

Exercices résolus de mathématiques.

Trigonométrie

Calcul numérique

TRI 22

EXTRI220-EXTRI229

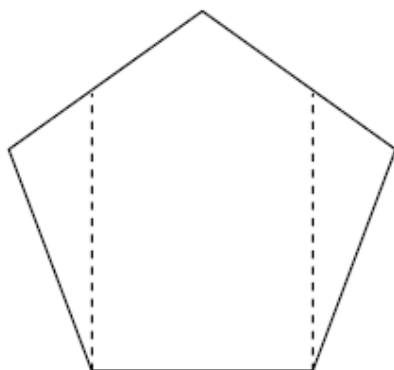
<http://www.matheux.be.tf>

Jacques Collot

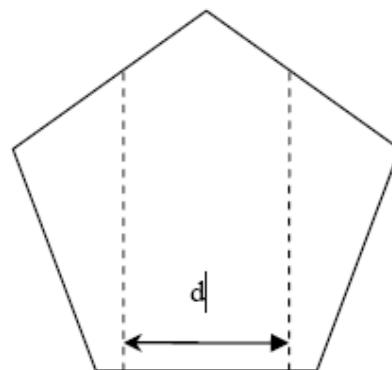
Juillet 08

EXTRI220 – EPL, UCL, LLN, septembre 2006

Un parterre de fleurs a la forme d'un pentagone régulier dont le côté a une longueur de 2 mètres. On décide de mettre des fleurs en forme de drapeau tricolore dans ce pentagone. Deux solutions sont considérées :



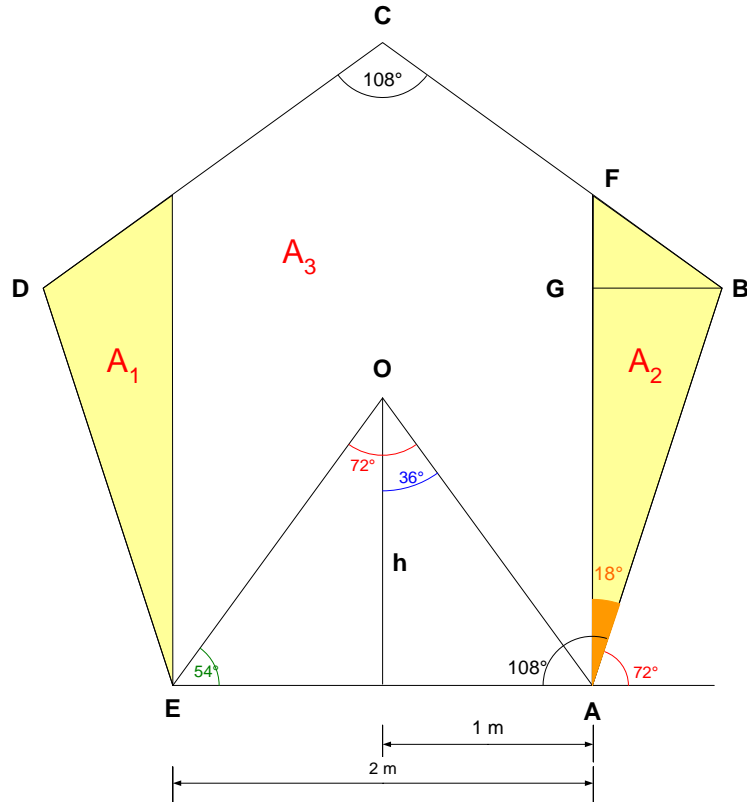
Solution 1



Solution 2

1. La première solution : tracer deux verticales à partir des extrémités du côté inférieur. Quelles sont les aires des trois parties de ce parterre (en m^2 et à deux décimales près)?
2. La deuxième solution : tracer deux verticales de façon symétrique par rapport au centre et de façon à avoir trois parties de surface égale. Quelle est la distance d entre ces deux verticales (en m et à deux décimales près)?
3. Indiquez sur un croquis les angles et distances intermédiaires que vous calculez.

Solution proposée par Michel GOFFIN



1) Les angles principaux sont indiqués sur la figure.

Calculons l'aire de A_1 et A_2 : $A_1 = A_2 = \frac{FA \times GB}{2}$

$$\text{Or } \begin{cases} GB = AB \sin 18^\circ \\ \frac{FA}{\sin 108^\circ} = \frac{AB}{\sin 54^\circ} \Rightarrow FA = AB \frac{\sin 108^\circ}{\sin 54^\circ} \end{cases}$$

$$\text{Donc : } A_1 = A_2 = \frac{1}{2} AB^2 \frac{\sin 18^\circ \times \sin 108^\circ}{\sin 54^\circ}$$

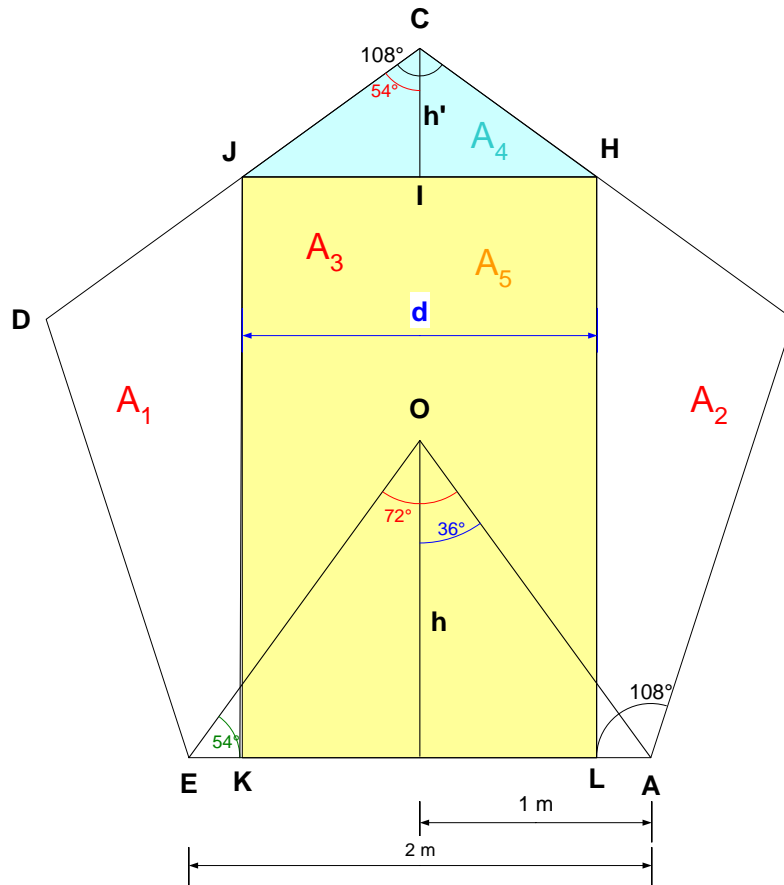
Sachant que $\begin{cases} 108^\circ = 90^\circ + 18^\circ \\ 54^\circ = 90^\circ - 36^\circ \end{cases}$, on peut dire que

$$A_1 = A_2 = \frac{1}{2} AB^2 \frac{\sin 18^\circ \times \cos 18^\circ}{\cos 36^\circ} = \frac{1}{4} AB^2 \tan 36^\circ = \boxed{0.7265 \text{ m}^2}$$

D'autre part, nous avons : $h = 1 \times \tan 54^\circ$

$$\text{Aire du pentagone : } A = \frac{5 \times h \times c}{2} = 5 \tan 54^\circ = 6.8819 \text{ m}^2$$

$$\text{Et donc } A_3 = A - 2A_1 = 6.8819 - 2 \times 0.7265 = \boxed{5.4289 \text{ m}^2}$$



2) Les surfaces deviennent $A_1 = A_2 = A_3 = \frac{A}{3} = \frac{6.90}{3} = 2.30 \text{ m}^2$

Calculons A_3 en fonction de d . Nous avons $A_3 = A_4 + A_5$

$$IA = h' = \frac{d}{2 \tan 54^\circ} = 0.36 d \rightarrow A_4 = \frac{h' \times JH}{2} = 0.18 d^2$$

A_5 est un simple rectangle.

La hauteur KJ de ce rectangle est $KJ = R + h - h'$ où R est le rayon du cercle circonscrit

$$\text{au pentagone : } R = \frac{EA}{2 \cos 54^\circ} = \frac{2}{2 \cos 54^\circ} = 1.70 \text{ m}$$

$$\rightarrow KJ = 1.70 + 1.38 - 0.36d = 3.08 - 0.36d$$

$$\rightarrow A_5 = KL \times JK = d \times (3.08 - 0.36d)$$

$$\text{Finalement, } A_3 = A_4 + A_5 = 3.08d - 0.36d^2 + 0.18 d^2 = 3.08d - 0.18d^2$$

Il nous reste à résoudre d'équation suivante :

$$2.30 = 3.08d - 0.18d^2 \rightarrow 0.18d^2 - 3.08d + 2.30 = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} d = 0.78 \text{ m} \\ d = 16.33 \text{ à rejeter} \end{cases} \rightarrow \boxed{d = 0.78 \text{ m}}$$

EXTRI221 – FACSA, ULG, Liège, juillet 2007

Démontrer l'identité :

$$\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{1}{2}(1 + \cos^2 2x)$$

$$\begin{aligned}\sin^4 x + \cos^4 x &= \sin^4 x + 2\sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x - 2\sin^2 x \cos^2 x \\ &= (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x \\ &= 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x = \frac{1}{2}(2 - \sin^2 2x) = \frac{1}{2}(2 - 1 + \cos^2 2x) \\ &= \frac{1}{2}(1 + \cos^2 2x)\end{aligned}$$

Le 3 juillet 07. Relu par Benoit Baudelet.

EXTRI222 – FACSA, ULG, Liège, juillet 2007

Montrer que si a, b, c sont des nombres positifs vérifiant,

$$a > b \text{ et } c^2 = a^2 - b^2$$

Alors l'expression

$$\sqrt{(a \cos \phi + c)^2 + b^2 \sin^2 \phi} + \sqrt{(a \cos \phi - c)^2 + b^2 \sin^2 \phi}$$

a une valeur indépendante de ϕ . Trouver cette valeur.

$$E = \sqrt{\underbrace{(a \cos \phi + c)^2 + b^2 \sin^2 \phi}_{E_1}} + \sqrt{\underbrace{(a \cos \phi - c)^2 + b^2 \sin^2 \phi}_{E_2}}$$

Comme tous les termes en dessous des racines sont des carrés, il n'y a pas de condition d'existence.

Traisons E_1 et E_2 séparément.

$$\begin{aligned}E_1 &= (a \cos \phi + c)^2 + b^2 \sin^2 \phi = a^2 \cos^2 \phi + 2ac \cos \phi + c^2 + (a^2 - c^2) \sin^2 \phi \\ &= a^2 (\cos^2 \phi + \sin^2 \phi) + 2ac \cos \phi + c^2 (1 - \sin^2 \phi) \\ &= a^2 + 2ac \cos \phi + c^2 \cos^2 \phi = (a + c \cos \phi)^2\end{aligned}$$

$$\rightarrow \sqrt{E_1} = |a + c \cos \phi| = a + c \cos \phi$$

Car en vertu des hypothèses $a > c$ et $-1 \leq \cos \phi \leq 1$

$$\begin{aligned}E_2 &= (a \cos \phi - c)^2 + b^2 \sin^2 \phi = a^2 \cos^2 \phi - 2ac \cos \phi + c^2 + (a^2 - c^2) \sin^2 \phi \\ &= a^2 (\cos^2 \phi + \sin^2 \phi) - 2ac \cos \phi + c^2 (1 - \sin^2 \phi) \\ &= a^2 - 2ac \cos \phi + c^2 \cos^2 \phi = (a - c \cos \phi)^2\end{aligned}$$

$$\rightarrow \sqrt{E_2} = |a - c \cos \phi| = a - c \cos \phi$$

Car en vertu des hypothèses $a > c$ et $-1 \leq \cos \phi \leq 1$

$$\rightarrow E = \sqrt{E_1} + \sqrt{E_2} = a + c \cos \phi + a - c \cos \phi = \boxed{2a}$$

Le 3 juillet 07. Relu par Benoit Baudelet

EXTRI223 – FACSA, ULG, Liège, juillet 2007

Résoudre l'équation

$$\sin 5x - \sin 3x = \cos 6x + \cos 2x$$

Représenter les solutions sur le cercle trigonométrique.

Utilisons Simpson

$$\sin 5x - \sin 3x = \cos 6x + \cos 2x$$

$$2 \cos 4x \sin x = 2 \cos 4x \cos 2x$$

1) $\cos 4x = 0$

$$\cos 4x = 0 \rightarrow 4x = \pm \frac{\pi}{2} + 2k\pi \rightarrow x = \pm \frac{\pi}{8} + k \frac{\pi}{2}$$

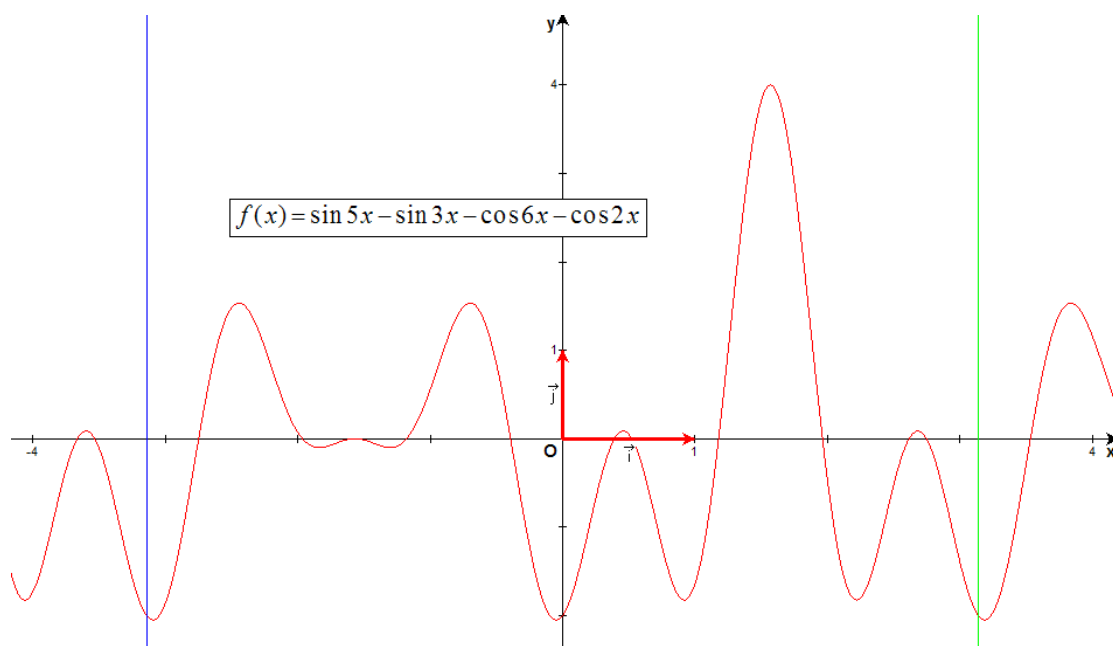
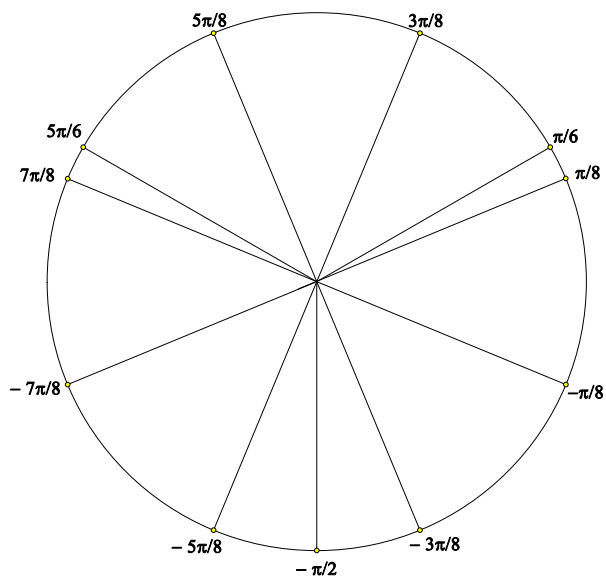
2) $\sin x = \cos 2x$

$$\sin x = \cos 2x \rightarrow \sin x = 1 - 2 \sin^2 x \rightarrow 2 \sin^2 x + \sin x - 1 = 0$$

$$\rightarrow \sin x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{-1 \pm 3}{4} \rightarrow \begin{cases} \sin x = -1 \rightarrow x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ \sin x = \frac{1}{2} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \end{cases} \end{cases}$$

Pour $x \in [-\pi, \pi]$, les solutions sont

$$S : \left\{ -\frac{7\pi}{8}, -\frac{5\pi}{8}, -\frac{\pi}{2}, -\frac{3\pi}{8}, -\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{6}, \frac{3\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{8} \right\}$$



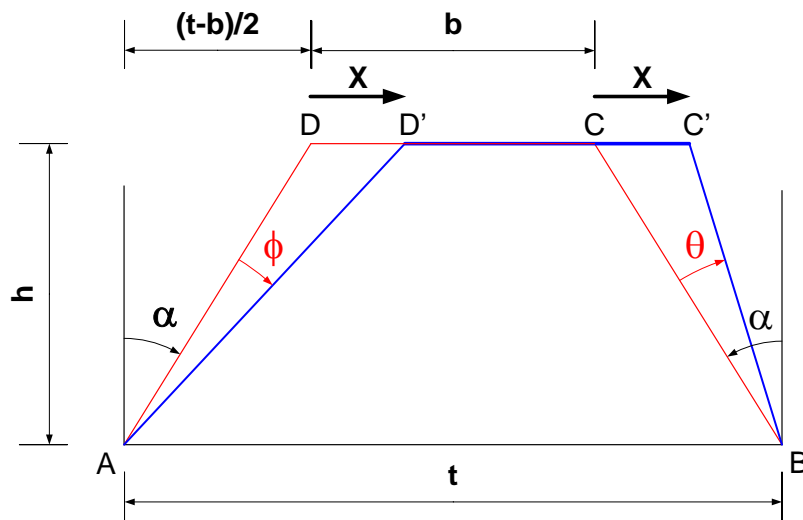
Le 3 juillet 07

EXTRI224 – FACSA, ULG, Liège, juillet 2007

Soit le trapèze isocèle représenté à la figure 1. La grande base à une longueur t , la hauteur vaut h , l'angle entre ses côtés obliques et la verticale vaut α et la petite base à une longueur notée b .

On déplace le sommet C vers la droite d'une distance x , de telle sorte que le côté BC est incliné d'un angle θ par rapport à BC . On considère le trapèze $ABC'D'$ tel que $C'D' = CD = b$. Le côté AD' est alors incliné d'un angle ϕ par rapport à AD .

- Montrer qu'il existe un angle α tel que : $\cot \phi - \cot \theta = 2$
- Déterminer la valeur numérique de cet angle α si $t = 2$ m et $h = 0.5$ m



Pour simplifier, posons : $c = \frac{t-b}{2}$

Nous avons immédiatement les relations suivantes.

$$(1) \cot \alpha = \frac{h}{c} \quad (2) \cot(\alpha + \phi) = \frac{h}{c+x} \quad (3) \cot(\alpha - \theta) = \frac{h}{c-x}$$

Traitons la relation (2) et la relation (3) en tenant compte de (1)

$$(2) \rightarrow \cot(\alpha + \phi) = \frac{\cot \alpha \cot \phi - 1}{\cot \alpha + \cot \phi} = \frac{\frac{h}{c} \cot \phi - 1}{\frac{h}{c} + \cot \phi} = \frac{h}{c+x}$$

$$\rightarrow \frac{h \cot \phi - c}{h + c \cot \phi} = \frac{h}{c+x} \rightarrow h(c+x) \cot \phi - c(c+x) = h^2 + ch \cot \phi$$

$$\rightarrow hx \cot \phi = h^2 + c(c+x) \quad (4)$$

$$(3) \rightarrow \cot(\alpha - \theta) = \frac{\cot \alpha \cot \theta + 1}{-\cot \alpha + \cot \theta} = \frac{\frac{h}{c} \cot \theta + 1}{-\frac{h}{c} + \cot \theta} = \frac{h}{c-x}$$

$$\rightarrow \frac{h \cot \theta + c}{-h + c \cot \theta} = \frac{h}{c-x} \rightarrow h(c-x) \cot \theta + c(c-x) = -h^2 + ch \cot \theta$$

$$\rightarrow hx \cot \theta = h^2 + c(c-x) \quad (5)$$

$$\text{Donc } (4) - (5) \rightarrow hx(\cot \phi - \cot \theta) = h^2 + c(c+x) - h^2 - c(c-x) = 2cx$$

$$\rightarrow \boxed{\cot \phi - \cot \theta = \frac{t-b}{h} = 2 \tan \alpha}$$

Il nous faut donc que $\tan \alpha = 1$, c'est à dire que $\alpha = 45^\circ$.

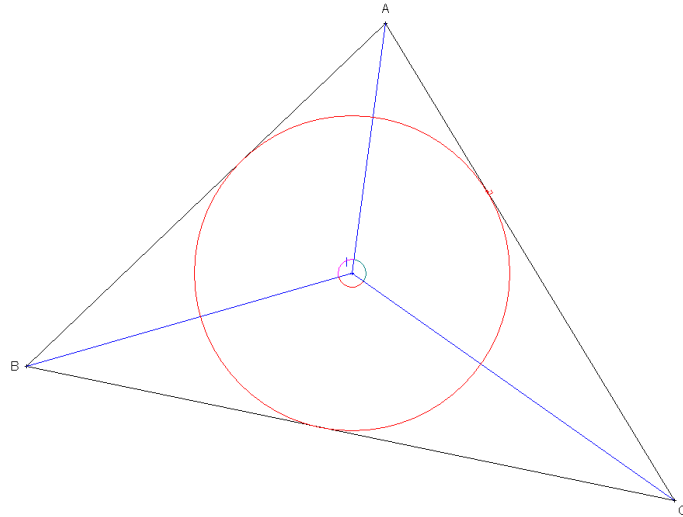
Dans ce cas, $\boxed{\cot \phi - \cot \theta = 2}$, quel que soit le déplacement $x = CC'$.

EXTRI225 – Facs, ULB, Bruxelles, septembre 1999

Si I est le centre du cercle inscrit du triangle ABC et si α, β et γ désignent respectivement les angles BIC , CIA , et AIB démontrer que

$$4 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma = \sin A + \sin B + \sin C$$

Solution proposée par Benoit Baudalet



Pour rappel, I , centre du cercle inscrit est le point d'intersection des bissectrices du triangle ABC .

On a $\sin A + \sin B = 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$ (Simpson).

Or $A+B+C = \pi$, donc $\sin \frac{A+B}{2} = \sin \frac{\pi-C}{2} = \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{C}{2} \right) = \cos \frac{C}{2}$.

On peut donc écrire que $\sin A + \sin B = 2 \cos \frac{C}{2} \cos \frac{A-B}{2}$.

D'autre part,

$$\sin C = 2 \sin \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2} = 2 \sin \frac{\pi - (A+B)}{2} \cos \frac{C}{2} = 2 \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{A+B}{2} \right) \cos \frac{C}{2} = 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{C}{2}.$$

On a donc

$$\begin{aligned} \sin A + \sin B + \sin C &= 2 \cos \frac{C}{2} \cos \frac{A-B}{2} + 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{C}{2} \\ &= 2 \cos \frac{C}{2} \left(\cos \frac{A-B}{2} + \cos \frac{A+B}{2} \right) \\ &= 2 \cos \frac{C}{2} \left(2 \cos \frac{\frac{A-B}{2} + \frac{A+B}{2}}{2} \cos \frac{\frac{A-B}{2} - \frac{A+B}{2}}{2} \right) \\ &= 4 \cos \frac{C}{2} \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \end{aligned}$$

Or, on a successivement

- $\alpha + \frac{B}{2} + \frac{C}{2} = \pi$ (angles du triangle BIC) donc

$$\sin \alpha = \sin \left(\pi - \frac{B+C}{2} \right) = \sin \frac{B+C}{2} = \sin \frac{\pi-A}{2} = \cos \frac{A}{2}$$

- $\beta + \frac{A}{2} + \frac{C}{2} = \pi$ (angles du triangle AIC) donc

$$\sin \beta = \sin \left(\pi - \frac{A+C}{2} \right) = \sin \frac{A+C}{2} = \sin \frac{\pi-B}{2} = \cos \frac{B}{2}$$

- $\gamma + \frac{A}{2} + \frac{B}{2} = \pi$ (angles du triangle AIB) donc

$$\sin \gamma = \sin \left(\pi - \frac{A+B}{2} \right) = \sin \frac{A+B}{2} = \sin \frac{\pi-C}{2} = \cos \frac{C}{2}$$

On a donc bien finalement que $4 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma = \sin A + \sin B + \sin C$.

EXTRI226 – Bruxelles, juillet 1999

Démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}_0$ et $\forall \theta \in \mathbb{N}_0$ tel que $\sin \frac{\theta}{2} \neq 0$, on a

$$1 + \cos \theta + \cos 2\theta + \cos 3\theta + \dots + \cos (n-1)\theta = \frac{\cos \frac{(n-1)\theta}{2} \cdot \sin \frac{n\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}}$$

Solution proposée par Benoit Baudalet

Posons : $S_n = 1 + \cos \theta + \cos 2\theta + \cos 3\theta + \dots + \cos (n-1)\theta$

$$T_n = \frac{\cos \frac{(n-1)\theta}{2} \cdot \sin \frac{n\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}}$$

On doit donc montrer que $S_n = T_n (= f_n)$.

(1) f_1 est vraie. En effet, $S_1 = 1$ et $T_1 = \frac{1 \cdot \sin \frac{\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}} = 1$ car $\sin \frac{\theta}{2} \neq 0$ par hypothèse.

(2) Supposons que f_n soit vraie et montrons qu'alors f_{n+1} est alors vraie.

En effet :

$$\begin{aligned}
S_{n+1} &= 1 + \cos \theta + \cos 2\theta + \cos 3\theta + \dots + \cos (n-1)\theta + \cos n\theta \\
&= (1 + \cos \theta + \cos 2\theta + \cos 3\theta + \dots + \cos (n-1)\theta) + \cos n\theta \\
&= S_n + \cos n\theta \\
&= \frac{\cos \frac{(n-1)\theta}{2} \cdot \sin \frac{n\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}} + \cos n\theta \\
&= \frac{1}{\sin \frac{\theta}{2}} \left[\cos \frac{(n-1)\theta}{2} \cdot \sin \frac{n\theta}{2} + \cos n\theta \cdot \sin \frac{\theta}{2} \right] \\
&= \frac{1}{\sin \frac{\theta}{2}} \left[\left(\cos \frac{n\theta}{2} \cdot \cos \frac{\theta}{2} + \sin \frac{n\theta}{2} \cdot \sin \frac{\theta}{2} \right) \cdot \sin \frac{n\theta}{2} + \left(\cos^2 \frac{n\theta}{2} - \sin^2 \frac{n\theta}{2} \right) \cdot \sin \frac{\theta}{2} \right] \\
&= \frac{1}{\sin \frac{\theta}{2}} \left[\cos \frac{n\theta}{2} \cdot \cos \frac{\theta}{2} \cdot \sin \frac{n\theta}{2} + \cancel{\sin^2 \frac{n\theta}{2} \cdot \sin \frac{\theta}{2}} + \cos^2 \frac{n\theta}{2} \cdot \sin \frac{\theta}{2} - \cancel{\sin^2 \frac{n\theta}{2} \cdot \sin \frac{\theta}{2}} \right] \\
&= \frac{1}{\sin \frac{\theta}{2}} \left[\cos \frac{n\theta}{2} \cdot \cos \frac{\theta}{2} \cdot \sin \frac{n\theta}{2} + \cos^2 \frac{n\theta}{2} \cdot \sin \frac{\theta}{2} \right] \\
&= \frac{\cos \frac{n\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}} \left[\cos \frac{\theta}{2} \cdot \sin \frac{n\theta}{2} + \cos \frac{n\theta}{2} \cdot \sin \frac{\theta}{2} \right] \\
&= \frac{\cos \frac{n\theta}{2} \cdot \sin \left(\frac{\theta}{2} + \frac{n\theta}{2} \right)}{\sin \frac{\theta}{2}} \\
&= \frac{\cos \frac{n\theta}{2} \cdot \sin \frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}} \\
&= T_{n+1}
\end{aligned}$$

Le 17 juillet 07. Relu par Steve Stumson.

EXTRI227 – FACS, ULB, Bruxelles, juillet 1999
FACSA, ULG, Liège, Juillet 10.

Résoudre l'équation

$$\cos^4 x + \sin^4 x = \sin x \cdot \cos x$$

Solution proposée par Benoit Baudalet

On a successivement

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$$(\cos^2 x + \sin^2 x)^2 = 1$$

$$\cos^4 x + 2\cos^2 x \cdot \sin^2 x + \sin^4 x = 1$$

$$\cos^4 x + \sin^4 x = 1 - 2\cos^2 x \cdot \sin^2 x$$

L'équation initiale devient alors

$$1 - 2\sin^2 x \cdot \cos^2 x = \sin x \cdot \cos x \Leftrightarrow 2\sin^2 x \cdot \cos^2 x + \sin x \cdot \cos x - 1 = 0$$

On pose $t = \sin x \cdot \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$ et l'équation devient alors $2t^2 + t - 1 = 0$

dont les solutions sont $t_1 = \frac{-1 + \sqrt{9}}{4} = \frac{1}{2}$ et $t_2 = \frac{-1 - \sqrt{9}}{4} = -1$.

- $t = \frac{1}{2} \sin 2x = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin 2x = 1 \Rightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$
- $t = \frac{1}{2} \sin 2x = -1 \Rightarrow \sin 2x = -2$: à rejeter.

Finalelement :
$$S = \left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Le 17 juillet 07. Relu par Steve Stumson.

EXTRI228 – ERM, juillet 2003

Montrer que $\tan \frac{\pi}{12} = 2 - \sqrt{3}$.

Solution proposée par Benoit Baudelet

Puisque $\tan 2\varphi = \frac{2 \tan \varphi}{1 - \tan^2 \varphi}$, on a $\tan \frac{\pi}{6} = \frac{2 \tan \frac{\pi}{12}}{1 - \tan^2 \frac{\pi}{12}}$ ou encore, en posant $\tan \frac{\pi}{12} = x$,

$$\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{2x}{1-x^2} \Leftrightarrow x^2 + 2\sqrt{3}x - 1 = 0$$

et puisque $\Delta = (2\sqrt{3})^2 - 4.1.(-1) = 16$, les deux solutions de cette dernière équation sont

$$x_1 = 2 - \sqrt{3} \quad \text{et} \quad x_2 = 2 + \sqrt{3}$$

Mais, $0 < \frac{\pi}{12} < \frac{\pi}{4}$, donc $0 = \tan 0 < \tan \frac{\pi}{12} < \tan \frac{\pi}{4} = 1$, donc finalement

$$\boxed{\tan \frac{\pi}{12} = 2 - \sqrt{3}}$$

Le 17 juillet 07. Relu par Steve Stumson.

EXTRI229 – ERM, juillet 2003

On donne le triangle ABC où $\overline{BC} = 10$, $\overline{AC} = 4$ et $\cos B = \frac{2\sqrt{6}}{5}$.

On demande de calculer la valeur de l'angle A .

Solution proposée par Benoit Baudalet

- Puisque $\cos B = \frac{2\sqrt{6}}{5}$, on a $\sin B = \sqrt{1 - \left(\frac{2\sqrt{6}}{5}\right)^2} = \frac{1}{5}$.
 - Grâce à la relation des sinus dans le triangle ABC , on a $\frac{\overline{AC}}{\sin B} = \frac{\overline{BC}}{\sin A}$,
d'où $\sin A = \frac{\overline{BC} \sin B}{\overline{AC}} = \frac{10 \cdot \frac{1}{5}}{4} = \frac{1}{2}$ et donc $\boxed{A = 30^\circ}$.
-

Le 17 juillet 07. Relu par Steve Stumson.