Exercices résolus de mathématiques.

Trigonométrie
Calcul numérique

TRI 6

EXTRI060 – EXTRI069

http://www.matheux.be.tf

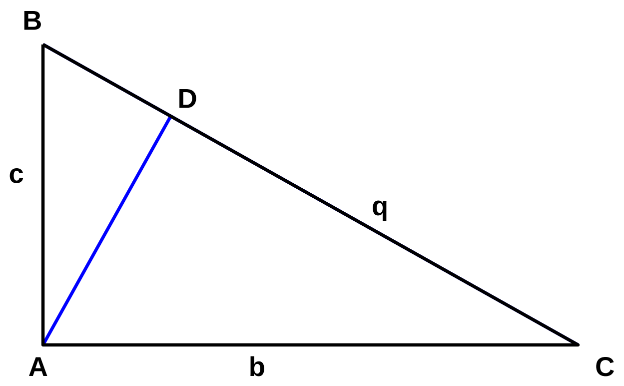
Jacques Collot

1 avril 03

EXTRI060 – FPMS, Mons, questions posées de 1995 à 1998.
FSA, UCL, Louvain, juillet 2004 et septembre 07
FACS, ULB, Bruxelles, septembre 2006

Dans un triangle *ABC* rectangle en *A*, on trace la hauteur *AD*. Si on pose *BD* = *p* et *DC* = *q*, démontrer que

$$\cos 2B = \frac{p-q}{p+q}$$

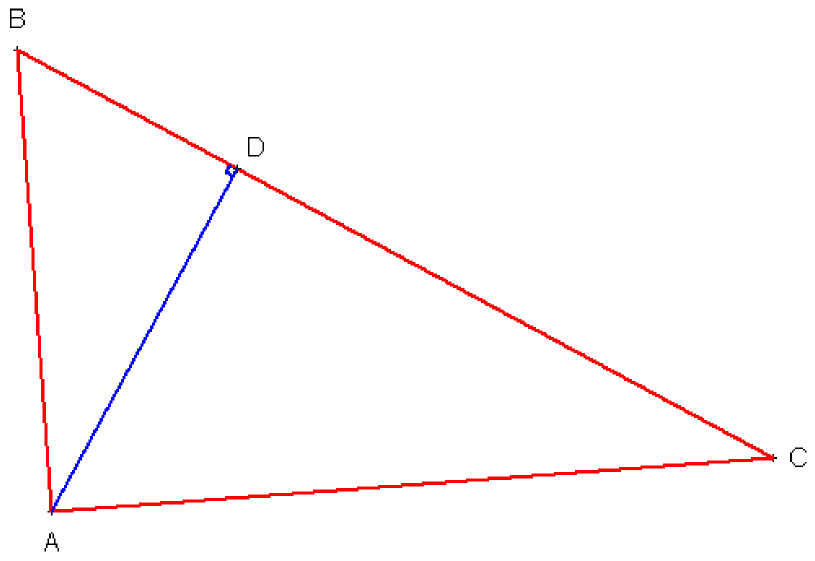


$$p = c\cos B; \quad q = b\cos C; \quad b = c\tan B; \quad C = \frac{\pi}{2} - B$$

$$\frac{p-q}{p+q} = \frac{c\cos B - b\cos C}{c\cos B + b\cos C} = \frac{\cos B - \frac{b}{c}\cos\left(\frac{\pi}{2} - B\right)}{\cos B + \frac{b}{c}\cos\left(\frac{\pi}{2} - B\right)}$$

$$= \frac{\cos B - \tan B\sin B}{\cos B + \tan B\sin B} = \frac{\cos^2 B - \sin^2 B}{\cos^2 B + \sin^2 B} = \cos 2B$$

Méthode proposée par Steve Tumson



$$\cos B = \frac{p}{AB} = \frac{AB}{p+q} \iff AB^2 = p(p+q)$$

$$\sin B = \frac{AC}{p+q} = \frac{AD}{AB} \iff AB = \frac{AD}{AC}(p+q)$$

$$\Rightarrow p(p+q) = \left(\frac{AD}{AC}\right)^2 (p+q)^2 \iff \frac{p}{(p+q)} = \left(\frac{AD}{AC}\right)^2$$

Or

$$\sin C = \frac{AD}{AC} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - B\right) = \cos B$$

$$\Rightarrow \frac{p}{p+q} = \cos^2 B \iff \frac{p}{p+q} = \frac{1+\cos 2B}{2} \iff \frac{2p}{p+q} - 1 = \cos 2B \iff \boxed{\frac{p-q}{p+q} = \cos 2B}$$

Résoudre l'équation trigonométrique suivante :

$$4\cos^2 x-\sqrt{3}\sin x\cos x+3\sin^2 x=4$$

et représenter les solutions sur le cercle trigonométrique

<u>METHODE 1</u>

$$4\cos^2 x-\sqrt{3}\sin x\cos x+3\sin^2 x=4$$
$$4\cos^2 x-\sqrt{3}\sin x\cos x+3\sin^2 x=4\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)$$
$$-\sqrt{3}\sin x\cos x-\ \sin^2 x=0$$
$$\sin x\,(\sin x+\sqrt{3}\cos x)=0$$

Solutions:

1) $\sin x=0 \ \rightarrow\ \boxed{x=k\,\pi}$

2) $\sin x+\sqrt{3}\cos x=0\ \rightarrow\ \tan x=-\frac{1}{\sqrt{3}}\ \rightarrow\ \boxed{x=-\frac{\pi}{3}+k\,\pi}$

Le lecteur représentera les solutions sur le cercle.

<u>METHODE 2</u>

$$4\cos^2 x\quad-\sqrt{3}\sin x\cos x+3\sin^2 x\quad=4$$
$$4\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)-\sqrt{3}\,\frac{1}{2}\sin 2x\ +3\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)=4$$
$$\frac{1}{2}\cos 2x-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x=\frac{1}{2}$$
$$\cos 2x\ -\ \sqrt{3}\sin 2x\ =1$$
$$\cos 2x-\tan\frac{\pi}{3}\sin 2x=1$$
$$\cos 2x\cos\frac{\pi}{3}-\sin\frac{\pi}{3}\sin 2x=\cos\frac{\pi}{3}$$
$$\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\frac{\pi}{3}$$

Solutions

1) $2x+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{3}+k\,2\pi\ \ \square\rightarrow\ \boxed{x=k\pi}$

2) $2x+\frac{\pi}{3}=-\frac{\pi}{3}+k\,2\pi\ \rightarrow\ \boxed{x=-\frac{\pi}{3}+k\pi}$

EXTRI062 – Mons, questions posées de 1995 à 1998.

Démontrer que

$$\tan(a+b) = \frac{\sin^2 a - \sin^2 b}{\sin a \cos a - \sin b \cos b}$$

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b} = \frac{\sin a \cos b + \sin b \cos a}{\cos a \cos b - \sin a \sin b}$$

$$= \frac{\sin a \cos b + \sin b \cos a}{\cos a \cos b - \sin a \sin b} \; \frac{\sin a \cos b - \sin b \cos a}{\sin a \cos b - \sin b \cos a}$$

$$= \frac{\sin^2 a \cos^2 b - \sin^2 b \cos^2 a}{(\cos a \cos b - \sin a \sin b)\;(\sin a \cos b - \sin b \cos a)} = \frac{N}{D}$$

$$N = \sin^2 a \cos^2 b - \sin^2 b \cos^2 a = \sin^2 a\left(1 - \sin^2 b\right) - \sin^2 b\left(1 - \sin^2 a\right)$$

$$= \sin^2 a - \sin^2 b$$

$$D = (\cos a \cos b - \sin a \sin b)\;(\sin a \cos b - \sin b \cos a)$$

$$= \sin a \cos a \cos^2 b - \sin^2 a \sin b \cos b - \cos^2 a \cos b \sin b + \sin a \sin^2 b \cos a$$

$$= \sin a \cos a - \sin b \cos b$$

EXTRI063 – POLYTECH, Umons, Mons, questions posées de 1995 à 1998.
FACSA, ULG, Liège, juillet 2013.

Enoncé de POLYTECH

Démontrer que le triangle ABC est rectangle si on a

$$\tan\frac{B}{2}=\frac{b}{a+c}$$

Enoncé de FACSA

Démontrer que, si dans un triangle l'identité suivante est vérifiée

$$\frac{1}{\sin\beta}+\cot\beta=\frac{a+c}{b}$$

alors ce triangle est rectangle (a, b et c désignent les longueurs des côtés opposés aux angles α, β et γ respectivement).

POLYTECH

On a : $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=K$

$$\Rightarrow \frac{b}{a+c}=\frac{K\sin B}{K\sin A+K\sin C}=\frac{\sin B}{\sin A+\sin C}=\frac{2\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}}{2\sin\frac{A+C}{2}\cos\frac{A-C}{2}}$$

Dans un triangle; $A+B+C=\pi \Rightarrow A+C=\pi-B$

Donc $\sin\dfrac{A+C}{2}=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{B}{2}\right)=\cos\dfrac{B}{2}\Rightarrow \dfrac{b}{a+c}=\dfrac{\sin\frac{B}{2}}{\cos\frac{A-C}{2}}$

D'autre part: $\tan\dfrac{B}{2}=\dfrac{\sin\frac{B}{2}}{\cos\frac{B}{2}}$

On en déduit que : $\cos\dfrac{B}{2}=\cos\dfrac{A-C}{2} \Rightarrow \pm\dfrac{B}{2}=\dfrac{A-C}{2} \Rightarrow \pm B=A-C$

1) Soit $B=A-C\Rightarrow B=\pi-B-C-C\Rightarrow B+C=\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow A=\dfrac{\pi}{2}$

2) Soit $-B=A-C\Rightarrow -B=\pi-B-C-C\Rightarrow C=\dfrac{\pi}{2}$.

Le triangle ABC est donc rectangle.

FACSA

On a $\dfrac{1}{\sin\beta}+\cot\beta=\dfrac{1+\cos\beta}{\sin\beta}$, or $\cot\dfrac{\beta}{2}=\dfrac{\cos\frac{\beta}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}}=\dfrac{\cos\frac{\beta}{2}}{\frac{\sin\beta}{2\cos\frac{\beta}{2}}}=\dfrac{2\cos^2\frac{\beta}{2}}{\sin\beta}=\dfrac{1+\cos\beta}{\sin\beta}$

Autrement dit : $\dfrac{1}{\sin\beta}+\cot\beta=\cot\dfrac{\beta}{2}$, ce qui nous ramène à l'énoncé de POLYTECH

Modifié le 16 mai 2014

EXTRI064 – Mons, questions posées de 1995 à 1998.

Si

$$m \sin B = n \sin\left(2A + B\right)$$

Montrer que

$$\tan A = \frac{m-n}{m+n} \tan\left(A+B\right)$$

$$m \sin B = n \sin\left(2a + B\right) \rightarrow \frac{m}{n} = \frac{\sin\left(2A+B\right)}{\sin B}$$

Or dans une proportion : $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \rightarrow \frac{a-b}{a+b} = \frac{c-d}{c+d}$

$$\rightarrow \frac{m-n}{m+n} = \frac{\sin\left(2A+B\right) - \sin B}{\sin\left(2A+B\right) + \sin B} = \frac{2\sin A \cos\left(A+B\right)}{2\sin\left(A+B\right)\cos A} = \frac{\tan A}{\tan\left(A+B\right)}$$

$$\rightarrow \tan a = \frac{m-n}{m+n} \tan\left(A+B\right)$$

EXTRI065 – Mons, questions posées de 1995 à 1998.

Résoudre l'équation trigonométrique suivante :

$$\cos 2x = \sqrt{2}\left(\sin^3 x + \cos^3 x - \sin^2 x\ \cos x - \sin x \cos^2 x\right)$$

et représenter les solutions sur le cercle trigonométrique

$$\begin{aligned}
\cos 2x &= \sqrt{2}\left(\sin^3 x + \cos^3 x - \sin^2 x \cos x - \sin x \cos^2 x\right)\\
&= \sqrt{2}\left(\sin^2 x\left(\sin x - \cos x\right) + \cos^2 x\left(\cos x - \sin x\right)\right)\\
&= \sqrt{2}\left(\sin x - \cos x\right)\left(\cos^2 x - \sin^2 x\right)\\
&= \sqrt{2}\left(\sin x - \cos x\right)\cos 2x
\end{aligned}$$

Solutions

1) $\cos 2x = 0 \;\rightarrow\; \boxed{x = \pm\frac{\pi}{4} + k\pi}$

2) $\cos x - \sin x = \frac{1}{\sqrt{2}} \;\rightarrow\; \cos x - \tan\frac{\pi}{4}\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\cos\frac{\pi}{4}\cos x - \sin\frac{\pi}{4}\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{\pi}{4}$$

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$$

$$x + \frac{\pi}{4} = \pm\frac{\pi}{3} + k\,2\pi$$

$$\rightarrow \boxed{x = \frac{\pi}{12} + k\,2\pi} \quad et \quad \boxed{x = -\frac{7\pi}{12} + k\,2\pi}$$

EXTRI066 – Mons, questions posées de 1995 à 1998.

Résoudre un triangle sachant que ses angles sont en progression arithmétique, que le produit de leur sinus vaut

$$\frac{3+\sqrt{3}}{8}$$

et que le périmètre vaut 12 mètres.

$A+B+C=180°$

Si x est la raison aritmétique, on peut écrire :

$A=B-x$ et $C=B+x \rightarrow B-x+B+B+x=180° \rightarrow B=60°$

D'autre part :

$$\sin A \sin B \sin C = \sin(60-x)\sin 60 \sin(60+x)$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{2}\left[\cos(60-x-60-x)-\cos(60-x+60+x)\right]$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{4}\left[\cos(-2x)-\cos 120\right] = \frac{\sqrt{3}}{4}\left[\cos 2x+\frac{1}{2}\right]$$

Donc $\frac{\sqrt{3}}{4}\left[\cos 2x+\frac{1}{2}\right]=\frac{3+\sqrt{3}}{8} \rightarrow \cos 2x = \frac{1}{\sqrt{3}}\left[\frac{3+\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right]=\frac{\sqrt{3}}{2}$

Solutions:

1) $2x=30° \rightarrow x=15° \rightarrow A=45°;\ B=60°;\ C=75°$

2)$2x=-30° \rightarrow x=-15°$ (solution à rejeter)

De : $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$

$$\rightarrow a+b+c=a+\frac{a\sin B}{\sin A}+\frac{a\sin C}{\sin A}=a\left(\frac{\sin A+\sin B+\sin C}{\sin A}\right)$$
$$=a\left(\frac{\sin A+\sin B+\sin C}{\sin A}\right)=a\frac{\sin 45+\sin 60+\sin 75}{\sin 45}$$

Par conséquent : $3.5908\, a=12 \rightarrow \boxed{a=3,342\, m}$

De même, on a

$$a+b+c=b\left(\frac{\sin A+\sin B+\sin C}{\sin B}\right)=c\left(\frac{\sin A+\sin B+\sin C}{\sin C}\right)$$

D'où, on pourra déduire: $\boxed{b=4.093\, m}$ *et* $\boxed{c=4.5650\, m}$

EXTRI067 – Mons, questions posées de 1995 à 1998.

Montrer que le triangle ABC est rectangle si ses angles vérifient la relation :

$$\tan B = \frac{\cos(C-B)}{\sin A + \sin(C-B)}$$

CE : $\cos B \neq \frac{\pi}{2}$ (A cause de $\tan B$)

$A+B+C=180° \rightarrow \sin A = \sin(B+C)$ *et* $\sin(B+C)+\sin(C-B) = 2\sin C \cos B$

$\rightarrow \dfrac{\cos(C-B)}{\sin A+\sin(C-B)} = \dfrac{\cos C \cos B + \sin C \sin B}{2\sin C \cos B}$

$\rightarrow \tan B = \dfrac{\sin B}{\cos B} = \dfrac{\cos C \cos B + \sin C \sin B}{2\sin C \cos B}$

$$2\sin C \cos B \sin B = \cos B\left(\cos C \cos B + \sin C \sin B\right)$$

$$0 = \cos B\left(\cos C \cos B - \sin C \sin B\right)$$

Solutions

1) $\cos B = 0 \rightarrow B = \frac{\pi}{2}$ A rejeter à cause de la CE

2) $\sin B \sin C - \cos C \cos B = 0 \rightarrow \cos(B+C)=0 \rightarrow B+C = \frac{\pi}{2} \rightarrow A = \frac{\pi}{2}$

Corrigé le 3 avril 06 (Sabine Bouzette)

EXTRI068 – Mons, questions posées de 1995 à 1998.

Résoudre l'équation trigonométrique suivante :

$$\sin 5x + \sin x + 2\sin^2 x = 1$$

et représenter sur les solutions le cercle trigonométrique.

$$\sin 5x \quad + \sin x = 1 - 2\sin^2 x$$

$$2\sin 3x \cos 2x = \cos 2x$$

$$\cos 2x\,(2\sin 3x - 1) = 0$$

Solutions

$a)$ $\cos 2x = 0 \rightarrow$

1) $2x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \quad \rightarrow \quad \boxed{x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi}$

2) $2x = -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \quad \rightarrow \quad \boxed{x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi}$

$b)$ $\sin 3x = \dfrac{1}{2}$

1) $3x = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \rightarrow \quad \boxed{x = \dfrac{\pi}{18} + k\dfrac{2\pi}{3}}$

2) $3x = \dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi \quad \rightarrow \quad \boxed{x = \dfrac{5\pi}{18} + k\dfrac{2\pi}{3}}$

EXTRI069 – Polytech, UMons, Mons, questions posées de 1995 à 1998. EPL, UCL, Louvain, septembre 2001. FACS, ULB, Bruxelles, septembre 2011.

Montrer que le triangle ABC est rectangle si ses angles vérifient la relation

$$\sin A - \cos A = \cos B - \sin B$$

METHODE 1

$$\sin A \tan\frac{\pi}{4} - \cos A \qquad = \cos B - \sin B \tan\frac{\pi}{4}$$

$$\sin A \sin\frac{\pi}{4} - \cos A \cos\frac{\pi}{4} = \cos B \cos\frac{\pi}{4} - \sin B \sin\frac{\pi}{4}$$

$$\cos\left(A + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(B + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\cos\left(\pi - A - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(B + \frac{\pi}{4}\right)$$

Il vient:

$$\begin{cases} \pi - A - \dfrac{\pi}{4} = B + \dfrac{\pi}{4} \\ A + B = \pi - \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2} \\ C = \pi - A - B = \dfrac{\pi}{2} \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \pi - A - \dfrac{\pi}{4} = -B - \dfrac{\pi}{4} \\ A = \pi + B \\ \text{Impossible car } 0 < A;\ B < \pi \end{cases}$$

METHODE 2

$$\sin A - \cos A = \cos B - \sin B$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - A\right) - \cos A = \cos B - \cos\left(\frac{\pi}{2} - B\right)$$

$$-2\sin\frac{\pi}{4}\sin\left(\frac{\pi}{4} - A\right) = -2\sin\frac{\pi}{4}\sin\left(-\frac{\pi}{4} + B\right)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} - A\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{4} + B\right)$$

Il vient:

$$\begin{cases} \dfrac{\pi}{4} - A = -\dfrac{\pi}{4} + B \\ A + B = \dfrac{\pi}{2} \\ C = \pi - A - B = \dfrac{\pi}{2} \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \dfrac{\pi}{4} - A = \dfrac{5\pi}{4} - B \\ B - A = \pi \\ \text{Impossible car } 0 < A;\ B < \pi \end{cases}$$

METHODE 3

$\sin A - \cos A = \cos B - \sin B$

$\sin A + \sin B = \cos A + \cos B$

$2\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right) = 2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$

$\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)\left[\cos\left(\frac{A+B}{2}\right) - \sin\left(\frac{A+B}{2}\right)\right] = 0$

Il vient

$$\begin{cases} \cos\left(\frac{A-B}{2}\right) = 0 \\ \frac{A-B}{2} = \frac{\pi}{2} \\ A - B = \pi \\ \text{Impossible car } \; 0 < A; \;\; B < \pi \end{cases} \qquad \text{ou} \qquad \begin{cases} \cos\left(\frac{A+B}{2}\right) = \sin\left(\frac{A+B}{2}\right) \\ \frac{A+B}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{A+B}{2} \\ A + B = \frac{\pi}{2} \\ C = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$