Exercices résolus de mathématiques.

Trigonométrie
Calcul numérique

TRI 8

EXTRI080 – EXTRI089

http://www.matheux.be.tf

Jacques Collot

Janvier 04

EXTRI080 – Bruxelles, septembre 2000.

a) Pour quelle(s) valeur(s) réelle(s) de m le système (l'inconnue est m)

$$\begin{cases} m\sin x + \cos x = 1+m \\ \sin x + m\cos x = 1+m \end{cases} \qquad (S)$$

possède-t-il des solutions ? Dans ce(s) cas calculer ces solutions.

b) Représenter graphiquement

$$\left\{(\cos x, \sin x) \in \mathbb{R}^2 \mid x \text{ est solution de } (S)\right\}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} m & 1 \\ 1 & m \end{vmatrix} = (m-1)(m+1)$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 1+m & 1 \\ 1+m & m \end{vmatrix} = (m-1)(m+1)$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} m & 1+m \\ 1 & 1+m \end{vmatrix} = (m-1)(m+1)$$

$a)\ m = 1 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \sin x + \cos x = 2 \\ \sin x + \cos x = 2 \end{cases}$ Système impossible

$b)\ m = -1 \ \rightarrow \ \begin{cases} -\sin x + \cos x = 0 \\ \sin x - \cos x = 0 \end{cases} \ \rightarrow \ \sin x = \cos x \ \rightarrow \ \tan x = 1$

$\rightarrow \quad x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$

Dans les autres cas : $\begin{cases} \sin x = 1 \\ \cos x = 1 \end{cases}$ Système impossible.

Le lecteur représentera les solutions sur le cercle trigonométrique.

EXTRI081 – Bruxelles, juillet 2001.

1. Résoudre dans R l'équation :

$$\cos x+\sqrt{3}\sin x=1 \qquad (E)$$

2. Représenter graphiquement

$$\left\{(\cos x,\sin x)\in\mathbb{R}^2 \mid x \text{ est solution de } (E)\right\}$$

$$\tan\varphi=\sqrt{3}\ \rightarrow\ \varphi=60°\ \rightarrow\ \cos\varphi=\frac{\sqrt{3}}{2}\ \rightarrow\ \cos(x-60)=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\rightarrow\begin{cases}x-60=60+k360°\\ x-60=-60+k360°\end{cases}\ \rightarrow\ \begin{cases}x=120+k360°\\ x=k360\end{cases}$$

Le lecteur représentera les solutions sur le cercle trigonométrique.

EXTRI082 – FACS, ULB, Bruxelles, juillet 2001.

Dans un triangle ABC on a

$$a=\sqrt{6} \quad , \quad b=\sqrt{3} \quad \text{et} \quad c=1$$

1. Calculer

$$\cos A, \cos B, \sin A \text{ et } \sin B$$

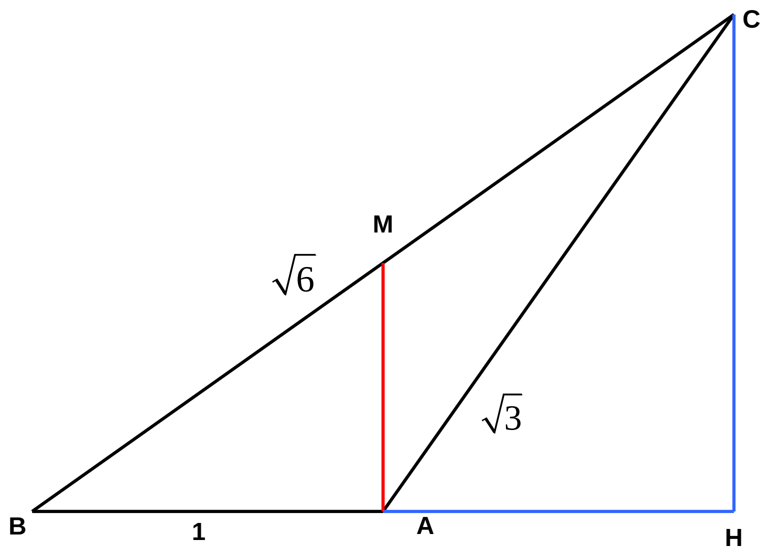
2. Démontrer que

$$A-B=\frac{\pi}{2}$$

3. Soit M le milieu du segment BC, calculer

$$\left|\overrightarrow{AM}\right|$$

et en déduire que la droite AM est perpendiculaire à la droite AB.



$a)\ \cos A = \dfrac{3+1-6}{2\sqrt{3}} = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$\cos B = \dfrac{6+1-3}{2\sqrt{6}} = \dfrac{4}{2\sqrt{6}} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$

Soit CH une hauteur : $AH = AC\cos(\pi - A) = \sqrt{3}\dfrac{\sqrt{3}}{3} = 1$

$\rightarrow\ CH = \sqrt{AC^2 - AH^2} = \sqrt{2} \quad \rightarrow\ \sin A = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$\sin A = \dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}}\sin A = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$

$b)\ \sin(A-B) = \sin A\cos B - \cos A\sin B = \dfrac{\sqrt{6}}{3}\dfrac{\sqrt{6}}{3} - \left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)\dfrac{\sqrt{3}}{3} = 1$

$\rightarrow\ A - B = \dfrac{\pi}{2}$

$c)\ AM^2 = \left(\dfrac{\sqrt{6}}{2}\right)^2 + 1 - 2\dfrac{\sqrt{6}}{2}\cos B = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

On en déduit que le triangle BMA est rectangle en A car : $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 1^2 = \left(\dfrac{\sqrt{6}}{2}\right)^2$

Note : Vu l'énoncé, (on ne demande pas de calculer les angles), il convient d'éviter de se servir de sa machine à calculer

EXTRI083 – Facs, ULB, Bruxelles, septembre 2001.
- EPL, UCL, LLN, septembre 2005

Si

$$a+b+c+d=2\pi$$

démontrer que

$$\sin a+\sin b+\sin c+\sin d=4\sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{b+2}{2}\sin\frac{a+c}{2}$$

Premier membre :

$\sin a+\sin b+\sin c+\sin d=\sin a+\sin b+\sin c-\sin\left(a+b+c\right)$

$=2\sin\frac{a+c}{2}\cos\frac{a-c}{2}-2\cos\frac{a+2b+c}{2}\sin\frac{a+c}{2}$

$=2\sin\frac{a+c}{2}\left(\cos\frac{a-c}{2}-\cos\frac{a+2b+c}{2}\right)$

$=2\sin\frac{a+c}{2}\left(-2\sin\frac{\frac{a-c}{2}+\frac{a+2b+c}{2}}{2}\sin\frac{\frac{a-c}{2}-\frac{a+2b+c}{2}}{2}\right)$

$=4\sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{b+c}{2}\sin\frac{a+c}{2}$

EXTRI084 – FACS, ULB, Bruxelles, juillet 2002.

Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation : $\sin^3 x + \cos^3 x = 1$

$$\sin^3 x + \cos^3 x = 1$$
$$\sin^3 x + \cos^3 x = \sin^2 x + \cos^2 x$$
$$\sin^2 x(\sin x - 1) + \cos^2 x(\cos x - 1) = 0$$
$$(1 - \cos^2 x)(\sin x - 1) + (1 - \sin^2 x)(\cos x - 1) = 0$$
$$(1 - \cos x)(1 + \cos x)(\sin x - 1) + (1 - \sin x)(1 + \sin x)(\cos x - 1) = 0$$
$$(1 - \cos x)(\sin x - 1)(2 + \cos x + \sin x) = 0$$

$a)\ 1 - \cos x = 0 \quad \rightarrow \quad x = 2k\pi$

$b)\ \sin x - 1 = 0 \quad \rightarrow \quad x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$

$c)\ 2 + \cos x + \sin x = 0$ Equation impossible

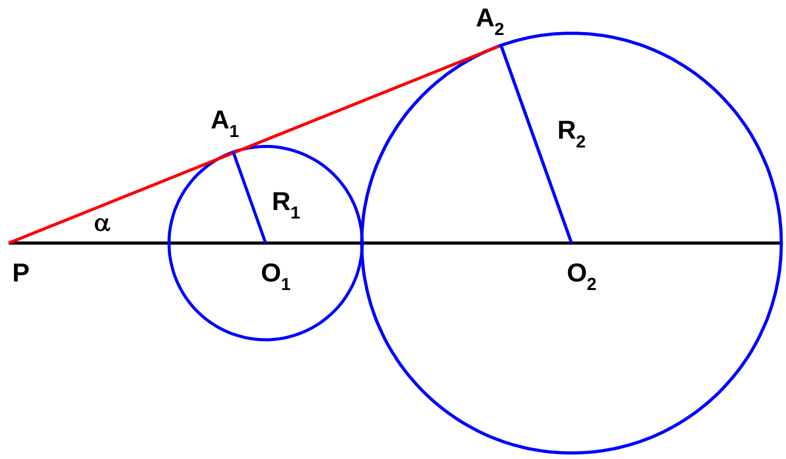
EXTRI085 – Bruxelles, juillet 2002.

Soient deux cercles de centres O_1 et O_2 et de rayons respectifs R_1 et R_2 ($0 < R_1 < R_2$), tangents extérieurement.

Soient A1 et A2 les points situés sur une des deux tangentes communes extérieurement à ces deux cercles tels que

$$R_1 = \left|\overrightarrow{O_1A_1}\right| \quad \text{et} \quad R_2 = \left|\overrightarrow{O_2A_2}\right|$$

1. Calculer sin α, où α est l'angle entre leux droites O1O2 et A1A2.
2. En déduire le rapport des rayons lorsque la mesure de α est 30°



$$a)\ PO_2 - PO_1 = R_1 + R_2$$

$$PO_1 = \frac{R_1}{\sin\alpha} \qquad PO_2 = \frac{R_2}{\sin\alpha}$$

$$\rightarrow \quad R_1 + R_2 = \frac{R_2}{\sin\alpha} - \frac{R_1}{\sin\alpha} \quad \rightarrow \quad \sin\alpha = \frac{R_2 - R_1}{R_1 + R_2}$$

$$b)\ \alpha = 30° \quad \rightarrow \quad \sin\alpha = \frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad R_1 + R_2 = 2R_2 - 2R_1$$

$$\rightarrow \quad \frac{R_2}{R_1} = 3$$

EXTRI086 – Bruxelles, septembre 2002.

Résoudre dans R^2 le système

$$\begin{cases} \sin x + \sin y = 1 \\ \cos x \,.\, \cos y = \dfrac{3}{4} \end{cases}$$

Vu que le système est symétrique en x et y, on peut se poser directement la question de savoir s'il existe une solution telle que $x = y$.

On vérifie effectivement : $\begin{cases} 2\sin x = 1 \quad \to \quad \sin x = \dfrac{1}{2} \quad \to \quad x = y = 60° \\ \cos^2 x = \dfrac{3}{4} \quad \to \cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \to \quad x = y = 60° \end{cases}$

Recherchons si le système possède d'autres solutions.

$$\begin{cases} \sin x + \sin y = 1 \\ \cos x \,.\, \cos y = \dfrac{3}{4} \end{cases} \to \begin{cases} \sin x = 1 - \sin y \\ \cos x = \dfrac{3}{4\cos y} \end{cases} \to \left(1 - \sin y\right)^2 + \frac{9}{16\cos^2 y} = 1$$

$$\to 1 - 2\sin y + \sin^2 y + \frac{9}{16\left(1 - \sin^2 y\right)} = 1$$

Posons $t = \sin y$. Après réarrangement on trouve :

$$P(t) = t^4 - 2t^3 - t^2 + 2t - \frac{9}{16} = 0$$

On vérifie que $\dfrac{1}{2}$ est bien une solution car $P\left(\dfrac{1}{2}\right) = 0$

Horner :

n	4	3	2	1	0
	1	-2	-1	2	$-\dfrac{9}{16}$
$\dfrac{1}{2}$		$\dfrac{1}{2}$	$-\dfrac{3}{4}$	$-\dfrac{7}{8}$	$\dfrac{9}{16}$
	1	$-\dfrac{3}{2}$	$-\dfrac{7}{4}$	$\dfrac{9}{8}$	0

$$\to \; P(t) = \left(t - \frac{1}{2}\right)\left(t^3 - \frac{3}{2}t^2 - \frac{7}{4}t + \frac{9}{8}\right)$$

Comme on a fait une élévation au carrée pour éliminer x, on peut se poser la question de savoir si $\dfrac{1}{2}$ n'est pas une racine double.

Effectivement, le deuxième facteur est nulle si $t=\frac{1}{2}$

Horner :

$$\begin{array}{c|ccc|c} n & 3 & 2 & 1 & 0 \\ \hline & 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{7}{4} & \frac{9}{8} \\ \frac{1}{2} & & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{9}{8} \\ \hline & 1 & -1 & -\frac{9}{8} & 0 \end{array}$$

$\rightarrow \ P(t)=\left(t-\frac{1}{2}\right)^2\left(t^2-t-\frac{9}{4}\right)$

Le deuxième facteur admet pour solutions $t=2.0811$ et $t=-1.081$ qui sont toutes les deux à rejeter.

Conclusion : $\boxed{x=y=60°}$

EXTRI087 – Bruxelles, septembre 2002.

Démontrer que si dans le triangle ABC on a

$$\cos 3A + \cos 3B + \cos 3C = 1$$

alors l'un des angles mesure 120°

$\cos 3A + \cos 3B + \cos 3C = 1$

$2\cos 3\dfrac{A+B}{2}\cos 3\dfrac{A-B}{2} = 1 - \cos 3C$

Or $\cos 3\dfrac{A+B}{2} = \cos 3\dfrac{\pi - C}{2} = \cos\left(\dfrac{3\pi}{2} - \dfrac{3C}{2}\right) = -\sin\dfrac{3C}{2}$

Et $1 - \cos 3C = 2\sin^2\dfrac{3C}{2}$

$\rightarrow -2\sin\dfrac{3C}{2}\cos 3\dfrac{A-B}{2} = 2\sin^2\dfrac{3C}{2}$

Cette équation admet une solution pour $\sin\dfrac{3C}{2} = 0$

$\rightarrow \dfrac{3C}{2} = 360° \rightarrow C = 240° = -120° \rightarrow |C| = 120°$

EXTRI088 – Louvain, juillet 1999.

Trouver, pour chacun des cas, les relatons qui existent entre *x* et *y* si on a :

a. $\cos 2x = \cos 2y$

b. $\tan^2 x = \tan^2 y$

c. $\sin^2 x + \sin^2 y = 1$

a) $\cos 2x = \cos 2y \quad \rightarrow \quad 2x = \pm 2y + 2k\pi \quad \rightarrow \quad x = \pm y + k\pi$

b) $\tan^2 x = \tan^2 y \quad \rightarrow \quad \tan x = \pm \tan y$

1) $\tan x = \tan y \quad \rightarrow \quad x = y + k\pi$

2) $\tan x = -\tan y \quad \rightarrow \quad x = -y + k\pi$

Finalement : $x = \pm y + k\pi$

c) $\sin^2 x + \sin^2 y = 1 \quad \rightarrow \sin^2 x + \sin^2 y = \sin^2 x + \cos^2 x$

$\rightarrow \quad \sin^2 y = \cos^2 x \quad \rightarrow \sin^2 y = \sin^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \quad \rightarrow \quad \sin y = \pm \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

1) $\sin y = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \quad \rightarrow \quad y = \frac{\pi}{2} - x + 2k\pi$ et $y = \frac{\pi}{2} + x + 2k\pi$

2) $\sin y = -\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \rightarrow \sin y = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

$\rightarrow \quad y = x - \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ et $y = \frac{3\pi}{2} - x + 2k\pi$

Finalement : $y = \frac{\pi}{2} \pm x + k\pi$

EXTRI089 – EPL, UCL, LLN, juillet 1999.

Résoudre l’équation en x suivante :

$$2\sin^2 3x + \sin^2 6x = 2$$

et mettre les solutions sur le cercle trigonométrique

$$2\sin^2 3x + \sin^2 6x = 2 \;\Rightarrow\; 2\sin^2 3x + 4\sin^2 3x\cos^2 3x = 2\left(\cos^2 3x + \sin^2 3x\right)$$

$$\Rightarrow 2\sin^2 3x\cos^2 3x = \cos^2 3x$$

1) $\cos^2 3x = 0 \;\Rightarrow\; 3x = \pm\frac{\pi}{2} + 2k\pi \;\Rightarrow\; x = \pm\frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}k\pi$

2) $2\sin^2 3x = 1 \;\Rightarrow\; \sin 3x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

2.1) $\sin 3x = \frac{\sqrt{2}}{2} \;\Rightarrow\; x = \frac{\pi}{12} + \frac{2}{3}k\pi$

2.2) $\sin 3x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \;\Rightarrow\; x = -\frac{\pi}{12} + \frac{2}{3}k\pi$

Finalement : $\boxed{x = \pm\frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}k\pi \quad \text{et} \quad x = \pm\frac{\pi}{12} + \frac{2}{3}k\pi}$

Le lecteur représentera les solutions sur le cercle trigonométrique

---

Modifié le 25 avril 2014 (Jean Perbal)