jan Frans Broeckx



La figure montre que $\tan\theta = \frac{h}{150}$ et $\tan\frac{\theta}{2} = \frac{h}{400}$. Or, $\tan\theta = \frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}$.

Donc : $\frac{h}{150} = \frac{2\frac{h}{400}}{1-\left(\frac{h}{400}\right)^2} \Leftrightarrow 1-\left(\frac{h}{400}\right)^2 = \frac{150}{200} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \left(\frac{h}{400}\right)^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{h}{400} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow h = 200$

La hauteur du bâtiment est de 200 m.

---

14 septembre 2017

EXTRI445 – EPB, ULB, Bruxelles, juillet 2017.

Exprimer $\cos\theta$ en fonction de $\cos 2\theta$ et $\cos 3\theta$.

Discuter suivant la valeur de θ.

Solution proposée par Jan Frans Broeckx

$$\begin{aligned}\cos\theta &= \cos(3\theta - 2\theta) = \cos 3\theta . \cos 2\theta + \sin 3\theta . \sin 2\theta \\ &= \cos 3\theta . \cos 2\theta \pm \sqrt{(1-\cos^2 3\theta)(1-\cos^2 2\theta)}\end{aligned}$$

où le signe devant la racine est « + » si $\sin 3\theta$ et $\sin 2\theta$ sont de même signe, et « − » si $\sin 3\theta$ et $\sin 2\theta$ sont de signes opposés.

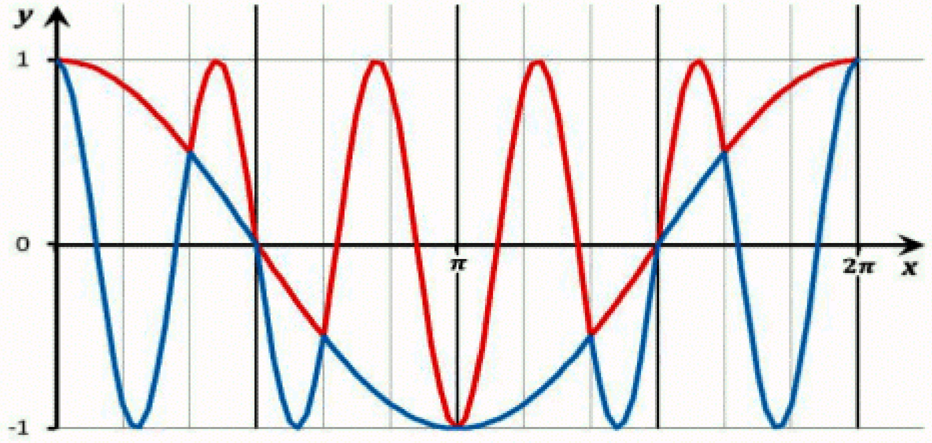
La fonction $\cos\theta = \cos(3\theta - 2\theta)$ est périodique de période 2π. Il suffit donc de discuter la formule pour $\theta \in [0, 2\pi]$.

θ	2θ	3θ	$\sin 2\theta$	$\sin 3\theta$	$\cos\theta =$
$\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$	$\left[0, \frac{2\pi}{3}\right]$	$[0, \pi]$	≥ 0	≥ 0	$\cos 3\theta . \cos 2\theta + \sqrt{(1-\cos^2 3\theta)(1-\cos^2 2\theta)}$
$\left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$	$\left[\frac{2\pi}{3}, \pi\right]$	$\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$	≥ 0	≤ 0	$\cos 3\theta . \cos 2\theta - \sqrt{(1-\cos^2 3\theta)(1-\cos^2 2\theta)}$
$\left[\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}\right]$	$\left[\pi, \frac{4\pi}{3}\right]$	$\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$	≤ 0	≤ 0	$\cos 3\theta . \cos 2\theta + \sqrt{(1-\cos^2 3\theta)(1-\cos^2 2\theta)}$
$\left[\frac{2\pi}{3}, \pi\right]$	$\left[\frac{4\pi}{3}, 2\pi\right]$	$[2\pi, 3\pi]$	≤ 0	≥ 0	$\cos 3\theta . \cos 2\theta - \sqrt{(1-\cos^2 3\theta)(1-\cos^2 2\theta)}$
$\left[\pi, \frac{4\pi}{3}\right]$	$\left[2\pi, \frac{8\pi}{3}\right]$	$[3\pi, 4\pi]$	≥ 0	≤ 0	$\cos 3\theta . \cos 2\theta - \sqrt{(1-\cos^2 3\theta)(1-\cos^2 2\theta)}$
$\left[\frac{4\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}\right]$	$\left[\frac{8\pi}{3}, 3\pi\right]$	$\left[4\pi, \frac{9\pi}{2}\right]$	≥ 0	≥ 0	$\cos 3\theta . \cos 2\theta + \sqrt{(1-\cos^2 3\theta)(1-\cos^2 2\theta)}$
$\left[\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{3}\right]$	$\left[3\pi, \frac{10\pi}{3}\right]$	$\left[\frac{9\pi}{2}, 5\pi\right]$	≤ 0	≥ 0	$\cos 3\theta . \cos 2\theta - \sqrt{(1-\cos^2 3\theta)(1-\cos^2 2\theta)}$
$\left[\frac{5\pi}{3}, 2\pi\right]$	$\left[\frac{10\pi}{3}, 4\pi\right]$	$[5\pi, 6\pi]$	≤ 0	≤ 0	$\cos 3\theta . \cos 2\theta + \sqrt{(1-\cos^2 3\theta)(1-\cos^2 2\theta)}$

Remarque :

Dans le graphique ci-dessous, dans l'intervalle $[0\ ,2\pi]$:

- en rouge le graphique de $\cos 3\theta \,.\, \cos 2\theta + \sqrt{(1-\cos^2 3\theta)(1-\cos^2 2\theta)}$
- en bleu le graphique de $\cos 3\theta \,.\, \cos 2\theta - \sqrt{(1-\cos^2 3\theta)(1-\cos^2 2\theta)}$



14 septembre 2017

EXTRI446 – EPB, ULB, Bruxelles, juillet 2017.
POLYTECH, Umons, Mons, juillet 2017
EPL, UCL, LLN, juillet 2017 série 1
FACSA, ULG, Liège, juillet 2017

Résoudre dans $\mathbb{R}$

$$2\sin x + \cos x = 2\sin^2\frac{x}{2} + 3\tan\frac{x}{2}$$

et représenter les solutions comprises entre $-\pi$ et π sur le cercle trigonométrique.

Solution proposée par Jan Frans Broeckx
Fabienne Zoetard a proposé une solution identique.

CE : $\frac{x}{2} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{x \neq \pi + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z})}$

On transforme d'abord l'équation comme suit :

$$2\sin x + \cos x = 2\sin^2\frac{x}{2} + 3\tan\frac{x}{2} \quad \Leftrightarrow \quad 2\sin x + \cos x - 1 + \left(1 - 2\sin^2\frac{x}{2}\right) - 3\tan\frac{x}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\sin x + 2\cos x - 1 - 3\tan\frac{x}{2} = 0$$

Posons $\tan\frac{x}{2} = t$ et utilisons les formules qui expriment $\sin x$ et $\cos x$ en termes de $\tan\frac{x}{2}$:

$$2\,\frac{2t}{1+t^2} + 2\,\frac{1-t^2}{1+t^2} - 1 - 3t = 0$$

On met le tout sur dénominateur commun $(1+t^2)$, qui ne peut jamais s'annuler :

$$\frac{4t + 2(1-t^2) - (1+t^2) - 3t(1+t^2)}{1+t^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -3t^3 - 3t^2 + t + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{(t+1)(1-3t^2) = 0}$$

Il y a donc trois familles de solutions :

$$t = \tan\frac{x}{2} = -1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x}{2} = -\frac{\pi}{4} + k\pi \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$t = \tan\frac{x}{2} = +\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x}{2} = +\frac{\pi}{6} + k\pi \quad \Leftrightarrow \quad x = +\frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$t = \tan\frac{x}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x}{2} = -\frac{\pi}{6} + k\pi \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

La représentation des solutions sur le cercle trigonométrique est évidente, et ne consiste qu'en trois points.

Solution proposée par Fabienne Zoetard

$$2\sin x+\cos x=2\sin^2\frac{x}{2}+3\tan\frac{x}{2}\Rightarrow CE: x\neq\pi+2k\pi$$

$$\Rightarrow 2\sin x+\cos x=1-\cos x+3\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}.\frac{\cos\frac{x}{2}.2}{\cos\frac{x}{2}.2}$$

$$\Rightarrow 2\sin x+2\cos x-1-\frac{3\sin x}{\cos x+1}=0$$

$$\Rightarrow 2\sin x\cos x+2\sin x+2\cos^2 x+2\cos x-\cos x-1-3\sin x=0$$

$$\Rightarrow \sin 2x-\sin x+\cos 2x+\cos x=0 \quad \Rightarrow 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{3x}{2}+2\cos\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2}=0$$

$$\Rightarrow 2\cos\frac{3x}{2}\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)=0 \quad \Rightarrow 2\cos\frac{3x}{2}\left(\sin\frac{x}{2}+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2}\right)\right)=0$$

$$\Rightarrow 2\cos\frac{3x}{2}.2\sin\frac{\pi}{4}.\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=0 \quad \Rightarrow \cos\frac{3x}{2}.\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=0$$

1) $\cos\frac{3x}{2}=0\Rightarrow\frac{3x}{2}=\frac{\pi}{2}+k\pi\Rightarrow x=\frac{\pi}{3}+\frac{2k\pi}{3}$

2) $\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=0\Rightarrow\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+k\pi\Rightarrow x=\frac{3\pi}{2}+2k\pi$

Les solutions principales sont : $\frac{\pi}{3},\frac{3\pi}{2},\frac{5\pi}{3}$

14 septembre 2017

EXTRI447 – POLYTECH, Umons, Mons, juillet 2017.

Démontrer que si la condition suivante est vérifiée :

$$\cos(a+b)=\cos(a)\cos(b)$$

alors

$$\sin^2(a+b)=\left(\sin(a)+\sin(b)\right)^2$$

Solution proposée par Fabienne Zoetard

Par hypothèse : $\cos(a+b)=\cos(a)\cos(b)$

Or $\cos(a+b)=\cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)$

Donc on a : $\sin(a)\sin(b)=0$

Si $\sin(a)=0 \Rightarrow a=k\pi \quad (k\in\mathbb{Z})$ et la thèse devient : $\sin^2(b+k\pi)=\sin^2(b)$ (1)

Si k est pair : $\sin(b+k\pi)=\sin(b)$ et (1) est vérifié.

Si k est impair : $\sin(b+k\pi)=-\sin(b)$ et (1) est vérifié.

Si $\sin(b)=0,$ on tire les mêmes conclusions car il suffit de permuter a et b.

---

14 septembre 2017

EXTRI448 – POLYTECH, Umons, Mons, juillet 2017.

Soit un triangle quelconque ABC dont les côtés sont en progression arithmétique de raison r. L'aire de ce triangle est égale à celle du triangle équilatéral de même périmètre.
Etablir l'expression de l'angle de valeur intermédiaire du triangle ABC en fonction du rapport $\frac{r}{a}$, si a désigne la longueur du côté opposé à l'angle cherché.

Solution proposée par Fabienne Zoetard

On a $\begin{cases} c = a - r \\ b = a + r \end{cases} \quad (0 \leq r < a)$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

$$a^2 = (a+r)^2 + (a-r)^2 - 2(a+r)(a-r)\cos A$$

$$a^2 = a^2 + 2ar + r^2 + a^2 - 2ar + r^2 - 2\left(a^2 - r^2\right)\cos A$$

$$2\left(a^2 - r^2\right)\cos A = a^2 + 2r^2 \Rightarrow \cos A = \frac{a^2 + 2r^2}{2\left(a^2 - r^2\right)} \Rightarrow \boxed{\cos A = \frac{1 + 2\left(\frac{r}{a}\right)^2}{2\left(1 - \left(\frac{r}{a}\right)^2\right)}}$$

Il apparaît donc que nous n'avons pas besoin de savoir que l'aire du triangle est égale à l'aire du triangle équilatéral de même périmètre.

Inclure cette condition, nous amène au développement suivant.

Le périmètre du triangle ABC est égal à $3a$. Donc le côté du triangle équilatéral qui a le même périmètre est égal à a et donc l'aire vaut $A=\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2$

La formule de Héron nous permet d'exprimer l'aire d'un triangle en fonction de la longueur de ses côtés : $A=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ où p est le demi-périmètre, donc $p=\dfrac{3a}{2}$

On a alors :

$$\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$$

$$\Leftrightarrow \qquad \frac{3a}{2}\left(\frac{3a}{2}-a\right)\left(\frac{3a}{2}-a+r\right)\left(\frac{3a}{2}-a+r\right)=\frac{3}{16}a^4$$

$$\Leftrightarrow \qquad \frac{3a^2}{16}(a-2r)(a+2r)=\frac{3}{16}a^4 \quad \Leftrightarrow \qquad a^2-4r^2=a^2 \Rightarrow r=0$$

Autrement dit le triangle ABC est le triangle équilatéral et $\widehat{A}=60°$

Remarque : La formule de Héron ne fait pas partie du programme et nous arrivons à une expression indépendante de $\dfrac{r}{a}$. La question mériterait d'être plus claire.

EXTRI449 – EPL, UCL, LLN, juillet 2017.

Cochez chaque fois <u>l'unique affirmation vraie</u> parmi les possibilités.

Réponse juste = 1 point ; autre réponse = 0.

- **Lorsque l'élévation du soleil au dessus de l'horizon est de 60°, l'ombre d'une tour sur sol plat est longue de 80 m. Au départ de cette situation, de combien de degrés l'élévation du soleil doit-elle varier pour que la longueur de l'ombre devienne égale à 240 m ?**

  +45° ❑ +30° ❑ +15° ❑ -15° ❑ -30° ❑

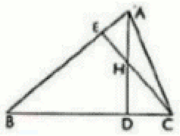
- **On considère un trapèze ABCD, rectangle en A, et dont le côté oblique CD est perpendiculaire à la petite diagonale AC. Ce même côté oblique fait avec la grande base AD un angle de 30°. L'aire de ce trapèze, exprimée en fonction de la longueur d de la petite diagonale, est égale à :**

  $\sqrt{3}d^2$ ❑ $0{,}875\sqrt{3}d^2$ ❑ $0{,}625\sqrt{3}d^2$ ❑ d^2 ❑ $0{,}75d^2$ ❑

- **L'expression $\arctan\left(\frac{1}{7}\right) + 2\arctan\left(\frac{1}{3}\right)$ est égale à :**

  $-\frac{\pi}{3}$ ❑ $\frac{3\pi}{4}$ ❑ $\frac{\pi}{4}$ ❑ $-\frac{\pi}{4}$ ❑ **aucune de ces valeurs** ❑

- **Dans le triangle ABC représenté ci-dessous, la hauteur AD est coupée en son milieu H par la hauteur CE. Que peut-on affirmer ?**



  $\frac{\tan B}{\tan C} = 2$ ❑ $\tan B \tan(A+B) = -2$ ❑ $\tan B \tan C = 0{,}5$ ❑ $\tan B = \tan C$ ❑

- **L'expression $\sin 7u - \sin 5u - 2\cos 5u \sin 2u$ est identiquement égale à :**

  $2\cos u \sin 4u$ ❑ $\cos 4u$ ❑ $-2\cos 6u \sin 2u$ ❑ $-2\cos 4u \cos\left(\frac{\pi}{2} - u\right)$ ❑ 1 ❑

Solution proposée par Jan Frans Broeckx

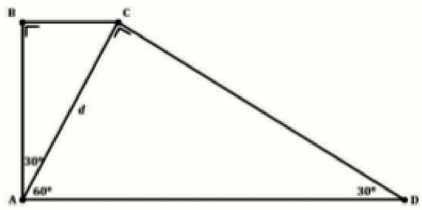
$\tan 60° = \sqrt{3} \Rightarrow$ hauteur de la tour $h = 80\sqrt{3}$ m

Lorsque la longueur de l'ombre égale 240 m alors $\tan(\text{élévation}) = \frac{h}{240} = \frac{\sqrt{3}}{3} = \tan 30° \Rightarrow \boxed{-30°}$

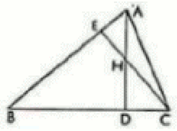
$$\text{Aire} = A_{ABC} + A_{ACD} = \frac{1}{2}|AB||BC| + \frac{1}{2}|AC||CD|$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}d}{2}\right)\left(\frac{d}{2}\right) + \frac{1}{2}d(\sqrt{3}d) = \frac{5}{8}\sqrt{3}\,d^2$$

$$\Rightarrow \boxed{0{,}625\sqrt{3}\,d^2}$$



$$\tan\left(2\arctan\frac{1}{3}\right)=\frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{1}{9}}=\frac{2}{3}\cdot\frac{9}{8}=\frac{3}{4}\qquad \tan\left(\arctan\frac{1}{7}+2\arctan\frac{1}{3}\right)=\frac{\frac{1}{7}+\frac{3}{4}}{1-\frac{1}{7}\cdot\frac{3}{4}}=\frac{4+21}{28-3}=1\quad\Rightarrow\quad\boxed{\frac{\pi}{4}}$$

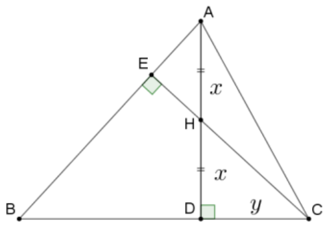


$$\left.\begin{array}{l}AD\perp BC\\ CE\perp AB\end{array}\right\}\Rightarrow\ \widehat{ECB}=\widehat{ABC}=\hat{B}$$

$$\tan B=\tan\widehat{ECB}=\frac{|HD|}{|DC|}=\frac{1}{2}\cdot\frac{|AD|}{|DC|}=\frac{1}{2}\tan C\quad\Rightarrow\quad\boxed{\frac{\tan B}{\tan C}=0,5}$$

$$\begin{aligned}\sin 7u-\sin 5u-2\cos 5u\sin 2u &= 2\sin u\cos 6u-4\cos 5u\sin u\cos u\\ &= 2\sin u\,(\cos 6u-2\cos 5u\cos u)\\ &= 2\sin u\left(\cos 6u-(\cos 6u+\cos 4u)\right)\\ &= -2\sin u\cos 4u\\ &= \boxed{-2\cos 4u\cos\left(\frac{\pi}{2}-u\right)}\end{aligned}$$

Variante de la question 4 proposée par Martine Devillers



$$\overline{AH}=\overline{HD}=x,\quad \overline{DC}=y$$

$$\left\{\begin{array}{l}\Delta HDC:\tan(90^\circ-B)=\dfrac{x}{y}\\[2ex] \Delta ADC:\tan C=\dfrac{2x}{y}\end{array}\right.\Rightarrow\frac{\tan C}{\tan(90^\circ-B)}=2$$

Or $\tan(90^\circ-B)=\dfrac{1}{\tan B}\Rightarrow\tan C.\tan B=2$ Et comme $C=180^\circ-(A+B)$

$$\Rightarrow\tan(180^\circ-(A+B)).\tan B=2\Rightarrow\tan(A+B).\tan B=-2$$

---

18 septembre 2017