

Exercices résolus de mathématiques.

Trigonométrie

Calcul numérique

TRI 5

EXTRI050 – EXTRI059

<http://www.matheux.be.tf>

Jacques Collot

1 avril 03

EXTRI050 – POLYTECH, UMONS, Mons, questions-types 2000-2001.
POLYTECH, UMONS, Mons, septembre 2016

Démontrer que l'expression est indépendante de a .

$$E = \frac{2 \sin 3a}{4 \sin a \sin (60 + a) \sin (60 - a)}$$

$$\begin{aligned} \sin 3a &= \sin (2a + a) = \sin 2a \cos a + \cos 2a \sin a \\ &= 2 \sin a \cos^2 a + (\cos^2 a - \sin^2 a) \sin a \\ &= 2 \sin a (4 \cos^2 a - 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin (60 + a) \sin (60 - a) &= \frac{1}{2} \cos (60 + a - 60 + a) - \frac{1}{2} \cos (60 + a + 60 - a) \\ &= \frac{1}{2} \cos 2a - \frac{1}{2} \cos 120 \\ &= \frac{1}{2} \cos 2a + \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{4} [4 \cos^2 a - 1] \end{aligned}$$

$$E = \frac{2 \sin a (4 \cos^2 a - 1)}{4 \sin a \frac{1}{4} [4 \cos^2 a - 1]} = 2$$

EXTRI051 – Mons, questions-types 2000-2001.

Si les angles d'un triangle vérifient la relation.

$$2 \tan B = \tan A + \tan C$$

Montrer que

$$2 \cos B = \cos(A - C)$$

$$B = \pi - (A + C) \rightarrow \sin(A + C) = \sin B$$

$$\tan A + \tan C = \frac{\sin B}{\cos A \cos C} = 2 \tan B = 2 \frac{\sin B}{\cos B}$$

$$\rightarrow \cos B = 2 \cos A \cos C \quad (1)$$

$$\text{or } \cos B = -\cos(A + C) = -\cos A \cos C + \sin A \sin C \quad (2)$$

$$\text{De (1) et (2): } \sin A \sin C = 3 \cos A \cos C$$

Donc

$$\cos B = 2 \cos A \cos C \quad \text{multiplions par 2} \rightarrow$$

$$2 \cos B = 4 \cos A \cos C$$

$$= \cos A \cos C + 3 \cos A \cos C$$

$$= \cos A \cos C + \sin A \sin C$$

$$= \sin(A - C)$$

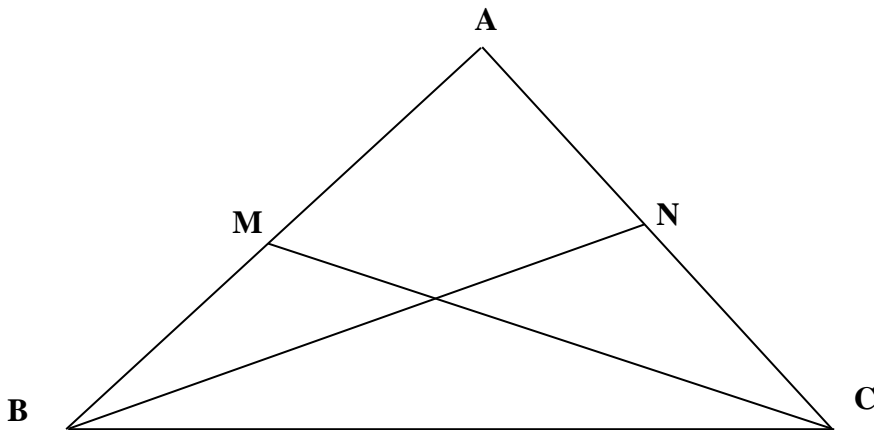
**EXTRI052 – Mons, questions-types 2000-2001.
Louvain, juillet 2003**

Dans un triangle rectangle, on donne l'hypoténuse a et le produit k^2 des bissectrices intérieures des angles B et C .

a) Démontrer que

$$\sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} = \frac{k^2}{4a^2}$$

b) Calculer B et C si $a = 3 \text{ m}$; $k^2 = 5 \text{ m}^2$



$$\begin{aligned}
 a) \quad b &= a \sin B = 2a \sin \frac{B}{2} \cos \frac{B}{2} \\
 c &= a \sin C = 2a \sin \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2} \\
 bc &= 4a^2 \sin \frac{B}{2} \cos \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2} \\
 &= 4a^2 \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \frac{b}{MC} \frac{c}{BN} \\
 \text{or } MC \cdot BN &= k^2 \quad \rightarrow \quad \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} = \frac{k^2}{4a^2}
 \end{aligned}$$

$$b) \quad \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} = \frac{k^2}{4a^2} = \frac{5}{4 \times 9} = 0.1389$$

$$\text{or } B + C = \frac{\pi}{2} \quad \rightarrow \quad \frac{C}{2} = \frac{\pi}{4} - \frac{B}{2}$$

$$\rightarrow \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} = \sin \frac{B}{2} \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{B}{2} \right) = \sin \frac{B}{2} \left[\sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{B}{2} - \cos \frac{\pi}{4} \sin \frac{B}{2} \right]$$

$$\rightarrow \sin \frac{B}{2} \cos \frac{B}{2} - \sin^2 \frac{B}{2} = 0.1389 \times \frac{2}{\sqrt{2}} = 0.1964$$

$$\frac{1}{2} \sin B - \frac{1}{2} (1 - \cos B) = 0.1964$$

$$\sin B + \cos B = 1.3928$$

C'est une équation de type $a \sin x + b \cos x = c$

$$\text{donc } \tan \psi = 1 \quad \rightarrow \quad \psi = 45 \quad \rightarrow \quad \frac{1}{\cos 45} \cos (B - 45) = 1.3928$$

$$\rightarrow B = 54.97^\circ \quad \text{et} \quad C = 35.03^\circ$$

EXTRI053 – Mons, questions-types 2000-2001.

Dans un triangle ABC, on constate que la longueur du côté AB vaut deux fois la longueur du côté AC.

- Démontrer que cette propriété est possible pour toute valeur de l'angle A.
 - Résoudre le triangle si $BC = 5$ m et $A = 50^\circ$
-

$$\begin{aligned} a) \quad CB^2 &= AC^2 + AB^2 - 2AB \cdot AC \cos A \\ &= AC^2 + 4AB^2 - 4 AC^2 \cos A \\ &= AC^2 (5 - 4 \cos A) \end{aligned}$$

$$CB = AC \sqrt{5 - 4 \cos A}$$

Comme $\cos A$ est compris entre -1 et 1 , le radicand de la racine est toujours positive
Il y donc toujours une solution pour CB , quelque soit la valeur de A

$$b) \quad 5 = AC \sqrt{5 - 4 \cos 50} \rightarrow AC = 3.21 \quad \text{et} \quad AB = 6.24$$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} \rightarrow \sin B = \frac{b}{a} \sin A = \frac{3.21}{5} \sin 50$$

$$\rightarrow B = 29.44^\circ \quad \text{et} \quad C = 100.56^\circ$$

Modifié le 31 mars 2011 (Fabienne Zoetard)

EXTRI054 – FACSA, ULG, Liège, juillet 2001.

Polytech, Umons, Mons, septembre 2013

Enoncé de FACSA

Vérifier les identités suivantes.

$$\tan\left(45^\circ - \frac{a}{2}\right) = \frac{1 - \sin a}{\cos a} = \frac{\cos a}{1 + \sin a}$$

Enoncé de POLYTECH

Vérifier les identités suivantes.

$$\tan\left(45^\circ - \frac{a}{2}\right) = \frac{1 - \sin a}{\cos a}$$

Vérifions d'abord

$$\begin{aligned}\tan\left(45^\circ - \frac{a}{2}\right) &= \frac{1 - \sin a}{\cos a} \Rightarrow \frac{\tan 45^\circ - \tan \frac{a}{2}}{1 + \tan 45^\circ \tan \frac{a}{2}} = \frac{1 - 2 \sin \frac{a}{2} \cos \frac{a}{2}}{\cos^2 \frac{a}{2} - \sin^2 \frac{a}{2}} \\ &\Rightarrow \frac{1 - \tan \frac{a}{2}}{1 + \tan \frac{a}{2}} = \frac{\frac{1}{\cos^2 \frac{a}{2}} - 2 \tan \frac{a}{2}}{1 - \tan^2 \frac{a}{2}} \Rightarrow \frac{1 - \tan \frac{a}{2}}{1 + \tan \frac{a}{2}} = \frac{\tan^2 \frac{a}{2} + 1 - 2 \tan \frac{a}{2}}{1 - \tan^2 \frac{a}{2}} \\ &\Rightarrow \frac{1 - \tan \frac{a}{2}}{1 + \tan \frac{a}{2}} = \frac{\left(\tan \frac{a}{2} - 1\right)^2}{1 - \tan^2 \frac{a}{2}} \Rightarrow \frac{1 - \tan \frac{a}{2}}{1 + \tan \frac{a}{2}} = \frac{1 - \tan \frac{a}{2}}{1 + \tan \frac{a}{2}} \quad \text{CQFD}\end{aligned}$$

Pour la deuxième égalité, on a :

$$\begin{aligned}\cos^2 a + \sin^2 a &= 1 \Rightarrow 1 - \sin^2 a = \cos^2 a \Rightarrow (1 - \sin a)(1 + \sin a) = \cos^2 a \\ &\Rightarrow \frac{1 - \sin a}{\cos a} = \frac{\cos a}{1 + \sin a} \quad \text{CQFD}\end{aligned}$$

Solution proposée par Fabienne Zoetard

$$\begin{aligned}\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{a}{2}\right) &= \frac{1 - \tan \frac{a}{2}}{1 + \tan \frac{a}{2}} = \frac{1 - \frac{\sin \frac{a}{2}}{\cos \frac{a}{2}}}{1 + \frac{\sin \frac{a}{2}}{\cos \frac{a}{2}}} = \frac{\cos \frac{a}{2} - \sin \frac{a}{2}}{\cos \frac{a}{2} + \sin \frac{a}{2}} = \frac{\cos \frac{a}{2} - \sin \frac{a}{2}}{\cos \frac{a}{2} + \sin \frac{a}{2}} \cdot \frac{\cos \frac{a}{2} - \sin \frac{a}{2}}{\cos \frac{a}{2} - \sin \frac{a}{2}} \\ &= \frac{\cos^2 \frac{a}{2} - 2 \sin \frac{a}{2} \cos \frac{a}{2} + \sin^2 \frac{a}{2}}{\cos^2 \frac{a}{2} - \sin^2 \frac{a}{2}} = \frac{1 - \sin a}{\cos a}\end{aligned}$$

Solution proposée par Robert Moulan

La deuxième égalité est immédiate.

D'autre part :

$$\begin{aligned} m_1 &= \frac{\tan 45^\circ - \tan \frac{a}{2}}{1 + \tan 45^\circ \tan \frac{a}{2}} = \frac{1 - \tan \frac{a}{2}}{1 + \tan \frac{a}{2}} = \frac{\cos \frac{a}{2} - \sin \frac{a}{2}}{\cos \frac{a}{2} + \sin \frac{a}{2}} = \frac{\cos \frac{a}{2} - \sin \frac{a}{2}}{\cos \frac{a}{2} + \sin \frac{a}{2}} \cdot \frac{\cos \frac{a}{2} + \sin \frac{a}{2}}{\cos \frac{a}{2} + \sin \frac{a}{2}} \\ &= \frac{\cos^2 \frac{a}{2} - \sin^2 \frac{a}{2}}{1 + 2 \sin \frac{a}{2} \cos \frac{a}{2}} = \frac{\cos a}{1 + \sin a} = m_3 \end{aligned}$$

Ou encore avec $t = \tan \frac{a}{2}$

$$\begin{aligned} m_1 &= \frac{1-t}{1+t} \\ m_3 &= \frac{\frac{1-t^2}{1+t^2}}{1 + \frac{2t}{1+t^2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2+2t} = \frac{(1-t)(1+t)}{(1+t)^2} = \frac{1-t}{1+t} = m_1 \end{aligned}$$

Modifié le 21 octobre 2013 (Fabienne Zoetard). Modifié le 2 février 2018 (Robert Moulan)

EXTRI055 – FACSA, ULG, Liège, juillet 2001.

Soient

$$m^2 = \cos^2 \beta + \sin^2 \alpha \sin^2 \beta \quad (1)$$

$$n^2 = \cos^2 \alpha \quad (2)$$

$$p^2 = \sin^2 \beta + \sin^2 \alpha \cos^2 \beta \quad (3)$$

et les équations

$$4m^2 = n^2 = p^2 \quad (4)$$

On demande de calculer les valeurs des angles α et β et de les représenter sur le cercle trigonométrique

De (1) et (3):

$$\begin{aligned} m^2 - p^2 &= \cos^2 \beta - \sin^2 \beta + \sin^2 \alpha (\sin^2 \beta - \cos^2 \beta) \\ &= (\cos^2 \beta - \sin^2 \beta) (1 - \sin^2 \alpha) \\ &= (2 \cos^2 \beta - 1) \cos^2 \alpha = (2 \cos^2 \beta - 1) n^2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \cos^2 \beta = \frac{m^2 - p^2}{n^2} + 1 = \frac{m^2 - p^2 + n^2}{n^2}$$

$$\text{Or } p^2 = n^2 = 4m^2 \Rightarrow \cos^2 \beta = \frac{m^2}{2n^2} = \frac{m^2}{8m^2} = \frac{1}{8} \rightarrow \sin^2 \beta = \frac{7}{8}$$

Les équations deviennent :

$$m^2 = \frac{1}{8} + \frac{7}{8} \sin^2 \alpha \quad (4)$$

$$4m^2 = \cos^2 \alpha \quad (5)$$

$$4m^2 = \frac{7}{8} + \frac{1}{8} \sin^2 \alpha \quad (6)$$

$$\text{de (4) et (6)} \Rightarrow \frac{1}{4} = \frac{\frac{1}{8} + \frac{7}{8} \sin^2 \alpha}{\frac{7}{8} + \frac{1}{8} \sin^2 \alpha} = \frac{1 + 7 \sin^2 \alpha}{7 + \sin^2 \alpha}$$

$$\Rightarrow 7 + \sin^2 \alpha = 4 + 28 \sin^2 \alpha \Rightarrow \sin^2 \alpha = \frac{1}{9} \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{8}{9}$$

$$1) \cos^2 \beta = \frac{1}{8} \text{ et } \sin^2 \beta = \frac{7}{8} \Rightarrow \cos \beta = \pm \frac{\sqrt{2}}{4} \text{ et } \sin \beta = \pm \frac{\sqrt{14}}{4}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \beta = 69.2952 + k 180 \\ \beta = 110.7048 + k 180 \end{cases}$$

$$2) \sin^2 \alpha = \frac{1}{9} \text{ et } \cos^2 \alpha = \frac{8}{9} \Rightarrow \sin \alpha = \pm \frac{1}{3} \Rightarrow \cos \alpha = \pm \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = 19.4712 + k 180 \\ \alpha = 160.5288 + k 180 \end{cases}$$

Le lecteur représentera les solutions sur le cercle trigonométrique.

Solution proposée par Robert Moulan

$$(4) \rightarrow 4 \cos^2 \beta + 4 \sin^2 \alpha \cdot \sin^2 \beta = \cos^2 \alpha = \sin^2 \beta + \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \beta$$

Choisissons de ne garder que $\sin^2 \beta$ et $\cos^2 \alpha$.

$$4 - 4 \sin^2 \beta + 4(1 - \cos^2 \alpha) \cdot \sin^2 \beta = \cos^2 \alpha = \sin^2 \beta + (1 - \cos^2 \alpha)(1 - \sin^2 \beta)$$

$$4 - \cancel{4 \sin^2 \beta} + \cancel{4 \sin^2 \beta} - 4 \cos^2 \alpha \cdot \sin^2 \beta = \cos^2 \alpha = \cancel{\sin^2 \beta} + 1 - \cos^2 \alpha - \cancel{\sin^2 \beta} + \cos^2 \alpha \cdot \sin^2 \beta$$

$$4 - 4 \cos^2 \alpha \cdot \sin^2 \beta = \cos^2 \alpha = +1 - \cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha \cdot \sin^2 \beta$$

Soit en posant : $C = \cos^2 \alpha$ et $S = \sin^2 \beta$

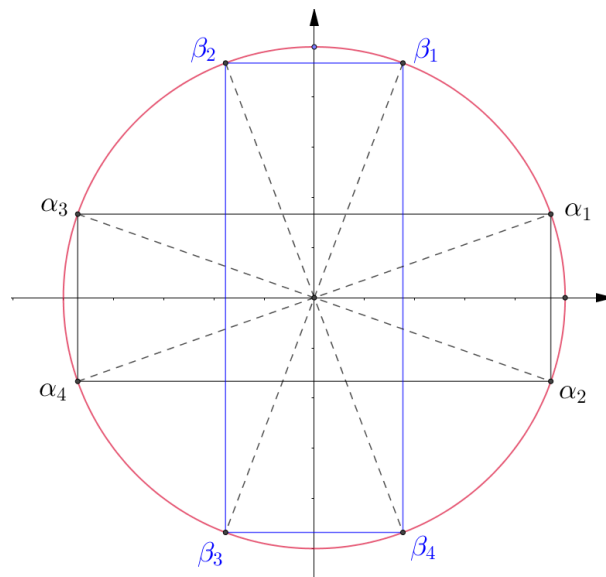
$$4 - 4C.S = C = 1 - C + C.S \quad (5) \Rightarrow \begin{cases} 4 - 4C.S = C & (6) \\ C = 1 - C + C.S & (7) \end{cases}$$

$$(7) \Rightarrow C.S = 2C - 1 \Rightarrow (6) \Rightarrow 4 - 8C + 4 = C \Rightarrow C = \frac{8}{9} = \cos^2 \alpha$$

$$\bullet \cos \alpha = \pm \frac{2\sqrt{2}}{3} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \pm 19^\circ 28' 16'' + 360^\circ \cdot k \\ \alpha = \pm 160^\circ 31' 44'' + 360^\circ \cdot k \end{cases}$$

$$(5) \Rightarrow 4 - \frac{32}{9}S = \frac{8}{9} \Rightarrow S = \frac{7}{8}$$

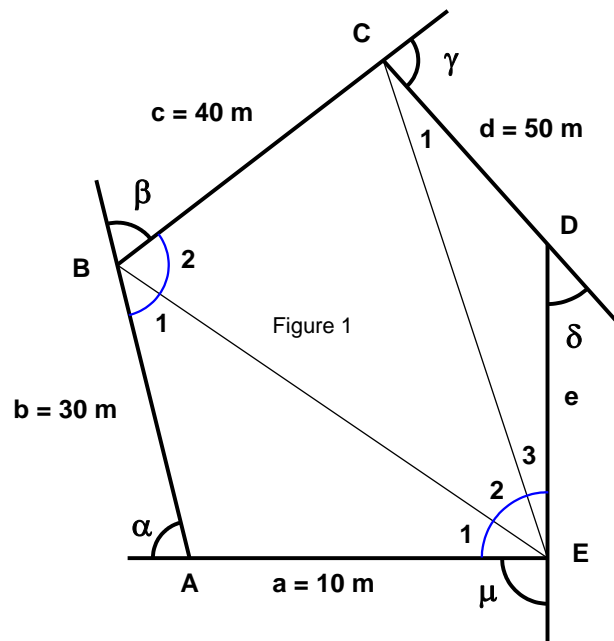
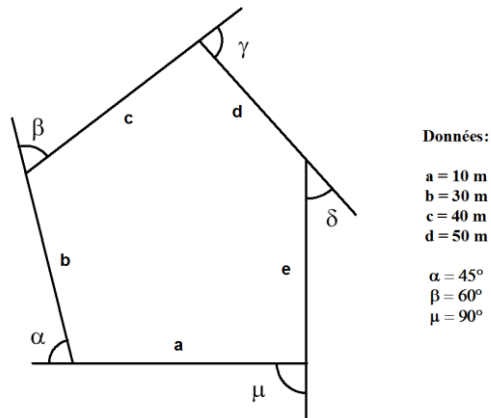
$$\bullet \sin \beta = \pm \frac{\sqrt{14}}{4} \Rightarrow \begin{cases} \beta = \begin{cases} 69^\circ 17' 43'' + 360^\circ \cdot k \\ 110^\circ + 42' 17'' + 360^\circ \cdot k \end{cases} \\ \beta = \begin{cases} -69^\circ 17' 43'' + 360^\circ \cdot k \\ 249^\circ 17' 43'' + 360^\circ \cdot k \end{cases} \end{cases}$$



Modifié le 2 février 2018 (Robert Moulan)

EXTRI056 – FACSA, ULG, Liège, juillet 2001.

Un pentagone volontairement déformé est défini comme sur la figure ci-dessous.
Calculer γ , δ , $(\alpha + \beta + \gamma + \delta)$, le périmètre et la surface du pentagone.



Première méthode (Voir figure 1)

$$BE^2 = 10^2 + 30^2 - 2 \times 10 \times 30 \times \cos 135^\circ \Rightarrow BE = 37.7394 \text{ m}$$

$$\sin B_1 = \frac{10 \cdot \sin 135^\circ}{37.7394} \Rightarrow B_1 = 10.7991^\circ \Rightarrow B_2 = 109.2009^\circ$$

$$E_1 = 180^\circ - 135^\circ - 10.7991^\circ = 34.2009^\circ$$

$$EC^2 = 40^2 + 37.7394^2 - 2 \times 37.7394 \times 40 \times \cos 109.2009^\circ \Rightarrow EC = 63.3815 \text{ m}$$

$$\sin \widehat{E_2} = \frac{40 \times \sin 109.2009^\circ}{63.3815} \Rightarrow \widehat{E_2} = 36.5834^\circ \Rightarrow \widehat{E_3} = 19.2157^\circ$$

$$\sin \widehat{D} = \frac{63.3815 \times \sin 19.2157^\circ}{50} \Rightarrow \begin{cases} \widehat{D} = 155.3415^\circ \Rightarrow \boxed{\delta = 24.6585^\circ} \\ \widehat{D} = 24.6585^\circ \Rightarrow \boxed{\delta = 155.3415^\circ} \end{cases}$$

Or $\alpha + \beta + \gamma + \delta + \mu = 360^\circ$ (Somme des angles extérieurs d'un polygone).

$$\rightarrow \boxed{\gamma = 140.3415^\circ} \text{ ou } \boxed{\gamma = 9.6585^\circ}$$

Premier cas : $\delta = 24.6585^\circ$ et $\gamma = 140.3415^\circ$

$$\widehat{C_1} = 180 - \widehat{E_3} - \widehat{D} = 180^\circ - 19.2157^\circ - 155.3415^\circ = 5.4428^\circ$$

$$ED = \frac{63.3815 \times \sin 5.4428^\circ}{\sin 155.3415} = 14.4097 \text{ m}$$

$$\text{Périmètre : } 10 + 30 + 40 + 50 + 14.4097 = \boxed{144.4097 \text{ m}}$$

Surface : C'est la somme des triangles ABE , EBC et ECD

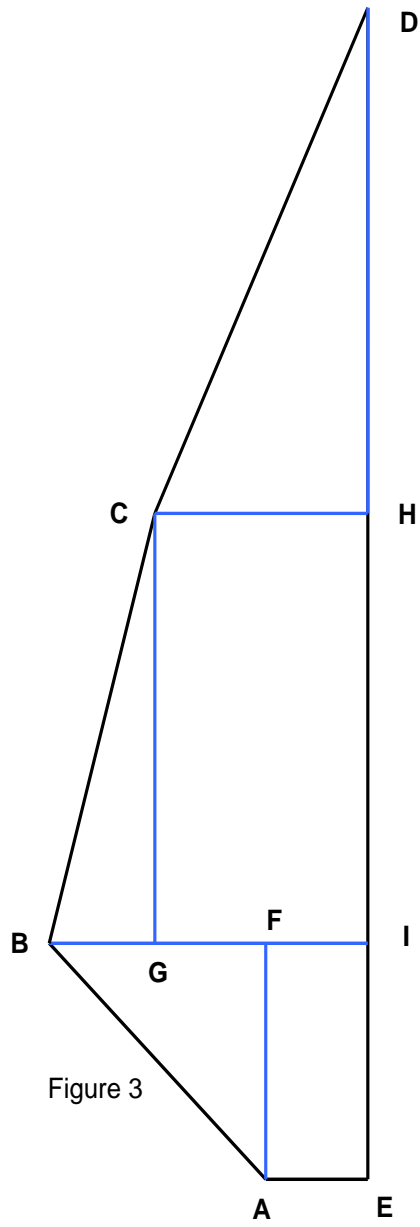
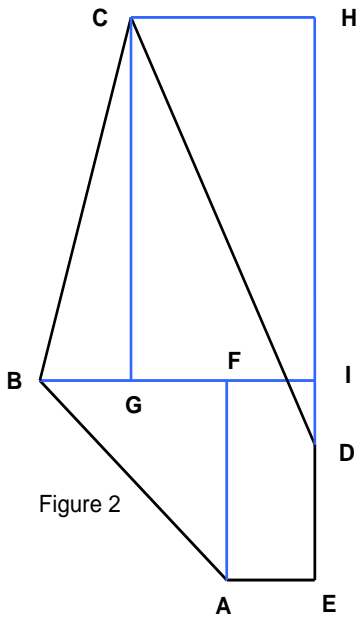
$$\frac{1}{2} \left\{ \begin{array}{l} 30 \times 10 \times \sin 135^\circ \\ + 37.7394 \times 63.3815 \times \sin 36.5833^\circ \\ + 50 \times 14.4097 \times \sin 155.3415^\circ \end{array} \right\} = \boxed{969.1615 \text{ m}^2}$$

Deuxième cas : $\delta = 155.3415^\circ$ et $\gamma = 9.6585^\circ$

On trouvera :

$$\widehat{C_1} = 136.1258^\circ \quad ED = 105.2908 \text{ m}$$

$$\text{Périmètre : } 235.2908 \text{ m} \quad \text{Surface : } 1917.0712 \text{ m}^2$$



Deuxième méthode

Solution proposée par l'ULG :

$$\triangle ABF \rightarrow AF = AB \cos 45 = \frac{30\sqrt{2}}{2} = FB$$

$$\triangle BGC \rightarrow GBC = 180^\circ - 60^\circ - 45^\circ = 75^\circ$$

$$\rightarrow BG = BC \cos 75^\circ = 40 \cos 75^\circ \quad \text{et} \quad GC = BC \sin 75^\circ = 40 \sin 75^\circ$$

$$CH = AE + FB - BG = 10 + 30 \frac{\sqrt{2}}{2} - 40 \cos 75^\circ$$

Soit ζ l'angle $HCE \rightarrow CH = CD \cos \zeta$

$$\rightarrow \cos \zeta = \frac{10 + 30 \frac{\sqrt{2}}{2} - 40 \cos 75^\circ}{50} = 0.4172 \rightarrow \zeta = \pm 65.3415^\circ$$

Le point D peut être situé au -dessus (Figure 3) ou en -dessous de la ligne CH .

On peut tenir compte des deux solutions en donnant à ζ le signe positif pour le dessus et le signe négatif pour le dessous.

$$DE = AF + GC + CD \sin \zeta = 30 \frac{\sqrt{2}}{2} + 40 \sin 75^\circ + \sin \zeta = \begin{cases} 14.4097 \text{ m} \\ 105.2908 \text{ m} \end{cases}$$

$$\rightarrow \gamma = 75 \pm \zeta = \begin{cases} 140.3415^\circ \\ 9.6585^\circ \end{cases} \rightarrow \text{Périmètre} = 130 + DE = \begin{cases} 144.4097 \text{ m} \\ 235.2908 \text{ m} \end{cases}$$

Surface = Aire du trapèze $BIEA$ + Aire du trapèze $BCHD$ \pm Aire du triangle CHD

$$\text{Surface} = \frac{(10+FB+10)AF}{2} + \frac{(10+FB+CH)GC}{2} \pm \frac{CH \cdot HD}{2}$$

$$\text{Surface} = \begin{cases} 969.1636 \text{ m}^2 \\ 1917.0712 \text{ m}^2 \end{cases}$$

La somme des angles extérieurs d'un polygone vaut 360°

$$\rightarrow \alpha + \beta + \gamma + \delta = 360 - \mu = 270^\circ$$

$$\rightarrow \delta = 270^\circ - (\alpha + \beta + \gamma) = \begin{cases} 24.6985^\circ \\ 155.3415^\circ \end{cases}$$

EXTRI057 – Liège, septembre 2001.

Vérifier l'identité suivante :

$$\sin 3a = 4 \sin(60^\circ - a) \sin a \sin(60^\circ + a)$$

$$\begin{aligned} & 4 \sin(60 - a) \sin a \sin(60 + a) \\ &= 2 \sin(60 + a) [2 \sin(60 - a) \sin a] \\ &= 2 \sin(60 + a) [-\cos(60 - 2a) + \cos 60] \quad (1) \\ &= \sin(60 + a) - 2 \sin(60 + a) \cos(60 - 2a) \quad (2) \\ &= \sin(60 + a) - \sin(120 - a) + \sin 3a \\ &= \sin 3a \quad (3) \end{aligned}$$

$$(1) \text{ Rappel : } 2 \sin \alpha \sin \beta = \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)$$

$$(2) \cos 60 = \frac{1}{2}$$

$$(3) \sin(60 + a) = \sin(180 - 60 - a) = \sin(120 - a)$$

EXTRI058 – Liège, septembre 2001.

Résoudre l'équation suivante :

$$\tan x + \cot x + \sec x + \operatorname{cosec} x = -2$$

$$\tan x + \cot x + \sec x + \operatorname{cosec} x = -2$$

$$CE : x \neq \pm \frac{\pi}{2} \quad x \neq \pi \quad x \neq 0$$

$$\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} + \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x} = -2$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x + \cos x + \sin x = -2 \sin x \cos x$$

$$(\sin x + \cos x)^2 + \cos x + \sin x = 0$$

$$(\sin x + \cos x)(\cos x + \sin x + 1) = 0$$

$$1) \sin x + \cos x = 0 \rightarrow \tan x = -1 \rightarrow \boxed{x = -\frac{\pi}{4} + k\pi}$$

$$2) \cos x + \sin x = -1 \quad (\text{Voir rappel})$$

$$\tan \phi = 1 \rightarrow \phi = \frac{\pi}{4} \rightarrow \cos \phi = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -1 \rightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$a) x - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \rightarrow x = 2k\pi \quad \text{à rejeter.}$$

$$b) x - \frac{\pi}{4} = -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi \rightarrow x = \pi + 2k\pi \quad \text{à rejeter.}$$

Rappel : Soit l'équation $a \cos x + b \sin x = c$

$$\text{Alors : } \frac{a}{\cos \varphi} \cos(x - \varphi) = c \quad \text{avec} \quad \tan \varphi = \frac{b}{a}$$

EXTRI059 – Liège, septembre 2001.

Soit un trapèze ABCD, CD étant parallèle à AB.

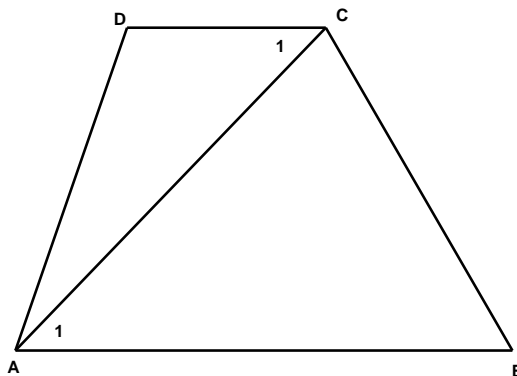
L'angle en B est de 60 degrés.

On donne également $AB = 20$ cm, $BC = 15$ cm et $CD = 8$ cm

Calculer :

- le périmètre
- la surface
- les angles intérieurs

du trapèze.



$$AC^2 = 15^2 + 20^2 - 2 \times 15 \times 20 \times \cos 60^\circ \rightarrow AC = 18,0278 \text{ cm}$$

$$\sin A_1 = \sin 60 \frac{15}{18,0278} \rightarrow A_1 = 46,1020^\circ \rightarrow C_1 = 46,1020^\circ$$

$$\rightarrow C_2 = 180 - 60 - 46,1020 = 73,8980^\circ$$

$$\boxed{C = 120^\circ} \text{ (complémentaire de } B)$$

$$DA^2 = 8^2 + 18,0278^2 - 2 \times 8 \times 18,0278 \times \cos 46,1020 \rightarrow DA = 13,7478 \text{ cm}$$

$$\sin D = \sin 46,1020 \frac{18,0278}{13,7478} \rightarrow \boxed{D = 109,3309^\circ}$$

$$A = 360 - 120 - 60 - 109,3309 \rightarrow \boxed{A = 70,6691^\circ}$$

$$\text{Périmètre} = 20 + 15 + 8 + 13,7478 = 56,7478 \text{ cm}$$

$$\text{Surface} = \frac{1}{2} \times 15 \times 20 \times \sin 60 + \frac{1}{2} \times 8 \times 13,7478 \times \sin 109,3309$$

$$= \boxed{181,7947 \text{ cm}^2}$$