Exercices résolus de mathématiques.

Trigonométrie
Calcul numérique

TRI 17

EXTRI170-EXTRI179

http://www.matheux.be.tf

Jacques Collot

Dec 05

EXTRI170 – Liège, septembre 2005.

Résoudre l'équation suivante :

$$\tan^3 x - 3\tan^2 x - 3\tan x + 1 = 0$$

Représenter les solutions sur le cercle trigonométrique

Posons : $\tan x = y$. L'équation devient

$y^3 - 3y^2 - 3y + 1 = 0 \rightarrow y^3 + 3y^2 + 3y + 1 - 6y^2 - 6y = 0$

$\rightarrow (y+1)^3 - 6y(y+1) = 0 \rightarrow (y+1)\left(y^2 + 2y + 1 - 6y\right) = 0 \rightarrow (y+1)\left(y^2 - 4y + 1\right) = 0$

$$\rightarrow \begin{cases} y = -1 \rightarrow \tan x = -1 \rightarrow x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi \\ y^2 - 4y + 1 = 0 \rightarrow \begin{cases} y = 2 + \sqrt{3} \rightarrow \tan x = 2 + \sqrt{3} \rightarrow x = 1.31 + k\pi \\ y = 2 - \sqrt{3} \rightarrow \tan x = 2 - \sqrt{3} \rightarrow x = 0.26 + k\pi \end{cases} \end{cases}$$

Le lecteur représentera les solutions sur le cercle trigonométrique

EXTRI171 – Liège, septembre 2005.

Soit un système bielle – manivelle schématisé à la figure 1. On demande de

a) Calculer l'angle α en fonction de l'angle θ, les paramètres *r, l* et *e* étant connus.
b) En déduire les conditions d'existence de l'angle α en fonction des valeurs des paramètres *r, l* et *e*
c) Calculer la valeur numérique de l'angle α pour $\theta = 30°$, $r = 1$ cm, $l = 5$ cm et $e = 0.1$ cm
d) En déduire la valeur correspondante de la position *x* du point *C*.

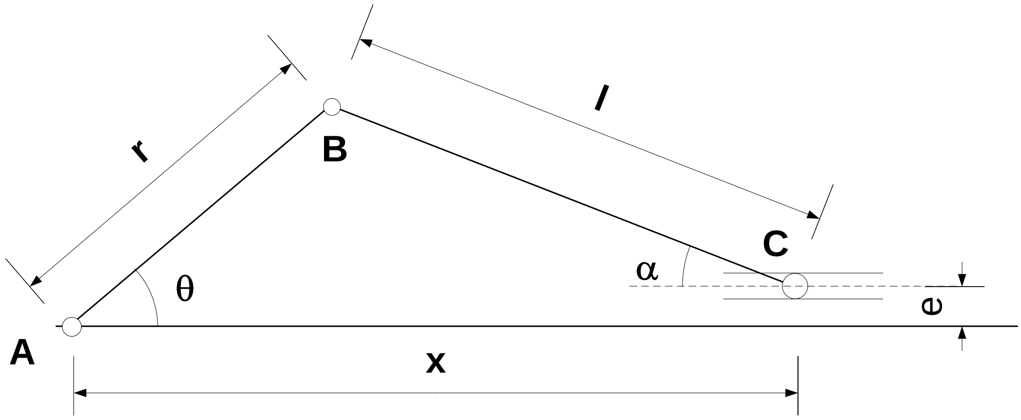


Figure 1

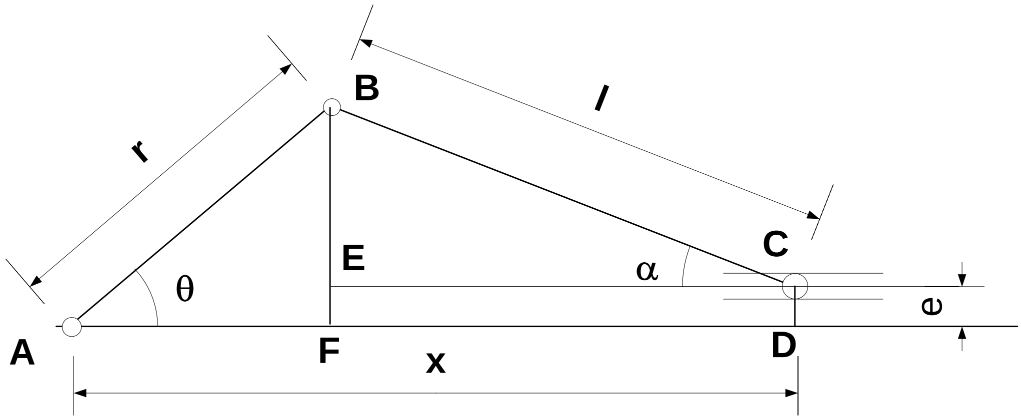


Figure 2

Voir figure 2

a) $|BF| = |BE| + |EF| \to r\sin\theta = l\sin\alpha + e \to \sin\alpha = \dfrac{r\sin\theta - e}{l}$

b) Il faut $\sin\alpha \le 1 \to$ et sin θ est maximal pour $\theta = \dfrac{\pi}{2}$

On en déduit la condition : $\dfrac{r-e}{l} \le 1 \to r \le l + e$

c) $\sin\alpha = \dfrac{1\times\sin 30 - 0.1}{5} = 0.08 \to \alpha = 4.58°$

d) $x = |AF| + |FD| = r\cos\theta + l\cos\alpha = r\cos\theta + l\sqrt{1 - \left(\dfrac{r\sin\theta - e}{l}\right)^2}$

$= r\cos\theta + \sqrt{l^2 - (r\sin\theta - e)^2}$

Ce qui donne ici : $x = 1\times\cos 30 + \sqrt{5^2 - (1\times\sin 30 - 0.1)^2} = 5.85\ cm$

---

27 Nov 05

EXTRI172 – Bruxelles, juillet 2005.

Calculer sin 2x sachant que

$$\sin x - \cos x = 0,2$$

Elevons l'équation au carré :

$(\sin x - \cos x)^2 = \sin x - 2\sin x \cos x + \cos^2 = 0.2^2$

$\rightarrow 1 - \sin 2x = 0.2^2 \rightarrow \sin 2x = 0.96$

Vérification

Résolvons l'équation de départ : $\sin x - \cos x = 0.2$

$\rightarrow \tan \varphi = -1 \rightarrow \varphi = -45° \rightarrow \cos \varphi = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\rightarrow \sin(x - 45) = 0.2 \times \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\rightarrow \begin{cases} x - 45 = 8.13 + 2k180 \rightarrow x = 53.13 + 2k180 \\ x - 45 = 180 - 8.13 + 2k180 \rightarrow x = 216.87 + 2k180 \end{cases}$

On vérifie : $\sin(2 \times 53.13) = \sin(2 \times 216.87) = 0.96$

---

15 décembre 05

EXTRI173 – Bruxelles, juillet 2005.

Calculer, en justifiant chaque étape

$$\arctan\frac{1}{2}+\arctan\frac{1}{5}+\arctan\frac{1}{8}$$

Prenons la tangente de l'expression :

$$\tan\left(\left(\arctan\frac{1}{2}+\arctan\frac{1}{5}\right)+\arctan\frac{1}{8}\right)=\frac{\tan\left(\arctan\frac{1}{2}+\arctan\frac{1}{5}\right)+\frac{1}{8}}{1-\frac{1}{8}\tan\left(\arctan\frac{1}{2}+\arctan\frac{1}{5}\right)}$$

$$=\frac{\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}}+\frac{1}{8}}{1-\frac{1}{8}\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}}}=\frac{8\frac{\frac{7}{10}}{\frac{9}{10}}+1}{8-\frac{\frac{7}{10}}{\frac{9}{10}}}=\frac{\frac{8\times 7}{9}+1}{8-\frac{7}{9}}=\frac{8\times 7+9}{8\times 9-7}=\frac{65}{65}=1$$

Et par conséquent, l'expression vaut $\frac{\pi}{4}$

---

15 décembre 05

EXTRI174 – Bruxelles, septembre 2005.

Résoudre l'équation :

$$\frac{1-\sin\ x}{1+\sin x}=\tan^2 2x$$

et représenter les solutions sur le cercle trigonométrique.

CE

$$1)\ 1+\sin x\neq 0\rightarrow x\neq -\frac{\pi}{4}+2k\pi$$

$$2)\ \tan 2x=\frac{\sin 2x}{\cos 2x}\rightarrow \cos 2x\neq 0\rightarrow x\neq \pm\frac{\pi}{4}+k\pi$$

$$\frac{1-\sin x}{1+\sin x}=\tan^2 2x\rightarrow \frac{1-\sin x}{1+\sin x}=\frac{\sin^2 2x}{\cos^2 2x}$$

$$\rightarrow (1-\sin x)\cos^2 2x=(1+\sin x)\sin^2 2x$$

$$\rightarrow \cos^2 2x-\sin x\cos^2 2x=\sin^2 2x+\sin x\sin^2 2x$$

$$\rightarrow \cos^2 2x-\sin^2 2x=\sin x\cos^2 2x+\sin x\sin^2 2x$$

$$\rightarrow \cos 4x=\sin x\left(\cos^2 2x+\sin^2 2x\right)$$

$$\rightarrow \cos 4x=\sin x$$

$$\rightarrow \cos 4x=\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\rightarrow \begin{cases} 4x=x-\frac{\pi}{2}+2k\pi\rightarrow x=-\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{3} \\ 4x=-x-\frac{\pi}{2}+2k\pi\rightarrow x=\frac{\pi}{10}+\frac{2k\pi}{5} \end{cases}$$

---

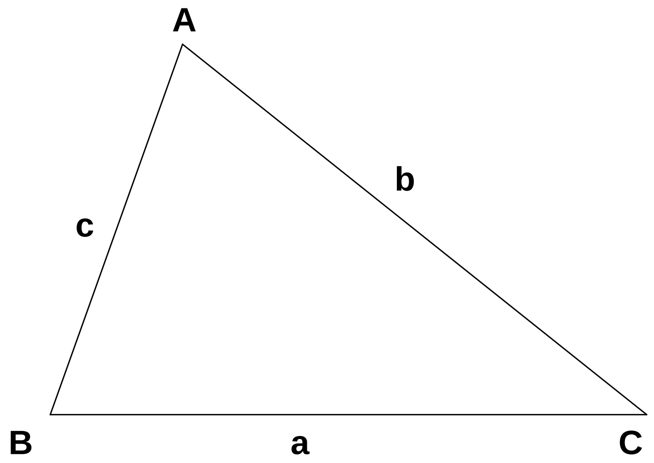
15 décembre 05

EXTRI175 – Bruxelles, septembre 2005.

Soient

- le triangle de sommets *A,B* et *C*
- *M* le milieu du segment *BC*
- les angles $\theta = AMB$; $\beta = BAM$ et $\gamma = CAM$

Calculer cotg θ cotg β et cotg γ en fonction de cotg *A*; cotg *B* et cotg *C*.



Commençons par établir une formule générale qui nous servira par après.

Soit un triangle *ABC* quelconque

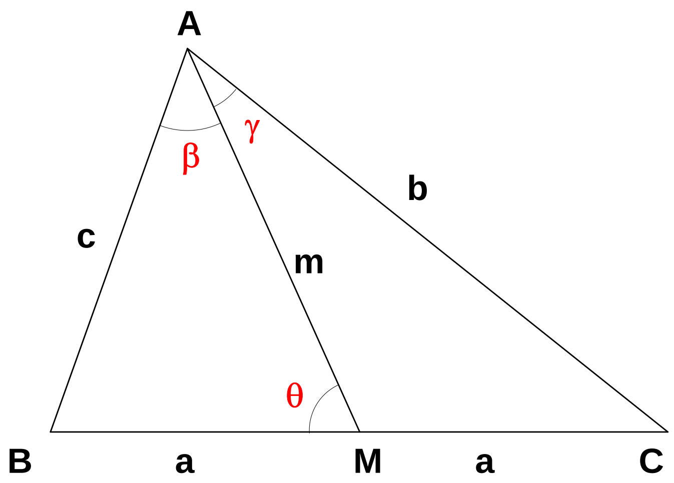
$$\begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A \to \dfrac{\cos A}{b^2+c^2-a^2} = \dfrac{1}{2bc} & (1) \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C \to \dfrac{\cos C}{a^2+b^2-c^2} = \dfrac{1}{2ab} & (2) \\ \sin C = \dfrac{c}{a}\sin A & (3) \end{cases}$$

Divisons (2) par $(3) \to \dfrac{\cot C}{a^2+b^2-c^2} = \dfrac{1}{2bc\sin A}$

Remplaçons avec $(1) \to \dfrac{\cot C}{a^2+b^2-c^2} = \dfrac{\cot A}{b^2+c^2-a^2}$

Et par symétrie, on peut écrire :

$$\frac{\cot A}{b^2+c^2-a^2} = \frac{\cot B}{a^2+c^2-b^2} = \frac{\cot C}{a^2+b^2-c^2} \qquad (4)$$



Appliquons la formule (4) à notre cas particulier :

$$\Delta AMB \rightarrow \frac{\cot\theta}{a^2+m^2-c^2}=\frac{\cot B}{a^2+b^2-m^2} \qquad (5)$$

Grâce au théorème de la médiane (voir EXGSP044), on a : $c^2+b^2=2\left(m^2+a^2\right)$

$$(5) \text{ devient } \frac{\cot\theta}{\frac{c^2+b^2}{2}-c^2}=\frac{\cot B}{a^2+b^2-\frac{c^2+b^2}{2}+a^2}$$

$$\rightarrow \frac{\cot\theta}{b^2-c^2}=\frac{\cot B}{4a^2+c^2-b^2}\rightarrow\left(c^2+b^2\right)\cot\theta+a^2\cot\theta=\left(b^2-c^2\right)\cot B$$

$$\rightarrow \frac{\cot\theta}{\cot\theta+\cot B}=\frac{b^2-c^2}{4a^2} \qquad (6)$$

Considérons maintenant $ABC \rightarrow \dfrac{\cot B}{4a^2+c^2-b^2}=\dfrac{\cot C}{4a^2+b^2-c^2}$

$$\rightarrow 4a^2\cot B+\left(b^2-c^2\right)\cot B=4a^2\cot C+\left(c^2-b^2\right)\cot C$$

$$\rightarrow \frac{\cot C-\cot B}{\cot B+\cot C}=\frac{b^2-c^2}{4a^2} \qquad (7)$$

De (6) et $(7)\rightarrow \dfrac{\cot\theta}{\cot\theta+\cot B}=\dfrac{\cot C-\cot B}{\cot B+\cot C}$

$$\rightarrow \cot\theta=\frac{\cot C-\cot B}{\cot B+\cot C}\left(\cot\theta+\cot B\right)$$

$$\rightarrow \left(1-\frac{\cot C-\cot B}{\cot B+\cot C}\right)\cot\theta=\frac{\cot C-\cot B}{\cot B+\cot C}\cot B$$

$$\rightarrow \boxed{\cot\theta=\frac{\cot c-\cot B}{2}}$$

$\cot\beta$ s'obtient facilement si on remarque que : $\beta = \pi - B - \theta$

$$\rightarrow \cot\beta = \cot\left(\pi - B - \theta\right) = -\cot\left(B+\theta\right) = \frac{1-\cot B\cot\theta}{\cot B + \cot\theta}$$

$$\rightarrow \cot\beta = \frac{1-\cot B\dfrac{\cot C - \cot B}{2}}{\cot B + \dfrac{\cot C - \cot B}{2}} = \frac{2-\cot B\cot C + \cot^2 B}{\cot B + \cot C} \quad (8)$$

Comme $\cot A = -\cot\left(B+C\right) = \dfrac{1-\cot B\cot C}{\cot B + \cot C}$

(8) peut s'écrire $\cot\beta = \dfrac{1-\cot B\cot C}{\cot B + \cot C} + \dfrac{1+\cot^2 B}{\cot B + \cot C}$

$$\rightarrow \boxed{\cot\beta = \cot A + \frac{1+\cot^2 B}{\cot B + \cot C}}$$

De même $\gamma = \theta - C \rightarrow \cot\gamma = \cot\left(\theta - C\right) = \dfrac{\cot\theta\cot C + 1}{\cot\theta - \cot C}$

$$\rightarrow \cot\gamma = \frac{\dfrac{\cot C - \cot B}{2}\cot C + 1}{\dfrac{\cot C - \cot B}{2} - \cot C} = -\frac{\cot^2 C - \cot B\cot C + 2}{\cot B + \cot C}$$

$$= \frac{\cot B\cot C - 1}{\cot B + \cot C} - \frac{\cot^2 C + 1}{\cot B + \cot C}$$

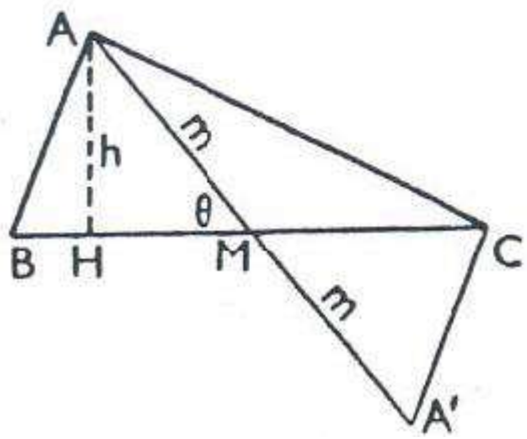
$$\rightarrow \boxed{\cot\gamma = \cot A - \frac{\cot^2 C + 1}{\cot B + \cot C}}$$

EXTRI176 – EPL, UCL, LLN, juillet 2005.
FACSA, ULG, Liège, septembre 2012

Enoncé de EPL

Dans un triangle ABC de surface S, AM est la médiane de longueur m et θ est l'angle AMB.
Démontrer les relations suivantes :

- $4m^2 - a^2 = 4bc\cos A$
- $S = \dfrac{4m^2 - a^2}{8}\tan A$



Enoncé de FACSA

Soit le triangle ABC. on désigne par α, β et γ la mesure des angles respectivement aux sommets A, B et C et par a, b et c, la mesure des longueurs des côtés opposés. On appelle m la mesure de la médiane AM, θ la mesure de l'angle AMB et S la mesure de la surface du triangle ABC.

a) Dessiner une esquisse de la situation.

b) Démontrer les relations

$$4m^2 - a^2 = 4bc\cos\alpha \qquad \text{et} \qquad S = \frac{am}{2}\sin\theta$$

c) Si on donne les valeurs numériques suivantes :

$$c = 3.45\text{ m} \qquad \alpha = 48° \qquad \text{et} \qquad \beta = 73°$$

que valent a, b, m et S ?

Donner les résultats numériques avec 4 chiffres après la virgule.

Voir le théorème de la médiane : EXGSP044

- D'une part on a dans le triangle ABC : $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A \rightarrow b^2 + c^2 = a^2 + 2bc\cos A$

  D'autre part le théorème de la médiane permet d'écrire : $b^2 + c^2 = 2m^2 + \frac{1}{2}a^2$

  On en déduit : $2m^2 + \frac{1}{2}a^2 = a^2 + 2bc\cos A \rightarrow \boxed{4m^2 - a^2 = 4bc\cos A}$

- On a : $S = \frac{1}{2}bc\cos A = \frac{4bc\cos A}{8}\frac{\sin A}{\cos A} \rightarrow \boxed{S = \frac{4m^2 - a^2}{8}\tan A}$

- Les triangles AMB et AMC ont la même surface puisqu'ils ont une base égale $\overline{BM} = \overline{MC}$

  et qu'ils ont la même hauteur : $S = 2S_{AMB} = 2 \times \frac{1}{2} \times \overline{BM}.m.\sin\theta \Rightarrow \boxed{S = \frac{am}{2}\sin\theta}$

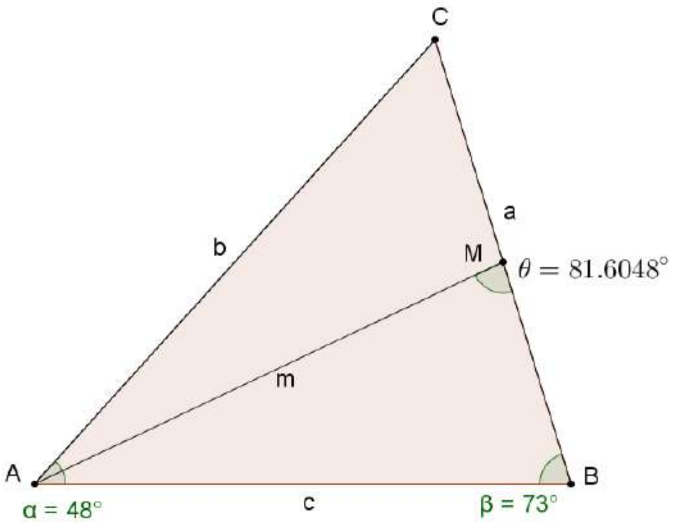
- $\gamma = 180 - 48 - 73 = 59°$; $\quad a = \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}c = \frac{\sin 48}{\sin 59} \times 3.45 = 2.9911$ m;

  $b = \frac{\sin\beta}{\sin\gamma}c = \frac{\sin 73}{\sin 59} \times 3.45 = 3.8490$ m;

  $m = \sqrt{bc\cos\alpha + \frac{a^2}{4}} = \sqrt{3.8490 \times 3.45 \times \cos 48 + \frac{2.9911^2}{4}} = 3.3350$ m

  $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{m^2 + a^2/4 - c^2}{ma}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{3.335^2 + 2.9911^2/4 - 3.45^2}{3.335 \times 2.9911}\right) = 81.6048°$

  $S = \frac{am}{2}\sin\theta = \frac{2.9911 \times 3.335}{2}\sin 81.6048 = 4.9342\text{m}^2$



Variante proposée par Pierre Bernimont

Dans le triangle ABC : $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos A.$

$$2bc.\cos A = b^2 + c^2 - a^2$$

$$4bc.\cos A = 2b^2 + 2c^2 - 2a^2 \qquad (1)$$

Dans le triangle AMB : $c^2 = m^2 + \frac{a^2}{4} - 2.m.\frac{a}{2}.\cos\theta = m^2 + \frac{a^2}{4} - a.m.\cos\theta$

Dans le triangle AMC : $b^2 = m^2 + \frac{a^2}{4} - 2.m.\frac{a}{2}.\cos\ (\pi - \theta) = m^2 + \frac{a^2}{4} + a.m.\cos\theta$

En additionnant membre à membre: $b^2 + c^2 = 2m^2 + \frac{a^2}{2}$

$$2b^2 + 2c^2 = 4m^2 + a^2$$

$$2b^2 + 2c^2 - a^2 = 4m^2$$

$$2b^2 + 2c^2 - 2a^2 = 4m^2 - a^2 \qquad (2)$$

En identifiant (1) et (2), nous avons : $\boxed{4m^2 - a^2 = 4bc.\cos A}$

$$S = \frac{1}{2}\ bc.\sin A$$

Sachant par la première relation que $bc = \frac{4m^2 - a^2}{4\cos A}$,

nous avons : $S = \frac{1}{2}.\frac{4m^2 - a^2}{4\cos A}.\sin\ A$

$$\boxed{S = \frac{4m^2 - a^2}{8}\tan A}$$

15 avril 06. Modifié le 4 avril 2008. Modifié le 14 octobre 2013

EXTRI177 – EPL, UCL, LLN, juillet 2005.

Pour les affirmations suivantes, cochez vrai si l'affirmation est toujours vraie, ou faux si l'affirmation est toujours fausse, ou complétez par une condition qui rende l'affirmation vraie :

1) Le plus petit angle d'un triangle est inférieur ou égal à 60°

Toujours vrai : O Toujours faux : O
Vrai si :

2) Pour $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$, on a $\tan 2x > \tan x$

Toujours vrai : O Toujours faux : O
Vrai si :

3) Pour $x \neq \frac{k\pi}{2}$, on a , $\frac{\tan x - \sin x}{\tan x + \sin x} > 0$

Toujours vrai : O Toujours faux : O
Vrai si :

4) Dans un triangle rectangle en A, l'aire S du triangle est égal à $S = \frac{1}{2} a^2 \sin B \cos B$

Toujours vrai : O Toujours faux : O
Vrai si :

---

1) Vrai.

En effet, soit A le plus petit angle : $\begin{cases} A \leq B \\ A \leq C \end{cases}$

or $A + B + C = 180° \rightarrow 3A \leq 180° \rightarrow A \leq 60°$

2) Faux. Pour $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$, $\tan 2x$ est négatif et $\tan x$ est positif

3) $\frac{\tan x - \sin x}{\tan x + \sin x} = \frac{\frac{\sin x}{\cos x} - \sin x}{\frac{\sin x}{\cos x} + \sin x} = \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$

Or $-1 \leq \cos x \leq 1$, la fraction est donc toujours positive, sauf en $x = k\pi$ (alors $1 + \cos x = 0$)

La proposition est donc vraie si $x = k\pi$

4) $S = \frac{1}{2} bc$ or $b = a \cos B$ et $c = a \cos C \rightarrow S = \frac{1}{2} a^2 \sin B \cos B$

---

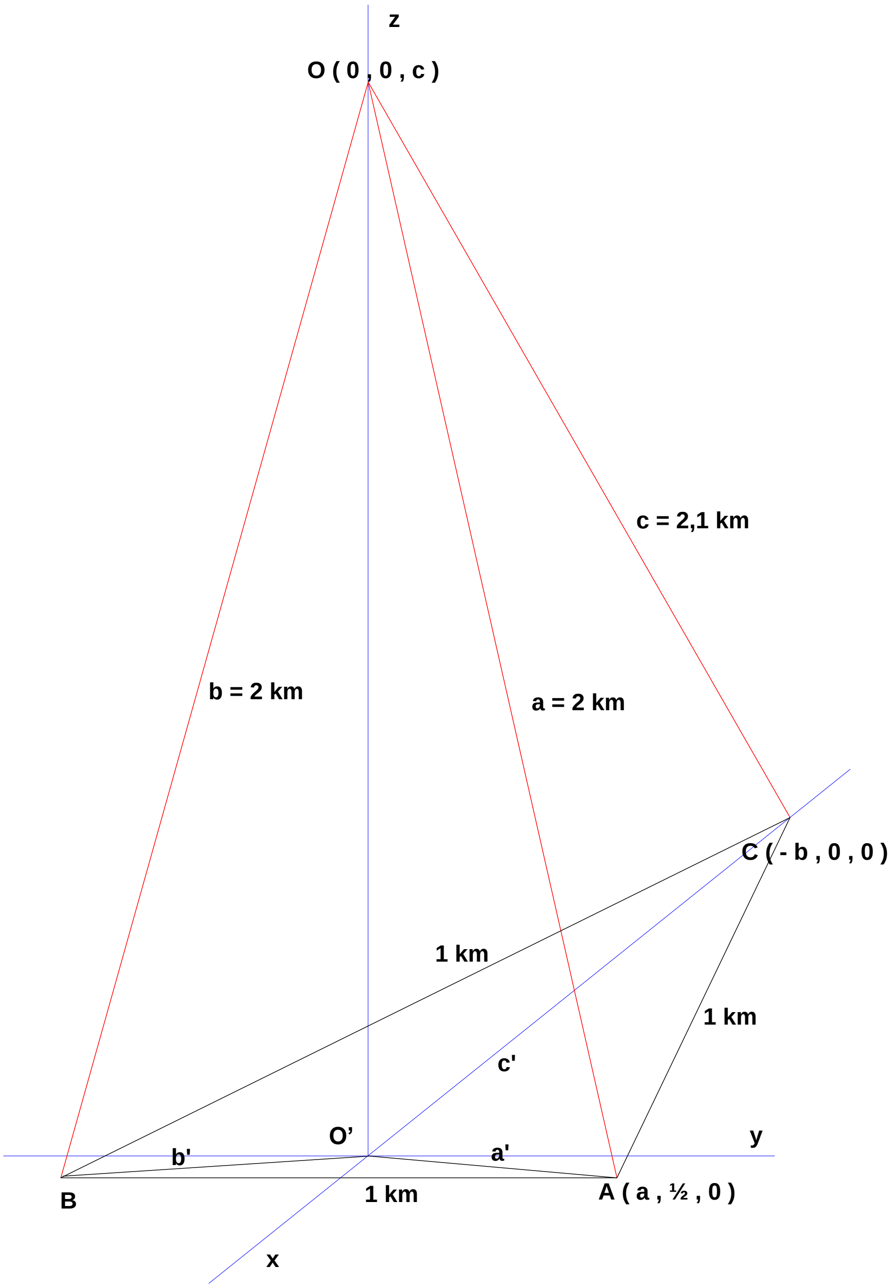
15 avril 06

EXTRI178 – Louvain, juillet 2005.

Je vole dans un ballon (O) et je mesure les distances $a = OA$, $b = OB$ et $c = OC$ à trois points A, B et C au sol. Le triangle ABC est équilatéral de côté d = 1km. Les distances sont $a = b$ = 2km et c = 2,1km.

1. Si O' est ma projection orthogonale au sol, calculez les distances a', b' et c' de O' aux trois points de référence A, B et C.
2. Faites un croquis de la situation pour expliquer vos calculs.

On suppose la terre plate pour simplifier le problème.



Le dessin explicite le problème. Plaçons judicieusement les axes

Soient : $A\left(a,\frac{1}{2},0\right);C\left(-b,0,0\right);O\left(0,0,c\right)$

$$\rightarrow\begin{cases}|\ AC\ |^2=\left(a+b\right)^2+\frac{1}{4}=1\\|\ OA\ |^2=a^2+\frac{1}{4}+c^2=4\\|\ OC\ |^2=b^2+c^2=2.1^2\end{cases}\rightarrow\begin{cases}a^2+b^2+2ab=\frac{3}{4}\\a^2+c^2=\frac{15}{4}\\b^2+c^2=2.1^2\end{cases}\rightarrow\begin{cases}a^2+b^2+2ab=\frac{3}{4}\\a=\sqrt{\frac{15}{4}-c^2}\\b=\sqrt{2.1^2-c^2}\end{cases}$$

On élimine a et $b,$ la première équation donne :

$$\frac{15}{4}-c^2+2.1^2-c^2+2\sqrt{\frac{15}{4}-c^2}.\sqrt{2.1^2-c^2}=\frac{3}{4}\rightarrow\left(\frac{15}{4}-c^2\right)\left(2.1^2-c^2\right)=\left(c^2-3.705\right)^2$$

$$\rightarrow-0.75c^2+2.810475=0\rightarrow c=1.9358\ km\rightarrow\begin{cases}a=0.0518\ km\\b=0.8141\ km\end{cases}$$

$$\rightarrow\begin{cases}a'=b'=|\ O'A\ |=\sqrt{0.0518^2+\frac{1}{4}}=0.5027\ km\\c'=|\ O'C\ |=b=0.8141\ km\end{cases}$$

EXTRI179 – FACSA, ULG, Liège, juillet 2006.
Polytech, Umons, Mons, juillet 2012.

Dans un triangle ABC, on a la relation

$$\sin^2 B\sin^2 C+\cos^2 B\cos^2 C=\frac{1}{2}\sin 2B\sin 2C$$

Montrer que ce triangle est rectangle.

$$\sin^2 B\sin^2 C+\cos^2 B\cos^2 C=\frac{1}{2}\sin 2B\sin 2C$$
$$\Rightarrow \sin^2 B\sin^2 C+\cos^2 B\cos^2 C-2\sin B\cos B\sin C\cos C=0$$
$$\Rightarrow \left(\sin B\sin C-\cos B\cos C\right)^2=0$$
$$\Rightarrow \left[\cos\left(-\left(B+C\right)\right)\right]^2=0\to \cos\left(B+C\right)=0$$
$$\Rightarrow B+C=\frac{\pi}{2}\to A=\frac{\pi}{2}$$

Le triangle est donc rectangle en A

Solution proposée par Fabienne Zoetard.

$A+B+C=\pi$

On a : $\sin 2B\sin 2C=2\sin^2 B+\sin^2 C+2\cos^2 B\cos^2 C$

$\Rightarrow 4\sin B\cos B\sin C\cos C=2\sin^2 B\sin^2 C+2\cos^2 B\cos^2 C$

$\Rightarrow 2\sin B\cos B\sin C\cos C-\sin^2 B\sin^2 C-\cos^2 B\cos^2 C=0$

$\Rightarrow \sin B\sin C(\cos B\cos C-\sin B\sin C)-\cos B\cos C(\cos B\cos C-\sin B\sin C)=0$

$\Rightarrow \sin B\sin C\cos(B+C)-\cos B\cos C\cos(B+C)=0$

$\Rightarrow \cos(B+C)(\sin B\sin C-\cos B\cos C)=0\Rightarrow \cos(B+C).[-\cos(B+C)]=0$

$\Rightarrow \cos(B+C)=0\Rightarrow B+C=\pi-A=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$

Or $A\in\left]0,\pi\right[\Rightarrow \boxed{A=\dfrac{\pi}{2}}$

---

5 juillet 06. Modifié le 21 octobre 2013 (Fabienne Zoetard)