Exercices résolus de mathématiques.

Trigonométrie
Calcul numérique

TRI 18

EXTRI180-EXTRI189

http://www.matheux.be.tf

Jacques Collot

Juillet 08

EXTRI180 – Liège, juillet 2006.

On désire trouver analytiquement la valeur de sin (π/10) sous forme d'une expression contenant éventuellement des radicaux. A cette fin, on procédera comme suit.

1) En posant $A = \pi/10$, montrer que $\cos 3A = \sin 2A$
2) Développer l'équation précédente en termes de $\cos A$ et $\sin A$
3) L'équation obtenue peut se ramener à une équation du second degré en $\sin A$, que l'on résoudra. Faire le bon choix entre les deux solutions possibles.

---

1) C'est immédiat puisque $\frac{3\pi}{10}$ et $\frac{2\pi}{10}$ sont des angles complémentaires.

2) Calculons $\cos 3A$.

$$\begin{aligned}\cos 3A &= \cos(2A + A) = \cos 2A \cos A - \sin 2A \sin A\\ &= \left(2\cos^2 A - 1\right)\cos A - 2\sin^2 A \cos A = 2\cos^3 A - \cos A - 2\left(1 - \cos^2 A\right)\cos A\\ &= 4\cos^3 A - 3\cos A\end{aligned}$$

3) On a alors : $\cos 3A = \sin 2A \rightarrow 4\cos^3 A - 3\cos A = 2\sin A \cos A$

Comme $\cos A \neq 0$, on peut simplifier par $\cos A$

$$\rightarrow 4\cos^2 A - 3 = 2\sin A \rightarrow 4 - 4\sin^2 A - 3 = 2\sin A \rightarrow 4\sin^2 A + 2\sin A - 1 = 0$$

Cette équation a pour solutions : $\begin{cases} \sin A = \frac{1}{4}\left(\sqrt{5} - 1\right) \\ \sin A = -\frac{1}{4}\left(\sqrt{5} + 1\right) < -1 \quad \text{A rejeter} \end{cases}$

---

5 juillet 06

EXTRI181 – Liège, juillet 2006.

Résoudre l'équation :

$$\left(\frac{1+\tan\frac{x}{2}}{1-\tan\frac{x}{2}}\right)^2+\sin x=0$$

CE : $\begin{cases}1-\tan\frac{x}{2}\neq 0\rightarrow \tan\frac{x}{2}\neq 1\rightarrow \frac{x}{2}\neq\frac{\pi}{4}+k\pi\rightarrow x\neq\frac{\pi}{2}+2k\pi\\ \tan\frac{x}{2}\neq\infty\rightarrow x\neq\frac{\pi}{4}+k\pi\end{cases}$

$$\left(\frac{1+\tan\frac{x}{2}}{1-\tan\frac{x}{2}}\right)^2+\sin x=0\rightarrow\left(\frac{1+\tan\frac{x}{2}}{1-\tan\frac{x}{2}}\right)^2+\frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}=0$$

Posons : $y=\tan\frac{x}{2}$. L'équation s'écrit $\left(\frac{1+y}{1-y}\right)^2+\frac{2y}{1+y^2}=0$

$$\rightarrow(1+y)^2\left(1+y^2\right)+2y(1-y)^2=0\rightarrow y^4+4y^3-2y^2+4y+1=0$$

En groupant les termes de façon adéquate : $\left(y^2-1\right)^2+4y\left(y^2+1\right)=0\ \ (1)$

Or $y^2+1=\frac{1}{1+\cos^2\frac{x}{2}}$. Donc (1) s'écrit $\left(\frac{\sin^2\frac{x}{2}-\cos^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}\right)^2+\frac{4\tan\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}=0$

$$\rightarrow\frac{\cos^2 x}{\cos^4\frac{x}{2}}+\frac{4\sin\frac{x}{2}}{\cos^3\frac{x}{2}}=0\rightarrow\cos^2 x+4\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}=0\rightarrow 1-\sin^2 x+2\sin x=0$$

Cette équation a pour solutions

$$\begin{cases}\sin x=\sqrt{2}+1>1\quad\text{A rejeter}\\ \sin x=1-\sqrt{2}\rightarrow\begin{cases}x=-0.427+2k\pi\\ x=3.569+2k\pi\end{cases}\end{cases}$$

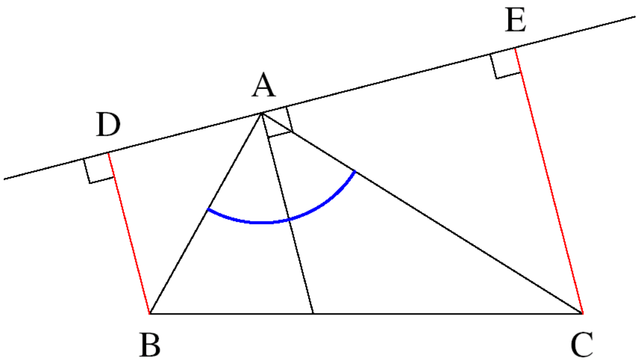
---

5 juillet 06. Modifié le 6 juillet (Benoît Baudelet)

EXTRI182 – Bruxelles – Juillet 2006

Dans le triangle *ABC*, l'angle *A* varie de telle sorte que la norme de *AB* + la norme de *AC* $(|AB| + |AC|)$ reste constante. On demande de démontrer que le produit de la distance de *B* à la bissectrice extérieure de l'angle *A* par la distance de *C* à cette même bissectrice extérieure reste constant.

Solution proposée par Benoît BAUDELET



Soit D et E les projections orthogonales de B et C respectivement sur la bissectrice extérieure de l'angle A.

Si l'on note $\alpha = A$, on a $\widehat{ADB} = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}$ et $\widehat{CAE} = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}$. Les triangles $\triangle ADB$ et $\triangle AEC$ étant rectangles respectivement en D et E, on a

$$\sin \widehat{DAB} = \frac{\overline{BD}}{\overline{AB}} \Leftrightarrow \overline{BD} = \overline{AB}.\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right) = \overline{AB}.\cos\frac{\alpha}{2}$$

et

$$\sin \widehat{AEC} = \frac{\overline{CE}}{\overline{AC}} \Leftrightarrow \overline{CE} = \overline{AC}.\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right) = \overline{AC}.\cos\frac{\alpha}{2}$$

Dés lors

$$\overline{BD}.\overline{CE} = \overline{AB}.\overline{AC}\cos^2\frac{\alpha}{2} \qquad (1)$$

Grâce au théorème du cosinus appliqué dans le $\triangle ABC$ et en notant la constante $\overline{AB} + \overline{AC} = k,$ on a

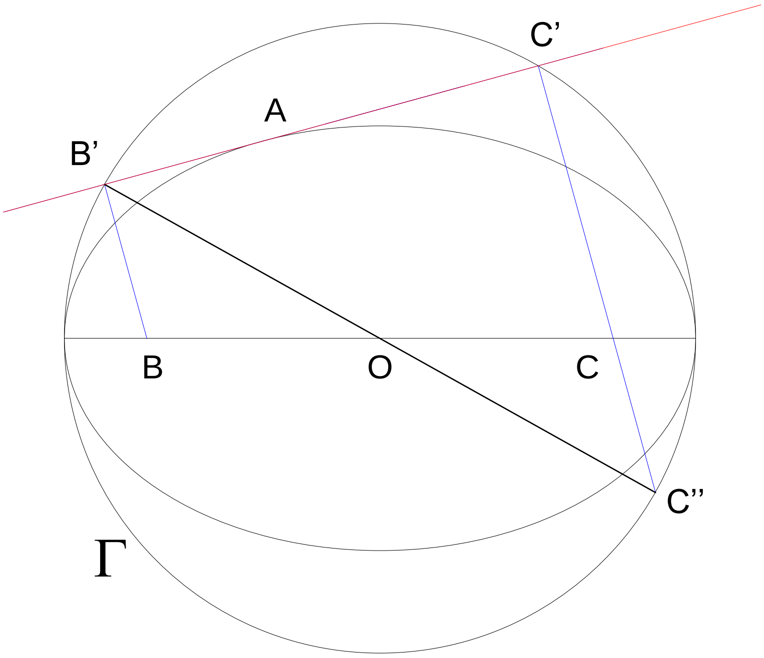
$$\begin{aligned}
\overline{BC}^2 &= \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2.\overline{AB}.\overline{AC}.\cos\alpha \\
&= \left(\overline{AB} + \overline{AC}\right)^2 - 2.\overline{AB}.\overline{AC} - 2.\overline{AB}.\overline{AC}.\cos\alpha \\
&= k^2 - 2.\overline{AB}.\overline{AC}\left(1 + \cos\alpha\right) \\
&= k^2 - 4.\overline{AB}.\overline{AC}.\cos^2\frac{\alpha}{2}
\end{aligned}$$

D'où

$$\overline{AB}.\overline{AC}.\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{k^2 - \overline{BC}^2}{4} = \frac{k^2 - a^2}{4} \qquad (2)$$

De (1) et (2), on déduit que $\overline{BD}.\overline{CE} = \frac{k^2 - a^2}{4}$ est constant

Solution alternative basée sur la géométrie synthétique



Si $|AB|+|AC|=cst$ alors A se déplace sur une ellipse de foyers B et C.
De plus, la bissectrice extérieure de l'angle A est la tangente en A l'ellipse.

On sait également que la podaire d'une ellipse est le cercle principal Γ, qui a pour rayon a, demi grand axe de l'ellipse. (Voir rappel 1)
Par conséquent, les projetés B' et C' sur la tangente sont sur Γ.
Prologeons $C'C$ qui coupe le cercle Γ en C''. Le triangle $B'C'C''$ étant rectangle, C'' est aussi sur le diamètre $B'O$, où O est le centre du cercle et de l'ellipse.

Les triangles OBB' et OCC'' sont égaux puisque $|OB'|=|OC'|=a$,
$|OB|=|OC|$ et que $\widehat{BOB'}=\widehat{COC'}$ (Angles opposés par le sommet)
$\rightarrow |BB'|=|CC''|$

Considérons maintenant la puissance du point C par rapport au cercle Γ.
(Voir rappel 2)
$\mathcal{P}(C,\Gamma)=|CC'|.|CC''|=a^2-c^2=b^2$, où c est la distance $|OC|$ et b le demi petit axe de l'ellipse
$\rightarrow \boxed{|BB'|.|CC'|=b^2=cst}$

Rappel 1 : Podaire

On appelle podaire d'une courbe Γ par rapport à un point F, la courbe qui est le lieu des projetés de F sur les tangentes à Γ.
La podaire d'une ellipse est donc le lieu des projections des foyers de l'ellipse sur les tangentes à l'ellipse.

Soit une ellipse d'équation $\mathrm{E} \equiv \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1 \to \mathrm{E} \equiv b^2x^2+a^2y^2-a^2b^2=0.$

Soit $t \equiv y = mx+\lambda$ l'équation en un point A de E. Remplaçons y dans E :

$\to b^2x^2-a^2\left(mx+\lambda\right)^2+a^2b^2=0 \to \left(a^2m^2+b^2\right)x^2+2a^2m\lambda x+a^2\lambda^2-a^2b^2=0$

Pour que les racines soient égales, il faut que : $\left(a^2m\lambda\right)^2-\left(a^2m^2+b^2\right)\left(a^2\lambda^2-a^2b^2\right)=0$

$\to a^4m^2\lambda^2-a^4m^2\lambda^2-a^2b^2\lambda^2+a^4b^2m^2\lambda^2+a^2b^4=0 \to a^2b^2\left(a^2m^2+b^2-\lambda^2\right)=0$

$\to \lambda = \pm\sqrt{a^2m^2+b^2}.$

La quantité sous le radical étant toujours positive, λ est toujours réelle.

Les équations des tangentes sont donc : $\boxed{t \equiv y = mx \pm \sqrt{a^2m^2+b^2}}$

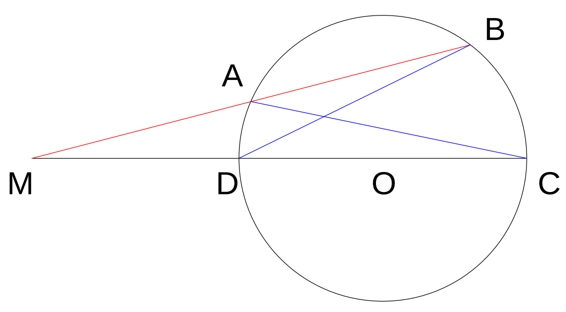
La normale n à une tangente t de direction m, issue du foyer $(c,0)$, a pour équation $n \equiv y = -\dfrac{1}{m}(x-c)$. Le point d'intersection de n et t est donné par

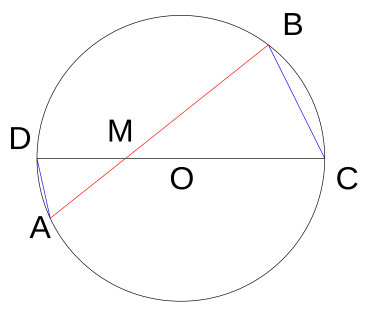
$\begin{cases} y-mx=\pm\sqrt{a^2m^2+b^2} \\ my+x=c \end{cases}$. Additionnons après avoir élevé au carré. Il vient, en tenant compte que $a^2-b^2=c^2 \to \left(m^2+1\right)\left(x^2+y^2\right)=\left(m^2+1\right)a^2 \to \boxed{x^2+y^2=a^2}$

qui représente le cercle principal. Le second foyer donne par symétrie la même podaire.

Remarques:

• Dans le cas général, la podaire d'un point est une courbe plus compliquée.





Rappel 2 : Puissance d'un point par rapport à un cercle

Soit Γ un cercle de centre O, de rayon r et M un point fixe du plan.
Si une droite d passe par M et coupe le cercle en A et B, alors le produit
$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = |MA|.|MB| = |OM|^2 - r^2 = cst$
Cette quantité est la puissance de M par rapport au cercle Γ : $\mathcal{P}(M,\Gamma)$

Point M extérieure au cercle
Les triangles MBD et MAC sont semblables car leurs angles correspondants sont égaux.

$$\rightarrow \frac{|MD|}{|MA|} = \frac{|MB|}{|MC|} \rightarrow |MA|.|MB| = |MD|.|MC|$$

Or $|MD| = |MO| - r$ et $|MC| = |MO| + r \rightarrow \boxed{|MA|.|MB| = |MO|^2 - r^2}$

Point M intérieure au cercle
Les triangles MBC et MDA sont semblables car leurs angles correspondants sont égaux.

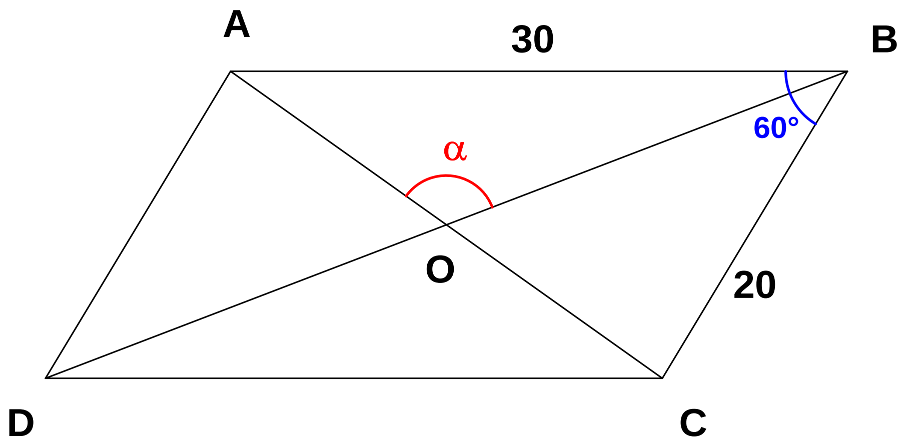
$$\rightarrow \frac{|MB|}{|MD|} = \frac{|MC|}{|MA|} \rightarrow |MA|.|MB| = |MD|.|MC|$$

Or $|MD| = |MO| - r$ et $|MC| = |MO| + r \rightarrow \boxed{|MA|.|MB| = |MO|^2 - r^2}$

Le 19 août 2006

EXTRI183 – Mons – Juillet 2003

Dans le parallélogramme *ABCD*, on connaît les côtés *AB* (=30), *BC* (=20) et l'angle *B* (=60°). Calculer les diagonales, leur angle et l'aire du parallélogramme.



$$\text{Parallélogramme } ABCD \rightarrow \begin{cases} A = C \\ B = D = 60° \\ A + B + C + D = 360° \end{cases} \rightarrow A = C = \frac{360° - 2B}{2} = 120°$$

$$\text{Triangle } ACD \rightarrow AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB.BC.\cos 60°$$

$$= 900 + 400 - 2 \times 30 \times 20 \times \cos 60° \rightarrow \boxed{AC = 10\sqrt{7}}$$

$$\text{Triangle } ADB \rightarrow BD^2 = 30^2 + 20^2 - 2 \times 30 \times 20 \times \cos 120 \rightarrow \boxed{BD = 10\sqrt{19}}$$

$$\text{Triangle } AOB \rightarrow AB^2 = \left(\frac{AC}{2}\right)^2 + \left(\frac{BD}{2}\right)^2 - 2.\frac{AC}{2}.\frac{BD}{2}.\cos\alpha$$

$$900 = 25 \times 7 + 25 \times 19 + 2 \times 5\sqrt{7} \times 5\sqrt{19} \cos\alpha \rightarrow \boxed{\alpha = 115.69°}$$

$$\text{Aire du parallélogramme : } S = AD.BC \sin D = 30 \times 20 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \boxed{300\sqrt{3}}$$

Le 19 septembre 2006

EXTRI184 – Mons – Juillet 2003

Démontrer que la relation suivante est vérifiée.

$$\frac{\cos 6a+6\cos 4a+15\cos 2a+10}{\cos 5a+5\cos 3a+10\cos a}=2\cos a$$

La relation peut s'écrire :

$$\underbrace{\cos 6a+6\cos 4a+15\cos 2a+10}_{M_1}=2\cos a\left(\cos 5a+5\cos 3a+10\cos a\right)$$

Traitons le premier membre qui peut s'écrire:

$$M_1=\cos 6a+\cos 4a+5\cos 4a+5\cos 2a+10\cos 2a+10$$

Avec les formules : $\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$

et : $1+\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha$

on obtient :

$$M_1=2\cos 5a\cos a+10\cos 3a\cos 4+10\times 2\times\cos^2 a$$

$$=2\cos a\left(\cos 5a+5\cos 3a+10\cos a\right)$$

C'est-à-dire le deuxième membre.

Le 19 septembre 2006

EXTRI185 – POLYTECH, Umons, Mons – Juillet 2003

Sachant que• $x,\ y$ et z sont des nombres réels compris entre 0 et $\pi/2$ et tels que

$$\tan x = \frac{1}{2},\quad \tan y = \frac{1}{5} \text{ et } \tan z = \frac{1}{8}$$

Démontrer que $x + y + z = \pi/4$ sans utiliser la machine à calculer.

(seules les valeurs remarquables peuvent être considérées).

$$\tan(x+y+z) = \frac{\tan(x+y) + \tan z}{1 - \tan(x+y)\tan z}$$

$$\text{Or : } \tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{5}}{1 - \frac{1}{2}.\frac{1}{5}} = \frac{7}{9}$$

$$\rightarrow \tan(x+y+z) = \frac{\frac{7}{9} + \frac{1}{8}}{1 - \frac{7}{9}.\frac{1}{8}} = 1 \rightarrow x + y + z = \frac{\pi}{4} + k\pi$$

$$\text{D'autre part : } \begin{cases} \tan x = \frac{1}{2} & \text{avec } 0 \le x \le \frac{\pi}{2} \rightarrow 0 < x < \frac{\pi}{4} \\ \tan y = \frac{1}{5} & \text{avec } 0 \le y \le \frac{\pi}{2} \rightarrow 0 < y < \frac{\pi}{4} \\ \tan z = \frac{1}{8} & \text{avec } 0 \le z \le \frac{\pi}{2} \rightarrow 0 < z < \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

$$\rightarrow x + y + z = \frac{\pi}{4} + k\pi < \frac{3\pi}{4} \rightarrow \text{ La seule solution possible est } k = 0$$

$$\rightarrow \boxed{x + y + z = \frac{\pi}{4}}$$

Le 19 septembre 2006

EXTRI186 – Mons – Juillet 2003

Résoudre l'équation trigonométrique suivante :

$$\sin^2\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=\cos^2\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$$

et représenter les solutions sur le cercle trigonométrique

L'équation s'écrit : $\cos^2\left(\frac{\pi}{2}-2x-\frac{\pi}{6}\right)=\cos^2\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$

$$\rightarrow \cos^2\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=\cos^2\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\rightarrow \cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=\pm\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$$

<u>1er cas</u> $\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$

$$\rightarrow\begin{cases}2x-\frac{\pi}{3}=x+\frac{\pi}{3}+2k\pi \rightarrow \boxed{x=\frac{2\pi}{3}+2k\pi}\\[2ex] 2x-\frac{\pi}{3}=-x-\frac{\pi}{3}+2k\pi \rightarrow \boxed{x=\frac{2k\pi}{3}}\end{cases}$$

<u>2ème cas</u> $\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=-\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$

$$\rightarrow\begin{cases}2x-\frac{\pi}{3}=\pi+x+\frac{\pi}{3}+2k\pi \rightarrow \boxed{x=\frac{5\pi}{3}+2k\pi}\\[2ex] 2x-\frac{\pi}{3}=\pi-x-\frac{\pi}{3}+2k\pi \rightarrow \boxed{x=\frac{\pi}{3}+\frac{2k\pi}{3}}\end{cases}$$

Le 19 septembre 2006

EXTRI187 – Mons – septembre 2003

Dans un triangle *ABC*, si *m* désigne la somme des côtés *b* et *c*, montrer que la relation suivante est vérifiée.

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{m}{\sin B + \sin C}$$

En déduire la résolution du triangle connaissant le côté *a*, l'angle *A* et *m*, somme des côtés *b* et *c*. Donner la solution numérique pour *a* = 12 cm, *A* = 46° et *m* = 24 cm.

Rappel sur les proportions :

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \to \frac{a}{c} = \frac{b}{d} \to \frac{a}{c} + 1 = \frac{b}{d} + 1 \to \frac{a+c}{d} = \frac{b+d}{d} \to \frac{a+c}{b+d} = \frac{c}{d}$$

En partant de la relation des sinus, on obtient :

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = \frac{b+c}{\sin B + \sin C} = \frac{m}{\sin B + \sin C}$$ ce qui démontre la relation

De plus, comme A, B et C sont supplémentaires :

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{m}{\sin B + \sin(A+B)} = \frac{m}{2\sin\left(\frac{A+2B}{2}\right)\cos\left(-\frac{A}{2}\right)} = \frac{m}{2\sin\left(\frac{A+2B}{2}\right)\cos\left(\frac{A}{2}\right)}$$

En conclusion : $\sin\left(\frac{A+2B}{2}\right) = \frac{m\sin A}{2a\cos\left(\frac{A}{2}\right)}$

Grâce à cette relation, on peut résoudre le triangle :

$$\sin\left(\frac{A+2B}{2}\right) = \frac{24\sin 46°}{2\times 12\times\cos\left(\frac{46}{2}\right)} = 0.781 \to \frac{A+2B}{2} = 51.4° \to \begin{cases} B = 28,4° \\ C = 105,6° \end{cases}$$

Et $\begin{cases} b = \frac{a}{\sin A}\sin B = 7.93\ cm \\ c = \frac{a}{\sin A}\sin C = 16.07\ cm \end{cases}$ on a bien $b + c = 24\ cm$

Le 19 septembre 2006

EXTRI188 – Mons – septembre 2003

Démontrer que la relation suivante est vérifiée.

$$\cos 2a + \cos 2b + \cos 2c = -1 - 4\cos a \cos b \cos c$$

si a, b et c sont des angles supplémentaires.

Partons du membre de gauche :

$$\begin{aligned}\cos 2a + \cos 2b + \cos 2c &= 2\cos(a+b)\cos(a-b) + 2\cos^2 - 1\\ &= -2\cos c\cos(a-b) + 2\cos^2 c - 1\\ &= -2\cos c\left(\cos(a-b) - \cos c\right) - 1\\ &= -4\cos c\cos a\cos b - 1\end{aligned}$$

C'est-à-dire le membre de droite.

Rappel :

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2 a - 1$$

Solution proposée par Frédéric Garcet

$$C = 180° - (A+B)$$

$$\cos C = \cos\left(180° - (A+B)\right) = -\cos(A+B)$$

$$\cos 2C = \cos\left(360° - 2(A+B)\right) = \cos\left(-2(A+B)\right) = \cos\left(2(A+B)\right)$$

$$\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C = -1 - 4\cos A\cos B\cos C$$

$$\underbrace{\cos 2A + \cos 2B}_{Simpson} + \underbrace{\cos\left(2(A+B)\right) + 1}_{Carnot} = -4\cos A\cos B\left(-\cos(A+B)\right)$$

$$2\cos(A+B)\cos(A-B) + 2\cos^2(A+B) = 4\cos A\cos B\cos(A+B)$$

$$2\cos(A+B)\left[\cos(A-B) + \cos(A+B)\right] = 4\cos A\cos B\cos(A+B)$$

$$2\cos(A+B).2\cos A.\cos(-B) = 4\cos A\cos B\cos(A+B)$$

$$4\cos A\cos B\cos(A+B) = 4\cos A\cos B\cos(A+B) \quad \rightarrow \quad OK$$

Le 19 septembre 2006. Modifié le 2 juillet 08

EXTRI189 – Mons – septembre 2003

Démontrer que la relation suivante est vérifiée.

$$\frac{\sin a + 2\sin 2a + \sin 3a}{\sin 3a + 2\sin 4a + \sin 5a} = \frac{1}{2\cos 2a}$$

---

la relation peut s'écrire :

$2\cos 2a\left(\sin a + 2\sin 2a + \sin 3a\right) = \sin 3a + 2\sin 4a + \sin 5a$

Compte tenu que

$\sin a + \sin 3a = 2\sin 2a\cos a$

$\sin 3a + \sin 5a = 2\sin 4a\cos a$

$\to 2\cos 2a\left(2\sin 2a\cos a + 2\sin 2a\right) = 2\sin 4a\cos a + 2\sin 4a$

$\to 4\sin 2a\cos 2a\left(\cos a + 1\right) = 2\sin 4a\left(\cos a + 1\right)$

$\to 2\sin 4a\left(\cos a + 1\right) = 2\sin 4a\left(\cos a + 1\right)$

Le 19 septembre 2006