Exercices résolus de mathématiques.

Trigonométrie
Calcul numérique

TRI 27

EXTRI270-EXTRI279

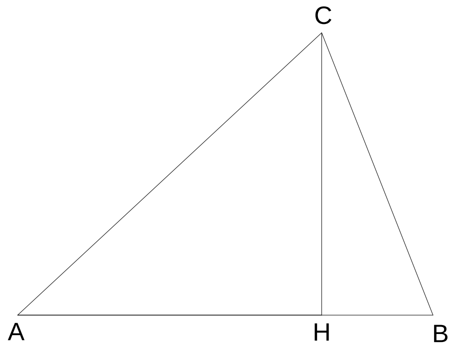
http://www.matheux.c.la

Jacques Collot
Benoit Baudelet – Steve Tumson

Juillet 09

EXTRI270 – FACSA, ULG, Liège, juillet 09

Soit un triangle ABC dont deux côtés AB et AC ont la même longueur R. Par le sommet C, on trace la perpendiculaire CH à AB. On constate alors que les longueurs AH et BC sont égales.
Que vaut l'angle A?



$$\begin{cases} \cos A = \dfrac{AC}{R} \\ CH = R\sin A = AC\sin B \\ 2B = \pi - A \end{cases} \rightarrow R\sin A = R\cos A \sin\frac{\pi - A}{2}$$

$$\rightarrow 2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2} = \cos A \cos\frac{A}{2}$$

1) $\cos\frac{A}{2} = 0 \rightarrow A = \pi$ A rejeter

2) $2\sin\frac{A}{2} = \cos A \rightarrow 2\sin\frac{A}{2} = 1 - 2\sin^2\frac{A}{2} \rightarrow 2\sin^2\frac{A}{2} + 2\sin\frac{A}{2} - 1 = 0$

$$\rightarrow \sin\frac{A}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}$$

On retient la racine positive $\sin\frac{A}{2} = \frac{-1+\sqrt{3}}{2} \rightarrow \frac{A}{2} = 21.47° \rightarrow \boxed{A = 42.97°}$

Le 3 aout 09

EXTRI271 – FACSA, ULG, Liège, juillet 09

Résoudre l'équation suivante :

$$\tan x+\tan 3x+\sin 2x=0$$

Représenter les solutions sur le cercle trigonométrique.

$$CE:\begin{cases} x\neq \dfrac{\pi}{2}+k\pi \\ 3x\neq \dfrac{\pi}{2}+k\pi \to x\neq \dfrac{\pi}{6}+k\dfrac{\pi}{3}\end{cases}$$

$$\tan x+\tan 3x+\sin 2x=0 \to \frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\sin 3x}{\cos 3x}+\sin 2x=0$$

$$\to \sin x\cos 3x+\sin 3x\cos x=-\sin 2x\cos x\cos 3x$$

$$\to \sin 4x=-\sin 2x\cos x\cos 3x \to 2\sin 2x\cos 2x=-\sin 2x\cos x\cos 3x$$

1) $\sin 2x=0 \to 2x=k\pi \to x=k\dfrac{\pi}{2}$ avec k pair sinon à rejeter.

2) $2\cos 2x=-\cos x\cos 3x \xrightarrow{\text{Simpson inverse}} 2\cos 2x=-\dfrac{1}{2}\left(\cos 4x+\cos(-2x)\right)$

$$\to 4\cos 2x=-\cos 4x-\cos 2x \to 4\cos 2x=2\cos^2 2x-1-\cos 2x$$

$$\to 2\cos^2 2x+5\cos 2x-1=0 \to \cos 2x=\frac{-5\pm\sqrt{25+8}}{4}=\frac{-5\pm\sqrt{33}}{4}$$

$$a)\ \cos 2x=\frac{-5+\sqrt{33}}{4}\simeq 0.18614 \to 2x=\pm 1.3836+2k\pi \to x=\pm 0.692+k\pi$$

$$b)\ \cos 2x=\frac{-5-\sqrt{33}}{4}<-1 \quad \text{A rejeter.}$$

$$\text{Conclusion : }\begin{cases} x=k\dfrac{\pi}{2} \quad \text{avec } k \text{ pair} \\ x=\pm 0.692+k\pi \text{ avec } k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

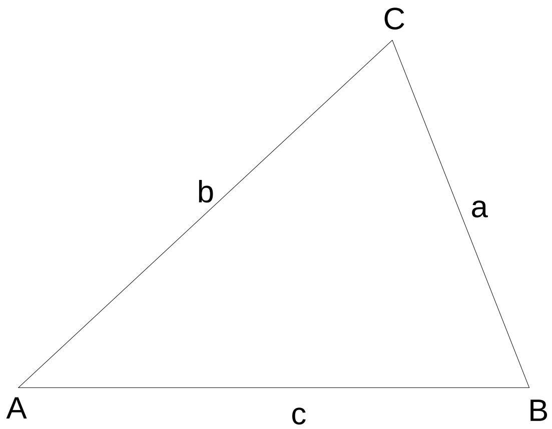
---

7 aout 2009

EXTRI272 – FACSA, ULG, Liège, juillet 09
Polytech, UMONS, Mons, septembre 2005

Montrer que dans tout triangle ABC de côtés a,b,c on a la relation :

$$ab\cos C - ac\cos B = b^2 - c^2$$



$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$

Somme membre à membre $\to b^2 - c^2 = c^2 - b^2 - 2ac\cos B + 2ab\cos C$

$\to 2b^2 - 2c^2 = 2ab\cos C - 2ac\cos B$

$\to b^2 - c^2 = ab\cos C - ac\cos B$

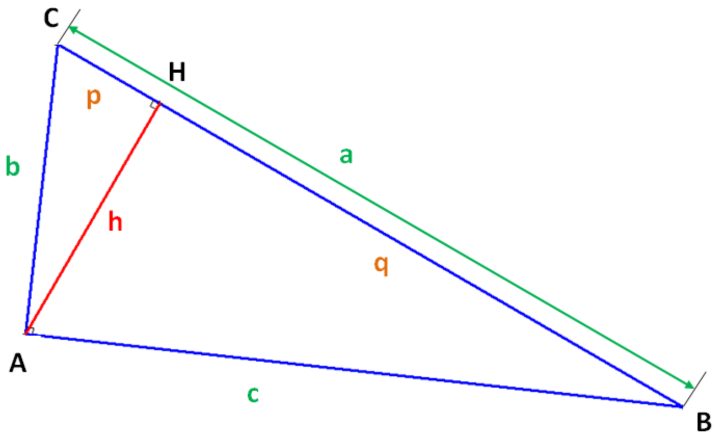
Le 16 août 08

EXTRI273 – EPL, UCL, Louvain, Juillet 09.

Soit un triangle ABC rectangle en A. On désigne par h la hauteur AH, par $p = CH$ et $q = BH$ les projections des côtés b et c sur l'hypoténuse.

1) Représentez graphiquement le problème.
2) Si a et B sont donnés, comment calculer p, q, h et la surface S ? (Donnez les étapes intermédiaires de calcul.)

Résolution proposée par Steve TUMSON



Dans ABC on tire :

* $c = a\cos B$

Dans AHB on peut écrire :

* $h = c\sin B = a\cos B\sin B$
* $q = c\cos B = a\cos^2 B$

On a donc aussi $p = a - q = a\left(1 - \cos^2 B\right) = a\sin^2 B$

L'aire du triangle est la moitié du produit de sa base par sa hauteur :

$$S = \frac{1}{2}ah = \frac{1}{2}a^2\cos B\sin B = \frac{a^2}{4}\sin\left(2B\right)$$

Le 16 août 08

EXTRI274 – EPL, UCL, Louvain, Juillet 09.

On donne l'équation en x suivante : $\left(\sin(a)+\sqrt{3}\cos(a)-\sqrt{2}-1\right)x^2+x-0,25=0$

Pour quelles valeurs de a, les solutions de cette équation sont-elles réelles et distinctes ?

Résolution proposée par Steve TUMSON

C'est un second degré en x, les solutions seront réelles distinctes si le discriminant est strictement positif.

$\left(\sin(a)+\sqrt{3}\cos(a)-\sqrt{2}-1\right)x^2+x-0,25=0$

$$\rho=1-(4)(-0,25)\left(\sin(a)+\sqrt{3}\cos(a)-\sqrt{2}-1\right)=\sin(a)+\sqrt{3}\cos(a)-\sqrt{2}$$

$$\rho>0\Leftrightarrow \sin(a)+\sqrt{3}\cos(a)>\sqrt{2}\Leftrightarrow \sin(a)+\tan\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos(a)>\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin(a)+\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos(a)>\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\Leftrightarrow \sin\left(a+\frac{\pi}{3}\right)>\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{4}+2k\pi<\left(a+\frac{\pi}{3}\right)<\frac{3\pi}{4}+2k\pi \quad \forall k\in\mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \boxed{-\frac{\pi}{12}+2k\pi<a<\frac{5\pi}{12}+2k\pi}$$

Le 16 août 08

EXTRI275 – FACSA, ULG, Liège, septembre 08

Pour les affirmations suivantes, cochez quelle affirmation est vraie.

1) Dans un quadrilatère, la somme des angles est égale à

□ 270° □ 360° □ 540°

2) Dans l'intervalle $-\pi < x < \pi$, l'équation $4\sin^3 x = \sin x$ possède

□ 3 solutions □ 4 solutions □ 5 solutions

3) L'expression $\cos^4 x - \sin^4 x$ est identiquement égale à

□ $\cos(2x)$ □ $\sin(2x)$ □ $\sin x \cos x$

4) Si dans un triangle ABC, les côtés a, b et c (opposés aux angles respectifs A, B et C) satisfont à la relation $a^2 - 2b^2 - c^2 = 0$, alors

□ $A < 90°$ □ $A = 90°$ □ $A > 90°$

Résolution proposée par Steve TUMSON

1) Dans un quadrilatère, la somme des angles est égale à

□ 270° ☒ 360° □ 540°

2) Dans l'intervalle $-\pi < x < \pi$, l'équation $4\sin^3 x = \sin x$ possède

□ 3 solutions □ 4 solutions ☒ 5 solutions

Il y a déja une solution pour $\sin(x) = 0$ dans l'intervalle $-\pi < x < \pi$.

Il reste alors $4\sin^2 x = 1 \Leftrightarrow \sin^2 x - \frac{1}{4} = 0 \Leftrightarrow \left(\sin x - \frac{1}{2}\right)\left(\sin x + \frac{1}{2}\right) = 0.$

Chacun de ces deux facteurs admettent deux zéros sur $-\pi < x < \pi$.

3) L'expression $\cos^4 x - \sin^4 x$ est identiquement égale à

☒ $\cos(2x)$ □ $\sin(2x)$ □ $\sin x \cos x$

$$\cos^4 x - \sin^4 x = \left(\cos^2 x - \sin^2 x\right)\cancel{\left(\cos^2 x + \sin^2 x\right)} = \cos(2x)$$

4) Si dans un triangle ABC, les côtés a, b et c (opposés aux angles respectifs A, B et C) satisfont à la relation $a^2 - 2b^2 - c^2 = 0$, alors

□ $A < 90°$ □ $A = 90°$ ☒ $A > 90°$

Dans un triangle quelconque on a $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(A)$.

La proposition $A = 90°$ est à rejeté immédiatement, car elle implique $a^2 = b^2 + c^2$.

Pour rejoindre l'équation de l'énoncé, il faudrait que $-2bc\cos(A) = b^2$

où, écrit autrement, $\cos(A) = -\frac{b}{2c}$. Un cosinus négatif implique $A > 90°$ sur $0 < A < \pi$.

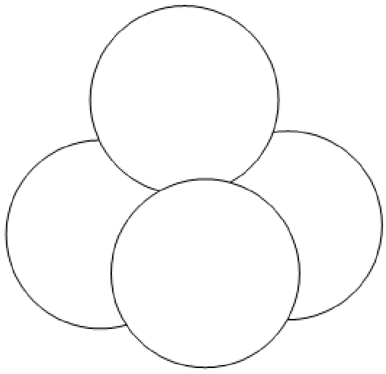
Le 16 août 08

EXTRI276 – EPL, UCL, Louvain, Juillet 09.

On forme une pyramide avec quatre ballons d'un mètre de diamètre, de façon à ce que chaque ballon touche les trois autres. Vu en perspective cela donne la figure ci-dessous.

On vous demande de trouver la hauteur totale de cette construction et de résoudre les étapes intermédiaires suivantes.

1) Quelle forme obtenez-vous si vous reliez les centres des ballons ?
2) Calculez la longueur des arêtes et la hauteur de cette forme à 0,1 m près.
   Indiquez les valeurs intermédiaires de vos calculs sur un croquis.
3) A quelle hauteur se trouve le sommet du ballon supérieur, à 0,1 m près ?

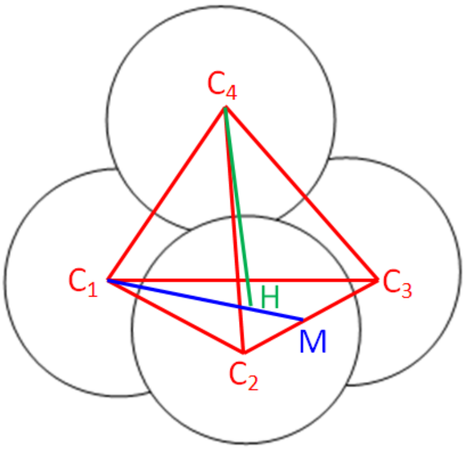


Résolution proposée par Steve TUMSON

1) Un tétraèdre (voir figure ci-dessous)

2) La longueur de chaque arête vaut le double du rayon des sphère : $a = 1$ m. (en effet, chaque arête passe par le point de contact/tangence des sphères dont elle relie les centres).
On projète le sommet C_4 sur la base $C_1C_2C_3$, le pied H de cette hauteur est l'intersection concourante des médianes/médiatrices/hauteurs (puisque le tétraèdre est régulier)
C_1C_2M est droit en M, on peut donc trouver $C_1M = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
L'intersection des médianes d'un triangle se coupent avec un rapport 2/3 1/3 $\Rightarrow C_1H = \frac{\sqrt{3}}{3}$
C_1C_4H est droit en H, on trouve donc $1^2 = h^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 \Leftrightarrow h = \sqrt{\frac{2}{3}} \simeq 0{,}8$ m.

3) La hauteur trouvée précédemment nous donne la hauteur perpendiculaire entre les plans parallèles au sol passant par les centres des sphères basses et de la sphère haute. Pour trouver la hauteur du sommet de la sphère haute, il suffit d'additionner deux fois le rayon des sphères à *h*.
$\Rightarrow \boxed{H = h + 2r \simeq 1{,}8 \text{ m}}$



Le 16 août 08

EXTRI277 – EPL, UCL, Louvain, septembre 09

Pour quelles valeurs de x, l'équation quivante est-elle vérifiée dans l'intervalle $\left]-\pi,\pi\right[$:

$$8\sin^3 x-\sin 3x\leq 0$$

Exprimons $\sin 3x$ en fonction de $\sin x$:

$$\sin 3x=\sin(x+2x)=\sin 2x\cos x+\cos 2x\sin x=2\sin x\cos^2 x+\sin x\left(1-2\sin^2 x\right)$$

$$=\sin x\left(2\left(1-\sin^2 x\right)+1-2\sin^2 x\right)=\sin x\left(3-4\sin^2 x\right)$$

L'équation devient alors :

$$8\sin^3 x-\sin 3x\leq 0\to 8\sin^3 x-\sin x\left(3-4\sin^2 x\right)\leq 0\to \sin x\left(8\sin^2 x-3+4\sin^2 x\right)\leq 0$$

$$\to 3\sin x\left(4\sin^2 x-1\right)\leq 0\to 3\sin x(2\sin x+1)(2\sin x-1)\leq 0$$

Les racines des différents facteurs sont

$$\begin{cases}\sin x & \to x=\pi \text{ et } x=-\pi\\ 2\sin x+1=0 & \to x=-\dfrac{5\pi}{6} \text{ et } x=-\dfrac{\pi}{6}\\ 2\sin x-1=0 & \to x=\dfrac{5\pi}{6} \text{ et } x=\dfrac{\pi}{6}\end{cases}$$

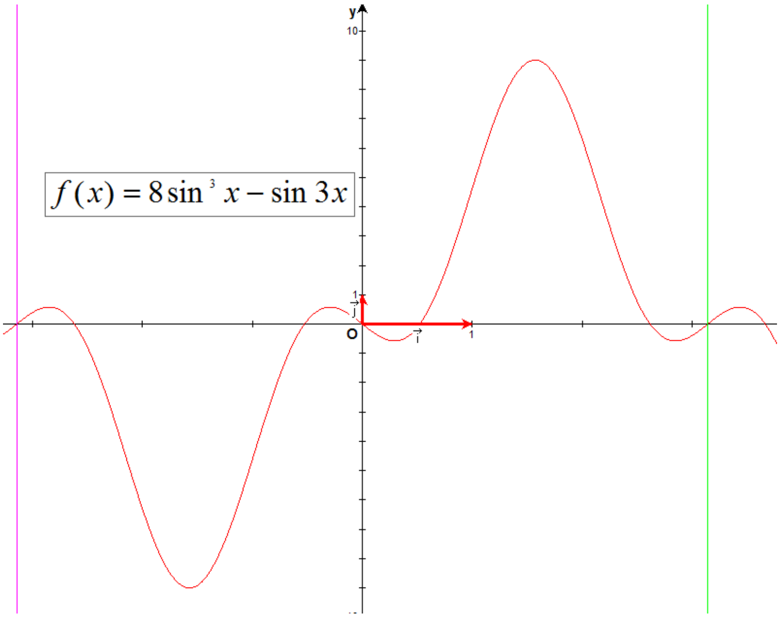
On construit alors le tableau de signes

	$-\pi$		$-\frac{5\pi}{6}$		$-\frac{\pi}{6}$		0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{5\pi}{6}$		π
$\sin x$	0	−	−	−	−	−	0	+	+	+	+	+	0
$2\sin x-1$	−	−	−	−	−	−	−	−	0	+	0	−	−
$2\sin x+1$	+	+	0	−	0	+	+	+	+	+	+	+	+
	0	+	0	−	0	+	0	−	0	+	0	−	0

Conclusion :

Dans l'intervalle $\left]-\pi,\pi\right[$, la solution est

$$\boxed{x\in\left[-\frac{5\pi}{6},-\frac{\pi}{6}\right]\cup\left[0,\frac{\pi}{6}\right]\cup\left[\frac{5\pi}{6},\pi\right[}$$



Le 25 septembre 2009

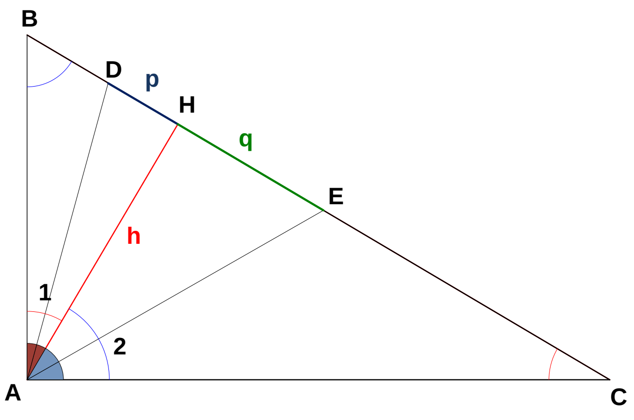
EXTRI278 – EPL, UCL, Louvain, septembre 09

Dans le triangle ABC, rectangle en A, tracez

- h, la hauteur AH (où H est le point d'intersection de cette hauteur avec BC).
- AD, la bissectrice à l'angle défini en A par le triangle BAH (D est son point d'intersection sur BH et définit le segment DH de longueur p)
- AE, la bissectrice à l'angle définit en A par le triangle CAH (E est son point d'intersection sur CH et définit ke segment EH de longueur q)

Démontrez ensuite comment arriver à

- une expression de h en fonction de la longueur de l'hypoténuse a (du triangle ABC) et des angles B et C;
- des expressions de p et q en fonction de la hauteur h et des angles $\frac{B}{2}$ et $\frac{C}{2}$
- l'expression suivante : $p+q=a\sqrt{8}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$



$$1)\ \left.\begin{array}{l} h = BH.\tan B \to \dfrac{h}{\tan B} = BH \\ h = HC.\tan C \to \dfrac{h}{\tan C} = HC \end{array}\right\} \to \frac{h}{\tan B} + \frac{h}{\tan C} = BH + HC = BC = a \to \boxed{h = a\frac{\tan B \tan C}{\tan B + \tan C}}$$

$$2)\ p = h\tan\frac{A_1}{2} \to \boxed{p = h\tan\frac{C}{2}} \quad \text{et} \quad q = h\tan\frac{A_2}{2} \to \boxed{q = h\tan\frac{B}{2}}$$

$$3)\ p + q = h\tan\frac{C}{2} + h\tan\frac{B}{2} = a\frac{\tan B\tan C}{\tan B + \tan C}\left(\tan\frac{C}{2} + \tan\frac{B}{2}\right)$$

$$= a\frac{\sin B\sin C}{\underbrace{\sin B\cos C + \sin C\cos B}_{=\sin(B+C)=1}}\left(\frac{\sin\frac{C}{2}\cos\frac{B}{2} + \sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}\right)$$

$$= 4a\sin\frac{B}{2}\cancel{\cos\frac{B}{2}}\sin\frac{C}{2}\cancel{\cos\frac{C}{2}}.\frac{\sin\left(\frac{B}{2} + \frac{C}{2}\right)}{\cancel{\cos\frac{B}{2}}\cancel{\cos\frac{C}{2}}} \qquad \left(\text{or } \frac{B}{2} + \frac{C}{2} = \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= 4a\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\sin\frac{\pi}{4} = 4a\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\to \boxed{p + q = a\sqrt{8}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}$$

Le 22 septembre 2009

EXTRI279 – EPL, UCL, Louvain septembre 09

Ci-dessous, indiquez chaque fois laquelle des trois affirmations est la vraie.

- Dans tout l'intervalle $3\pi/4 < x < 5\pi/4,$ la fonction $f(x) = \frac{1}{2} + \cos x$ satisfait

  $-1 < f(x) < 0$ □ $0 < f(x) < \frac{1}{2}$ □ $\frac{1}{2} < f(x) < 1$ □

- Dans l'intervalle $0 < x < \pi,$ la fonction $\frac{\cos x}{\sin x} - \frac{\sin x}{\cos x}$ change de signe exactement

  2 fois □ 3 fois □ 4 fois □

- L'expression $\cos 2x \cos x - \sin 4x \sin x$ est identiquement égale à

  $\cos 3x \cos 2x$ □ $\cos 3x \sin 2x$ □ $\sin 3x \cos 2x$ □

- Si dans un triangle $ABC,$ avec les côtés a, b et c et aire $S,$ l'angle A inscrit b et c est obtus, alors

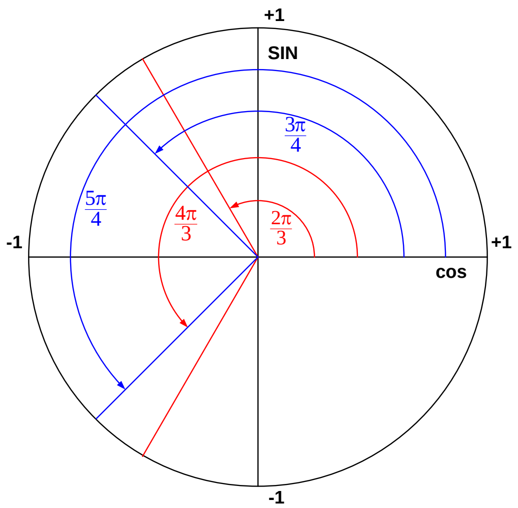
  $2S < bc$ □ $2S = bc$ □ $2S > bc$ □

---

1) Trouvons les racines de $f(x) \to \frac{1}{2} + \cos x = 0 \to \cos x = \frac{-1}{2} \to \begin{cases} x = \frac{2\pi}{3} \\ x = \frac{4\pi}{3} \end{cases}$

On en déduit (voir cercle trigonométrique) que $\cos x < -\frac{1}{2}$ sur l'intervalle $\frac{3\pi}{4} < x < \frac{5\pi}{4}$

Donc : $f(x)$ satisfait $\boxed{-1 < f(x) < 0}$



2) $f(x)=\frac{\cos x}{\sin x}-\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\sin x\cos x}=2\frac{\cos 2x}{\sin 2x}=2\cot 2x$

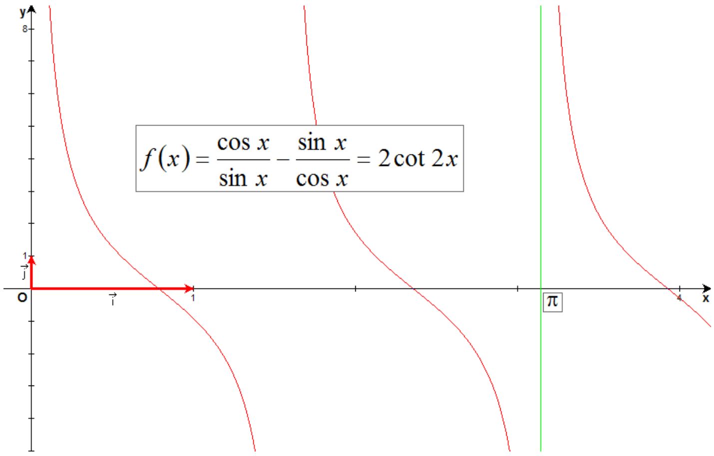
Les CE sont : $2x\neq k\pi \rightarrow x\neq k\frac{\pi}{2}\rightarrow x\neq 0,\ x\neq\frac{\pi}{2},\ x\neq\pi$

Les racines sont $\cot 2x=0\rightarrow\begin{cases}2x=\frac{\pi}{2}\rightarrow x=\frac{\pi}{4}\\ 2x=\frac{3\pi}{2}\rightarrow x=\frac{3\pi}{4}\end{cases}$

Tableau de signe

	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{4}$		π
$f(x)$	/	+	0	−	/	+	0	−	/

La fonction change donc 3 fois de signe dans l'inervalle $0<x<\pi$



3) $\cos 2x\cos x-\sin 4x\sin x=\cancel{\frac{1}{2}\cos 3x}+\frac{1}{2}\cos x-\cancel{\frac{1}{2}\cos 3x}+\frac{1}{2}\cos 5x$

$$=\frac{1}{2}\left(2\cos 3x\cos(-2x)\right)$$

$$=\boxed{\cos 3x\cos 2x}$$

Rappel

$$\cos a\cos b=\frac{1}{2}\cos(a+b)+\frac{1}{2}\cos(a-b)$$

$$\sin a\sin b=\frac{1}{2}\cos(a-b)-\frac{1}{2}\cos(a+b)$$

$$\cos a+\cos b=2\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}$$

4) L'aire d'un triangle est donnée par

$$S = \frac{1}{2} bc \sin A \rightarrow 2S = bc \sin A \quad \text{avec } 0 < \sin A \leq 1$$

Conclusion : $\boxed{2S < bc}$

Le 10 octobre 2009