Exercices résolus de mathématiques.

Trigonométrie
Calcul numérique

TRI 14

EXTRI140-EXTRI144

http://www.matheux.be.tf

Jacques Collot

Nov 04

EXTRI140– EPL, UCL, LLN, juillet 2003.

Pour les affirmations suivantes, cochez vrai si l'affirmation est toujours vraie, ou faux si l'affirmation est toujours fausse, ou, à défaut, donnez les conditions nécessaires et suffisantes qui rendent l'affirmation vraie :

1) Si deux triangles ont les mêmes angles, alors leurs surfaces sont égales.

Toujours vrai : O Toujours faux : O
Vrai si :

2) La somme des angles A, B, C et D d'un quadrilatère quelconque est égal à 2π

Toujours vrai : O Toujours faux : O
Vrai si :

3) ·Dans un triangle avec des angles A, B et C, $\cos(B+C)+\cos A = 0$

Toujours vrai : O Toujours faux : O
Vrai si :

4) Pour $0 < A < \pi$, $1/\tan A < \cos A$

Toujours vrai : O Toujours faux : O
Vrai si :

---

a) Vrai si en plus les deux triangles ont un côté égal.

b) Toujours vrai.

c) $\cos(B+C) = \cos(\pi - A) = -\cos A \Rightarrow$ Toujours vrai.

d) $\dfrac{1}{\tan A} - \cos A < 0 \Rightarrow \dfrac{\cos A}{\sin A} - \cos A < 0$

Comme $0 < A < \pi, \sin A > 0 \Rightarrow \cos A(1-\sin A) < 0$

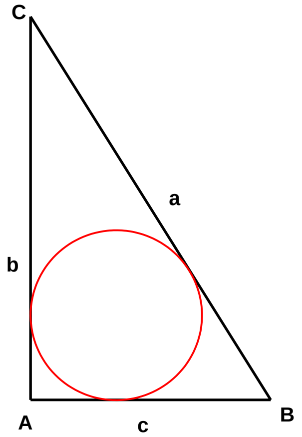
	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$\cos A$	$+$	$+$	0	$-$	$-$
$1-\sin A$	$+$	$+$	0	$+$	$+$
$\cos A(1-\sin A)$	$+$	$+$	0	$-$	$-$

Conclusion : Vrai si $\dfrac{\pi}{2} < A < \pi$

Résolu le 17/05/04

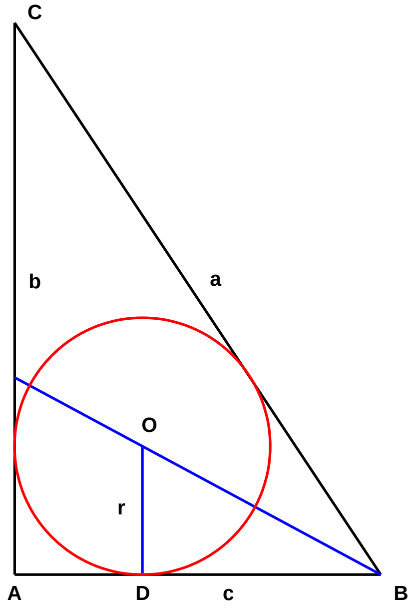
EXTRI141– EPL, UCL, LLN, juillet 2003.

Je veux faire un parterre de fleurs dans le coin de mon jardin et j'ai acheté autant de pétunias rouges que de blancs. Je veux faire un arrangement dans la forme d'un triangle rectangulaire *ABC* avec un cercle inscrit comme indiqué dans le schéma suivant :



Les fleurs rouges iront dans le cercle, les fleurs blanches rempliront le reste du triangle.

-1- Quelles sont les valeurs possibles de l'angle *B* pour que je puisse planter autant de fleurs rouges que de blanches ?
-2- Ensuite, donner le rayon *r* du cercle et les côtés *a*, *b* et *c* du triangle si j'ai acheté pour 2 m^2 de fleurs et si je veux les utiliser toutes ?



a) Pour cette première partie, on peut poser $a = 1$.

Il nous faut donc déterminer B pour que la surface du cercle soit la moitié de la surface du triangle.

On a : $S_T = \frac{1}{2} a\, c \sin B = \frac{1}{2} \cos B \sin B$ car $c = a \cos B = \cos B$

Le triangle ODB est rectangle : $\frac{r}{r-c} = \tan \frac{B}{2}$

puisque le centre O se trouvent sur la bissectrice de l'angle B. $\rightarrow r = \frac{\cos B \tan \frac{B}{2}}{\tan \frac{B}{2} + 1}$

La surface du cercle est : $S_C = \pi r^2 = \pi \left(\frac{\cos B \tan \frac{B}{2}}{\tan \frac{B}{2} + 1} \right)^2$

On doit avoir : $S_C = \frac{1}{2} S_T \quad \rightarrow \pi \left(\frac{\cos B \tan \frac{B}{2}}{\tan \frac{B}{2} + 1} \right)^2 = \frac{1}{4} \cos B \sin B$

$$\rightarrow 2\pi \tan^2 \frac{B}{2} = \tan B \left(\tan \frac{B}{2} + 1 \right)^2 \quad \rightarrow 2\pi \tan^2 \frac{B}{2} = \frac{2 \tan \frac{B}{2}}{1 - \tan^2 \frac{B}{2}} \left(\tan \frac{B}{2} + 1 \right)^2$$

$$\rightarrow 2\pi \tan^2 \frac{B}{2} + (1 - 2\pi) \tan \frac{B}{2} + 1 = 0$$

Cette équation a pour solutions : $\tan \frac{B}{2} = \frac{-(1-2\pi) \pm \sqrt{1 - 12\pi + 4\pi^2}}{4\pi}$

D'où $B = 57.89292°$ et $B = 32.10708°$

On vérfie que $57.89292° + 32.10708° = 90°$

b) On a donc 1 m^{2}de fleurs rouges et 1 m^2 de fleurs blanches.

La surface du cercle est de 1 m^2 : $r = \sqrt{\frac{1}{\pi}} = 0.56419\ m$

$$\rightarrow c = r \frac{1 + \tan \frac{B}{2}}{\tan \frac{B}{2}} = 1.5843\ m$$

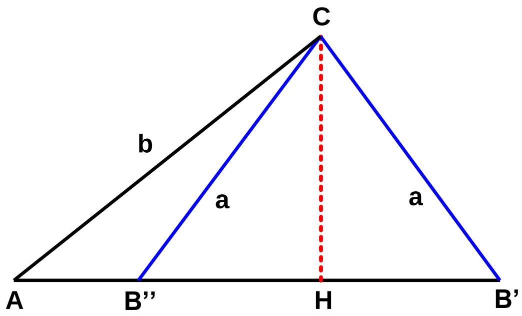
$$\rightarrow b = c \tan B = 2.5248\ m$$

$$\rightarrow a = \frac{c}{\cos B} = 2.9807\ m$$

Résolu le 17/05/04

EXTRI142– Louvain, septembre 2003.

Si dans un triangle, an connaît *a*, *b* et *A*, il existe deux solutions le triangle *AB'C* et le triangle *AB''C*.



-1- Calculer, en fonction de *a b* et *A*, la différence *AB' – AB''*.
-2- Calculer, en fonction de *a*, *b*, et *A*, l'aire du triangle *B'CB''*.
-3- Si *C'* et *C''* sont les 2 valeurs de *C*, montrer que :

$$(\tan A)\left(\tan\frac{C'+C''}{2}\right)=1$$

$a)\ a^2 = B''H^2 + HC^2 \ \rightarrow\ B''H = \sqrt{a^2 - HC^2} = \sqrt{a^2 - b^2\sin^2 A}$

Le triangle $CB''B'$ est isocèle $\rightarrow\ HB'' = HB'$

$AB'' = AH - B''H = b\cos A - \sqrt{a^2 - b^2\sin^2 A} \qquad (1)$

$AB' = AH + B'H = b\cos A + \sqrt{a^2 - b^2\sin^2 A} \qquad (2)$

$AB' - AB'' = 2\sqrt{a^2 - b^2\sin^2 A}$

$$b)\ S_{B'CB''} = \frac{CH.B''B'}{2} = \frac{CH.2B''H}{2} = b\sin A.\sqrt{a^2 - b^2\sin^2 A}$$

$$c)\ AB' = \sin C'\frac{a}{\sin A} \qquad AB'' = \sin C''\frac{a}{\sin A} \quad \rightarrow AB' - AB'' = \frac{a}{\sin A}(\sin C' - \sin C'')$$

$$= \frac{a}{\sin A}2\cos\frac{C'+C''}{2}\sin\frac{C'-C''}{2} \qquad (3)$$

D'autre part,

$AB'^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C' \qquad AB''^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C''$

$\rightarrow AB'^2 - AB''^2 = -2ab(\cos C' - \cos C'') \ \rightarrow (AB' + AB'')(AB' - AB'') = -2ab(\cos C' - \cos C'')$

En utilisant (1) et $(2) \rightarrow 2b\cos A(AB' - AB'') = -2ab(\cos C' - \cos C'')$

$$\rightarrow AB' - AB'' = -\frac{a}{\cos A}(\cos C' - \cos C'') = \frac{a}{\cos A}2\sin\frac{C'+C''}{2}\sin\frac{C'-C''}{2} \qquad (4)$$

En divisant (3) par (4) $\rightarrow\ \tan A.\tan\frac{C'-C''}{2} = 1$

Résolu le 17/05/04

EXTRI143– EPL, UCL, LLN, septembre 2003.

Pour les affirmations suivantes, cochez vrai si l'affirmation est toujours vraie, ou faux si l'affirmation est toujours fausse, ou complétez par une condition qui rende l'affirmation vraie :

1) On peut toujours couper un triangle quelconque en deux triangles rectangles.

Toujours vrai : O   Toujours faux : O

Vrai si :

2) $\tan\left(\frac{A}{2}\right) = \frac{1-\cos A}{\sin A}$

Toujours vrai : O   Toujours faux : O

Vrai si :

3) Pour $\pi < A < 2\pi,\ \sin 2A > \cos A$

Toujours vrai : O   Toujours faux : O

Vrai si :

4) Dans un triangle ABC rectangle en A, on a $\sin B \cos B = \sin C \cos C$

Toujours vrai : O   Toujours faux : O

Vrai si :

$a)$ Toujours vrai.

$$b)\ \tan\frac{A}{2}=\frac{1-\cos A}{\sin A}=\frac{1-\dfrac{1-\tan^2\frac{A}{2}}{1+\tan^2\frac{A}{2}}}{\dfrac{2\tan\frac{A}{2}}{1+\tan^2\frac{A}{2}}}=\frac{1+\tan^2\frac{A}{2}-1+\tan^2\frac{A}{2}}{2\tan\frac{A}{2}}=\tan\frac{A}{2}$$

Donc : toujours vrai.

$$c)\ \sin 2A>\cos A\ \Rightarrow\ 2\sin A\cos A-\cos A>0\ \Rightarrow \cos A\left(2\sin A-1\right)>0$$

	π		$\frac{3\pi}{2}$		2π
$\cos A$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$2\sin A-1$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$
$\cos A\left(2\sin A-1\right)$	$+$	$+$	0	$-$	$-$

Donc : vrai si $\pi<A<\dfrac{3\pi}{2}$

$$d)\ \sin C\cos C=\sin\left(\frac{\pi}{2}-B\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}-B\right)=\sin B\cos B$$

Donc : toujours vrai.

Résolu le 17/05/04

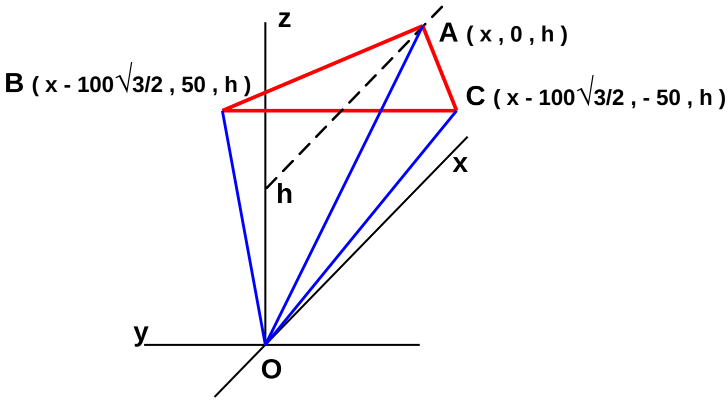
EXTRI144– Louvain, septembre 2003.

Trois avions (A, B et C) volent en formation triangulaire à une altitude de h mètres. Leur distance mutuelle est de 100 mètres. Un observateur (O) sur terre mesure par GPS sa distance aux avions respectifs : OA = 1050 mètres et OB = OC = 1000 mètres. On suppose la terre plate pour simplifier le problème.

-1- Donner un dessin pour schématiser le problème.

-2- Calculer l'altitude h à laquelle les avions volent.

-3- Sous quels angles avec la verticale l'observateur voit-il les avions ?



Définissons un système de coordonnées. A, B et C représentent les avions.

On a : $A:(x,0,h)\quad B:\left(x-\frac{100\sqrt{3}}{2},50,h\right)\quad C:\left(x-\frac{100\sqrt{3}}{2},-50,h\right)$

$$|OA|^2=1050^2=x^2+h^2$$

$$|OB|^2=|OC|^2=1000^2=\left(x-\frac{100\sqrt{3}}{2}\right)^2+50^2+h^2$$

$$\rightarrow\left(x-\frac{100\sqrt{3}}{2}\right)^2+50^2+1050^2-x^2=1000^2$$

$$\rightarrow\ x=649.519\ m\quad\rightarrow\quad h=\sqrt{1050^2-649.519^2}=825\ m$$

L'angle d'un vecteur $\vec{v}$ avec l'axe des z est donné par : $\cos\gamma=\frac{v_z}{|\vec{v}|}$

$$\rightarrow\begin{cases}\cos A=\dfrac{825}{\sqrt{649.519^2+825^2}} & \rightarrow\ A=38.213°\\ \cos B=\cos C=\dfrac{825}{\sqrt{562.917^2+50^2+825^2}} & \rightarrow\ B=C=34.412°\end{cases}$$

Résolu 17/05/04

EXTRI145– Liège, Juillet 2004.

Vérifier l'identité :

$$\frac{\sin 2x+\sin 2y}{\cos 2x+\cos 2y}=\tan(x+y)$$

CE :

1) $\tan(x+y)\neq\infty \rightarrow x+y\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$

2) $\cos 2x+\cos 2y\neq 0 \rightarrow \cos 2x\neq -\cos 2y \rightarrow \begin{cases}\cos 2x\neq\cos(\pi-2y) & (1)\\ \cos 2x\neq\cos(\pi+2y) & (2)\end{cases}$

$(1)\rightarrow 2x\neq\pm(\pi-2y)+2k\pi \rightarrow x\pm y\neq\pm\frac{\pi}{2}+k\pi$

$(2)\rightarrow 2x\neq\pm(\pi+2y)+2k\pi \rightarrow x\mp y\neq\pm\frac{\pi}{2}+k\pi$

Toutes ces conditions d'existence se résume à : $\begin{cases}x+y\neq\pm\frac{\pi}{2}+k\pi\\ x-y\neq\pm\frac{\pi}{2}+k\pi\end{cases}$

Il reste à vérifier l'identité :

$$\frac{\sin 2x+\sin 2y}{\cos 2x+\cos y}=\frac{2\sin\frac{2x+2y}{2}\cos\frac{2x-2y}{2}}{2\cos\frac{2x+2y}{2}\cos\frac{2x-2y}{2}}=\frac{\sin(x+y)}{\cos(x+y)}=\tan(x+y)$$

Car on peut simplifier par $\cos(x-y)$ en vertu des CE.

Issu le 27/09/04

EXTRI146– Liège, Juillet 2004

Résoudre l'inéquation suivante

$$\cot x - \tan x + 2\tan 2x - 4\tan 4x > 8\sqrt{3}$$

Représenter les solutions sur le cercle trigonométrique

$$\text{CE :}\begin{cases} \cot x \neq \infty \quad \to x \neq 0 + k180 & (1) \\ \tan x \neq \infty \quad \to x \neq 90 + k180 & (2) \\ \tan 2x \neq \infty \to 2x \neq 90 + k180 \to x \neq 45 + k90 & (3) \\ \tan 4x \neq \infty \to 4x \neq 90 + k180 \to x \neq 22.5 + k45 & (4) \end{cases}$$

Les conditions $(1),(2)$ et (3) se ramènent à : $x \neq k45$

Pour résoudre l'inéquation, remarquons d'abord que :

$$\cot x - \tan x = \frac{\cos x}{\sin x} - \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin x \cos x} = 2\frac{\cos 2x}{\sin 2x} = 2\cot 2x$$

De même : $\cot 2x - \tan 2x = 2\cot 4x$ et $\cot 4x - \tan 4x = 2\cot 8x$

Par conséquent,on a :

$$\cot x - \tan x - 2\tan 2x - 4\tan 4x = 2\cot 2x - 2\tan 2x - 4\tan 4x = 4\cot 4x - 4\tan 4x = 8\cot 8x$$

$$\to 8\cot 8x > 8\sqrt{3} \to \cot 8x > \sqrt{3} \to x \in [\ 0°, 30°\ [\cup [\ 180°, 210°\ [+ k360°$$

$$\to x \in [\ 0°, 3.75°\ [\cup [\ 22.5°, 26.25°\ [+ k45°$$

Et compte tenu des CE, on a finalement $x \in \ ]\ 0°, 3.75°\ [\cup [\ 22.5°, 26.25°\ [+ k45°$

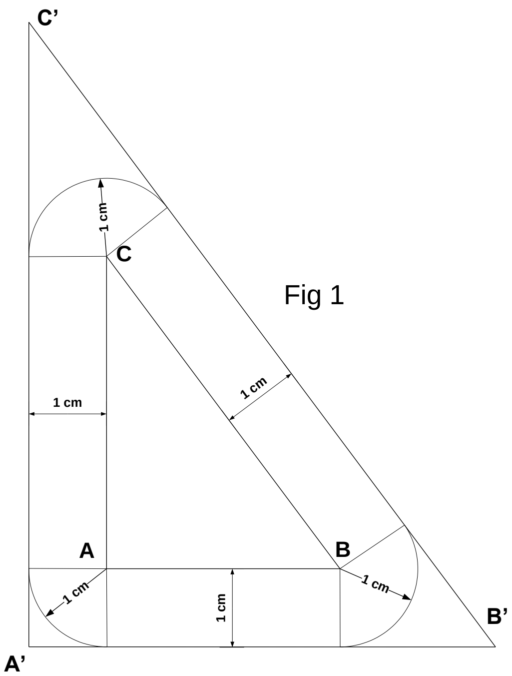
Le lecteur représentera les solutions sur le cercle trigonométrique.

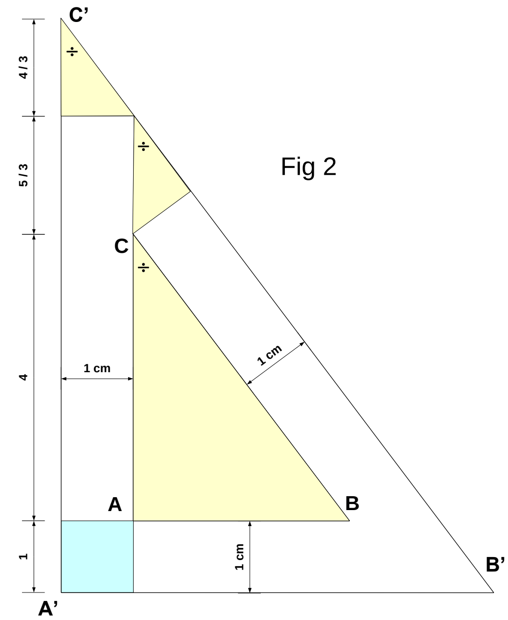
Issu le 27/09/04

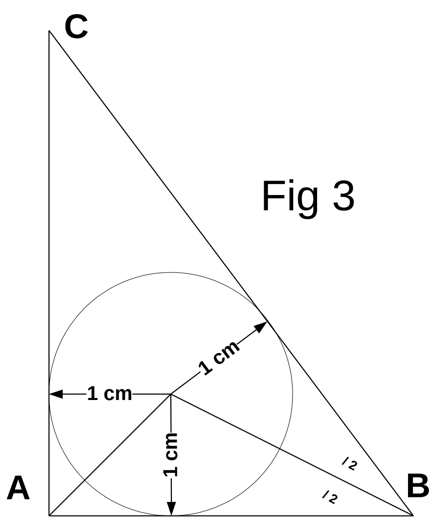
EXTRI147– Liège, Juillet 2004

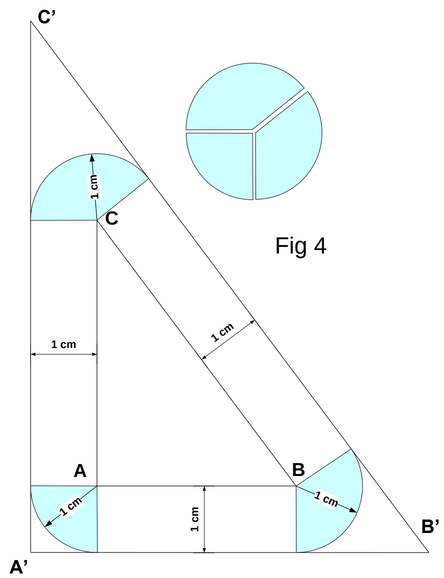
Soit le triangle *ABC* donné. L'angle en *A* est droit. *AB* = 3 cm et *AC* = 4 cm.

1. Calculer l'aire et le périmètre du triangle *A'B'C'* dont les côtés sont situés à 1 cm de ceux du triangle *ABC* (Voir figure 1)
2. Quel sera le résultat (aire et périmètre) pour la figure où les coins sont remplacés par des arcs de cercles tangents aux côtés.









Question 1

Méthode 1 (Voir figure 1)

Les triangles colorés sont semblables.

De plus $\tan\beta = \frac{3}{4} \rightarrow \cos\beta = \frac{4}{5}$ et $\sin\beta = \frac{3}{5}$.

Par conséquent : $A'C' = 1 + 4 + \frac{5}{3} + \frac{4}{3} = 8 = 2AC$

Conclusions : $\begin{cases} \text{Périmètre } ABC = 12 \text{ cm} \rightarrow \text{Périmétre } A'B'C = 2\times 12 = 24 \text{ cm} \\ \text{Aire } ABC \quad = 6 \text{ cm}^2 \rightarrow \text{Aire } A'B'C' \quad = 4\times 6 = 24 \text{ cm}^2 \end{cases}$

Méthode 2 $\left(\text{Figure } 2\right)$

L'aire d'un triangle peut aussi se calculer par : $S = \frac{pr}{2}$

où p = le périmètre du triangle et r = le rayon du cercle inscrit.

$\rightarrow$ Le rayon du cercle inscrit au triangle ABC : $r_{ABC} = \frac{2S}{p} = \frac{2\times 6}{12} = 1$ cm

$\rightarrow$ Le rayon du cercle inscrit au triangle $A'B'C'$: $r_{A'B'C'} = r_{ABC} + 1 = 2$ cm

$\rightarrow$ Le rapport de similitude entre les deux triangles est égal à 2.

Le reste est semblable à la méthode 1.

Méthode 3 $\left(\text{Figure } 3\right)$

Le centre du cercle inscrit se trouve à l'intersection des bissectrices.

Or $\cos\alpha = \frac{3}{5} \rightarrow \tan\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} = \frac{1}{2}$

Par simple construction, on trouve facilement que $r_{ABC} = 1$

Le reste est semblable à la méthode 1

Question 2

La figure se décompose en : $\begin{cases} \text{le triangle } ABC \\ \text{trois secteurs qui réunit forment un cercle} \\ \text{une bande de 1 cm de large et de 12 cm de long} \end{cases}$

Donc : $\begin{cases} \text{Aire} \quad : 6 + \pi\times 1^2 + 12\times 1 = \left(18+\pi\right) \text{cm}^2 \\ \text{Périmètre } : \left(12 + 2\times\pi\times 1\right) \quad = \left(12 + 2\pi\right) \text{cm}^2 \end{cases}$

Issu le 27/09/04

EXTRI148– Liège, Septembre 2004

Résoudre l'équation suivante :

$$\sin^3 x\cos x-\sin x\cos^3 x=\frac{\sqrt{2}}{8}$$

Représentez les solutions sur le cercle trigonométrique.

$$\sin^3 x\cos x-\sin x\cos^3 x=\frac{\sqrt{2}}{8}\rightarrow \sin x\cos x\left(\sin^2 x-\cos^2 x\right)=\frac{\sqrt{2}}{8}$$

$$\rightarrow -\frac{1}{2}\sin 2x\cos 2x=\frac{\sqrt{2}}{8}\rightarrow \sin 4x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

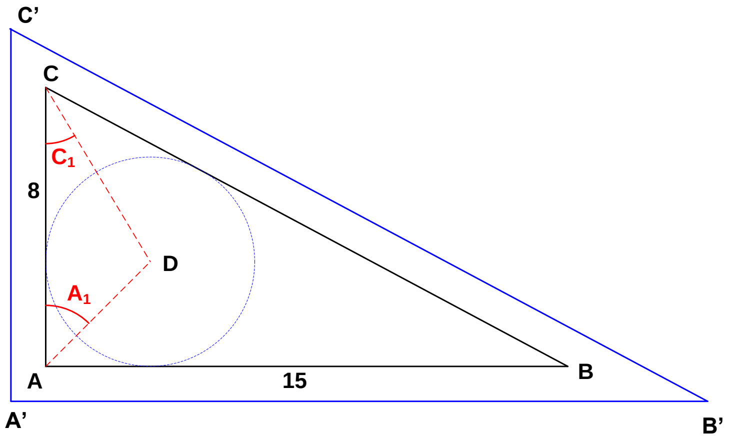
$$\rightarrow \begin{cases} 4x=-\frac{\pi}{4}+2k\pi \rightarrow x=-\frac{\pi}{16}+k\frac{\pi}{2} \\ 4x=\frac{5\pi}{4}+2k\pi \rightarrow x=\frac{5\pi}{16}+k\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Le lecteur représentera les solutions sur le cercle trigonométrique.

Issu le 27/09/04

EXTRI149– Liège, Septembre 2004

Soit un triangle rectangle *ABC* dont l'angle *A* est droit. *AB* = 15 cm et *AC* = 8 cm. Calculer les valeurs des angles aux sommets *B* et *C* ainsi que la longueur de l'hypoténuse. Calculer la hauteur du triangle formé par le côté *AC* et les bissectrices des angles intérieures des angles en *A* et *C*.
Sachant que cette hauteur est aussi le rayon du cercle inscrit au triangle, calculer l'aire et le périmètre du triangle *A'B'C'* dont les côtés sont situés à 1 cm du triangle *ABC*.



Angles et hypoténuse de *ABC*

$$\tan B = \frac{8}{15} \rightarrow B = 28.0725° \rightarrow C = 61.9275 \rightarrow \ BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = 17\ cm$$

Soit D l'intersection des bissectrices en A et C.

$$\Delta ADC \rightarrow A_1 = 45°;\ C_1 = \frac{61.9275}{2} = 30.9638° \rightarrow D \rightarrow 104.0362°$$

Soit h la hauteur cherchée : $h = DC \sin \widehat{C_1} = 5.8309 \sin 30.9638 = 3\ cm$

Donc le rayon du cercle inscrit au triangle $ABC = 3\ cm$ et le rayon du cercle inscrit au triangle $A'B'C'$ sera de $3+1=4\ cm$

Or le rapport des aires des triangles est égale au rapport des surfaces des cercles inscrits. $\rightarrow \dfrac{r^2_{ABC}}{r^2_{A'B'C'}} = \dfrac{S_{ABC}}{S_{A'B'C'}} \rightarrow S_{A'B'C'} = \dfrac{\left(\dfrac{8\times 15}{2}\right)\times 4^2}{3^2} = 106.67\ cm^2$

Et pour les périmètres : $\dfrac{r_{ABC}}{r_{A'B'C'}} = \dfrac{p_{ABC}}{p_{A'B'C'}} \rightarrow p_{A'B'C'} = \dfrac{(8+15+17)\times 4}{3} = 53.33\ cm$

Issu le 18 novembre 04