

Exercices résolus de mathématiques.

Trigonométrie

Calcul numérique

TRI 26

EXTRI260-EXTRI269

<http://www.matheux.c.la>

Jacques Collot
Benoit Baudalet – Steve Tumson

Novembre 08

EXTRI260 – FACS, ULB, Bruxelles, juillet 08

Démontrer que $\sin 70^\circ \cos 50^\circ + \sin 260^\circ \cos 280^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4}$

$$\text{Rappel : } \sin a \cos b = \frac{1}{2} \sin \frac{a+b}{2} + \sin \frac{a-b}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{Donc : } \sin 70^\circ \cos 50^\circ + \sin 260^\circ \cos 280^\circ &= \frac{1}{2} \left[\sin \frac{70+50}{2} + \sin \frac{70-50}{2} + \sin \frac{260+280}{2} + \sin \frac{260-280}{2} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\sin 60 + \cancel{\sin 10} + \underbrace{\sin 270}_{=0} - \cancel{\sin 10} \right] \\ &= \frac{1}{2} \sin 60 = \frac{\sqrt{3}}{4} \end{aligned}$$

Le 3 novembre 08

EXTRI261 – FACS, ULB, Bruxelles, juillet 08

Résoudre dans \mathbb{R} l'équation $\sin 4x + \sin 6x + \cos 8x = \cos 2x$

$$\sin 4x + \sin 6x + \cos 8x = \cos 2x \rightarrow \sin 4x + \sin 6x = \cos 2x - \cos 8x$$

Simpson $\rightarrow \cancel{\sin 5x} \cos(-x) = -\cancel{\sin 5x} \sin(-3x)$

1) $\sin 5x = 0 \rightarrow x = \frac{\pi}{5} + \frac{k\pi}{5}$

2) Il reste : $\cos x = \sin 3x \rightarrow \sin 3x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

$$\rightarrow \begin{cases} 3x = \frac{\pi}{2} - x + 2k\pi \rightarrow 4x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \rightarrow x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2} \\ 3x = \pi - \frac{\pi}{2} + x + 2k\pi \rightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \rightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi \end{cases}$$

EXTRI262 – FACS, ULB, Bruxelles, septembre 08

Démontrer que $\frac{1}{\sin 10^\circ} - \frac{\sqrt{3}}{\cos 10^\circ} = 4$

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sin 10} - \frac{\sqrt{3}}{\cos 10} &= 4 \\ \Leftrightarrow \cos 10 - \sqrt{3} \sin 10 &= 4 \sin 10 \cos 10 \\ \Leftrightarrow \cos 10 - \tan 60 \sin 10 &= 2 \sin 20 \\ \Leftrightarrow \cos 10 \cos 60 - \sin 60 \sin 10 &= 2 \sin 20 \cos 60 \\ \Leftrightarrow \cos(10 + 60) &= 2 \sin 20 \cos 60 \\ \Leftrightarrow \cos 70 &= 2 \sin 20 \cos 60 \\ \Leftrightarrow \sin 20 &= 2 \sin 20 \cos 60 \\ \Leftrightarrow 1 &= 2 \cos 60 \\ \Leftrightarrow 1 &= 2 \times \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow 1 &= 1 \quad \text{OK}\end{aligned}$$

Le 26 août 08. Modifié le 24 janvier 2010 (Carine Demesmaeker)

EXTRI263 – FACSA, ULG, Liège, septembre 08

Montrer que, dans un triangle ABC , on a toujours

$$\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4 \sin A \sin B \sin C$$

$$\begin{aligned} C = \pi - (A + B) &\rightarrow \sin C = \sin(A + B) \text{ et } \cos C = -\cos(A + B) \\ \underbrace{\sin 2A + \sin 2B}_{\text{Simpson}} + \sin 2C &= \underbrace{2 \sin(A + B)}_{=\sin C} \cos(A - B) + 2 \sin C \underbrace{\cos C}_{=-\cos(A+B)} \\ &= 2 \sin C [\cos(A - B) - \cos(A + B)] \\ &= 2 \sin C [\cancel{\cos A \cos B} + \sin A \sin B - \cancel{\cos A \cos B} + \sin A \sin B] \\ &= 4 \sin A \sin B \sin C \end{aligned}$$

21 décembre 08

EXTRI264 – FACSA, ULG, Liège, septembre 08

Un pentagone convexe irrégulier $ABCDE$ est inscrit dans une circonférence de rayon 5 cm (voir figure 8).

- Quel est le périmètre du pentagone $ABCDE$?
- Quelle est la surface du pentagone $ABCDE$?

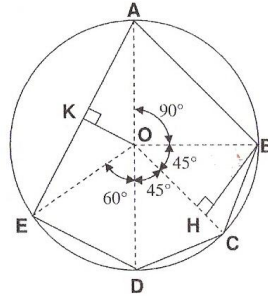


FIG. 8 Pentagone convexe irrégulier ABCDE

1) Périmètre

$$AB = 5\sqrt{2}$$

Diagonale d'un carré

$$BC = \sqrt{5^2 + 5^2 - 2 \times 5^2 \cos 45} = 5\sqrt{2 - \sqrt{2}}$$

Formule des cosinus

$$CD = BC$$

$$DE = 5$$

Côté d'un hexagone

$$EA = \sqrt{5^2 + 5^2 - 2 \times 5^2 \cos 120} = 5\sqrt{2 + \sqrt{3}}$$

Formule des cosinus

$$\rightarrow p = AB + BC + CD + DE + EA$$

$$= 5\sqrt{2} + 5\sqrt{2 - \sqrt{2}} + 5\sqrt{2 - \sqrt{2}} + 5 + 5\sqrt{2 + \sqrt{3}}$$

$$= 5(1 + \sqrt{2} + 2\sqrt{2 - \sqrt{2}} + \sqrt{2 + \sqrt{3}}) \approx 51.83 \text{ cm}$$

2) Surface

$$S_{AOB} = \frac{5^2}{2}$$

Demi-carré

$$S_{BCDO} = 2S_{BOC} = 2 \times \frac{1}{2} \times |OB| \times |OC| \times \sin 45 = 2 \times \frac{1}{2} \times 5^2 \times \sin 45 = \frac{5^2 \sqrt{2}}{2}$$

Formule du sinus

$$S_{DOE} = \frac{1}{2} \times 5^2 \times \sin 60 = \frac{5^2 \sqrt{3}}{4}$$

Formule du sinus

$$S_{EOA} = \frac{1}{2} \times 5^2 \times \sin 120 = \frac{5^2 \sqrt{3}}{4}$$

Formule du sinus

$$S_{ABCDE} = S_{AOB} + 2S_{BOC} + S_{DOE} + S_{EOA}$$

$$= \frac{5^2}{2} + \frac{5^2 \sqrt{2}}{2} + 2 \times \frac{5^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{5^2}{2} (1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}) \approx 10.37 \text{ cm}^2$$

EXTRI265 – FACSA, ULG, Liège, septembre 08

On désire calculer EXACTEMENT (sans calculatrice) $\cos \frac{2\pi}{5}$ et $\cos \frac{4\pi}{5}$.

A cette fin, on procédera comme suit.

- a) Montrer que chacun de ces deux angles vérifient l'équation

$$\cos 3\theta = \cos 2\theta \quad (2)$$

- b) Chercher l'ensemble des solutions de l'équation (2) vérifiant $0 \leq \theta < \pi$

Parmi celles-ci, il en est une, que nous noterons θ_1 , dont le cosinus est connu de manière évidente.

- c) Exprimer l'équation (2) en termes de $\cos \theta$. On obtient une équation du troisième degré.

- d) En divisant cette équation par le binôme $(\cos \theta - \cos \theta_1)$, on peut se ramener à une équation du second degré, dont on calculera les racines $\cos \theta_2$ et $\cos \theta_3$.

- e) Déterminer, parmi ces deux racines, laquelle correspond à $\frac{2\pi}{5}$ et laquelle correspond à $\frac{4\pi}{5}$. Justifier ce choix.
-

$$\begin{array}{l}
 \text{a) } \left\{ \begin{array}{l} \cos\left(3 \times \frac{2\pi}{5}\right) = \cos\frac{6\pi}{5} = -\cos\frac{\pi}{5} \\ \cos\left(2 \times \frac{2\pi}{5}\right) = \cos\frac{4\pi}{5} = -\cos\frac{\pi}{5} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \frac{6\pi}{5} \text{ et } \frac{\pi}{5} \text{ sont antisupplémentaires} \\ \frac{4\pi}{5} \text{ et } \frac{\pi}{5} \text{ sont supplémentaires} \end{array} \\
 \left\{ \begin{array}{l} \cos\left(3 \times \frac{4\pi}{5}\right) = \cos\frac{12\pi}{5} = \cos\frac{2\pi}{5} \\ \cos\left(2 \times \frac{4\pi}{5}\right) = \cos\frac{8\pi}{5} = \cos\frac{2\pi}{5} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \frac{12\pi}{5} \text{ et } \frac{\pi}{5} \text{ sont égaux à } 2\pi \text{ près} \\ \frac{8\pi}{5} \text{ et } \frac{2\pi}{5} \text{ sont opposés} \end{array}
 \end{array}$$

$$\text{b) } \cos 3\theta - \cos 2\theta = 0 \xrightarrow{\text{Simpson}} -2 \sin \frac{5\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} = 0$$

$$\text{i) } \sin \frac{\theta}{2} = 0 \rightarrow \theta_1 = 0^\circ$$

$$\text{ii) } \sin \frac{5\theta}{2} = 0 \rightarrow \frac{5\theta}{2} = k\pi \rightarrow \theta = \frac{2k\pi}{5} \rightarrow \begin{cases} \theta_2 = \frac{2\pi}{5} \\ \theta_3 = \frac{4\pi}{5} \end{cases}$$

c) Exprimons $\cos 2\theta$ et $\cos 3\theta$ en fonction de $\cos \theta$

$$\cos 2\theta = 2\cos^2 \theta - 1$$

$$\begin{aligned} \cos 3\theta &= \cos(2\theta + \theta) = \cos 2\theta \cos \theta - \sin 2\theta \sin \theta = (2\cos^2 \theta - 1)\cos \theta - 2\sin^2 \theta \cos \theta \\ &= 2\cos^3 \theta - \cos \theta - 2(1 - \cos^2 \theta)\cos \theta = 4\cos^3 \theta - 3\cos \theta \end{aligned}$$

$$\rightarrow P(\cos \theta) = \cos 3\theta - \cos 2\theta \rightarrow P(\cos \theta) = 4\cos^3 \theta - 2\cos^2 \theta - 3\cos \theta + 1 = 0$$

d) Cette équation est divisible par $(\cos \theta - \cos \theta_1) = (\cos \theta - 1)$

$$\text{Horner : } \begin{array}{c|cccc} & 4 & -2 & -3 & 1 \\ 1 & & 4 & 2 & -1 \\ \hline & 4 & 2 & -1 & 0 \end{array} \rightarrow P(\cos \theta) = (\cos \theta - 1)(4\cos^2 \theta + 2\cos \theta - 1)$$

$$\text{e) Le deuxième facteur a pour racines : } \begin{cases} \cos \theta_2 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4} \approx 0.309 > 0 \rightarrow \cos \theta_2 = \cos \frac{2\pi}{5} \\ \cos \theta_3 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{4} \approx -0.809 < 0 \rightarrow \cos \theta_3 = \cos \frac{4\pi}{5} \end{cases}$$

EXTRI266 – FPMS, Mons, juillet 09

Résoudre l'équation trigonométrique suivante :

$$\cos 4x - 4\cos 2x - 6\sin^2 x + 3 = 0$$

Résolution proposée par Fabienne ZOETARD

$$\cos 4x - 4\cos 2x - 6\sin^2 x + 3 = 0$$

$$2(2\cos^2 x - 1)^2 - 1 - 4(2\cos^2 x - 1) - 6(1 - \cos^2 x) + 3 = 0$$

$$8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 2 - 1 - 8\cos^2 x + 4 - 6 + 6\cos^2 x + 3 = 0$$

$$8\cos^2 x - 10\cos^2 x + 2 = 0$$

$$4\cos^4 x - 5\cos^2 x + 1 = 0$$

$$\Delta = 25 - 16 = 9 \rightarrow \cos^2 x = \frac{5 \pm 3}{8}$$

$$1) \cos^2 x = 1 \rightarrow \begin{cases} \cos x = 1 \\ \cos x = -1 \end{cases} \rightarrow x = k\pi$$

$$2) \cos^2 x = \frac{1}{4} \rightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{1}{2} \rightarrow x = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ \cos x = -\frac{1}{2} \rightarrow x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \end{cases}$$

$$\text{Solutions principales : } \boxed{\left\{ 0, \pi, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3} \right\}}$$

Le 2 juillet 2009

EXTRI267 – FPMS, Mons, juillet 09

Démontrer l'identité suivante, sans utiliser votre calculatrice.

$$\sin 78^\circ - \sin 18^\circ + \cos 132^\circ = 0$$

Résolution proposée par Fabienne ZOETARD

$$\begin{aligned} \sin 78^\circ - \sin 18^\circ + \cos 132^\circ &= 2 \sin 30^\circ \cos 48^\circ + \cos(180^\circ - 48^\circ) \\ &= 2 \sin 30^\circ \cos 48^\circ - \cos 48^\circ \\ &= \cos 48^\circ (2 \sin 30^\circ - 1) \\ &= \cos 48^\circ (1 - 1) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Le 2 juillet 2009

EXTRI268 – FPMS, Mons, juillet 09

Démontrer que si, dans un triangle ABC , la relation

$$a \cdot \cos B = 2b \cdot \sin^2 \frac{A}{2}$$

est vérifiée, alors le triangle est isocèle.

Résolution proposée par Fabienne ZOETARD

$$a \cos B = 2b \sin^2 \frac{A}{2}$$

$$\rightarrow a \cos B = b(1 - \cos A)$$

$$\text{or } \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$$

$$\rightarrow a \cos B = \frac{a \sin B}{\sin A} (1 - \cos A)$$

$$\rightarrow \sin A \cos B = \sin B - \sin B \cos A$$

$$\rightarrow \sin(A + B) = \sin B$$

$$\text{1er cas : } A + B = B + 2k\pi \rightarrow A = 2k\pi \quad A \text{ rejeter}$$

$$\text{2ème cas : } A + B = \pi - B + 2k\pi$$

$$2B = \pi - A + 2k\pi \rightarrow 2 > B = \pi - A$$

$$\text{or } A + B + C = \pi \rightarrow C = \pi - A - B \rightarrow C = B$$

le triangle est donc isocèle de sommet principal A

Le 2 juillet 2009

EXTRI269 – FPMS, Mons, juillet 09

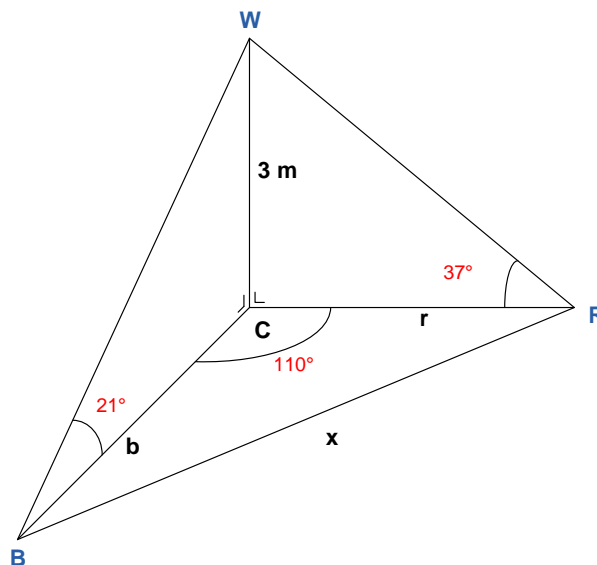
Une webcam est placée à une hauteur h de 3 m par rapport à un plan horizontal de référence.

Cette caméra observe, dans un plan A vertical, une balle rouge (posée sur le plan de référence) sous un angle de 37° par rapport à l'horizontale.

Elle observe également, dans un plan B vertical, une balle bleue (posée sur le plan de référence) sous un angle de 21° par rapport à l'horizontale.

Calculer la distance entre les deux balles si l'angle formé par les plans verticaux A et B est de 110° .

Résolution proposée par Fabienne ZOETARD



Le plan WCR est perpendiculaire au plan BCR

Le plan WCB est perpendiculaire au plan BCR

$WBCR$ est un tétraèdre tel que WC est perpendiculaire au plan BCR

Dans le triangle rectangle WBC : $3 = b \tan 21^\circ$

Dans le triangle rectangle WRC : $3 = r \tan 37^\circ$

Dans le triangle rectangle BRC : $x^2 = b^2 + r^2 - 2br \cos 110^\circ$

$$\begin{aligned} &= \frac{9}{\tan^2 21^\circ} + \frac{9}{\tan^2 37^\circ} - 2 \cdot \frac{3}{\tan 21^\circ} \cdot \frac{3}{\tan 37^\circ} \cdot \cos 110^\circ \\ &\cong 98.21 \end{aligned}$$

$$\rightarrow \boxed{x = 9.91 \text{ m}}$$

Le 2 juillet 2009