

Exercices résolus de mathématiques.

Trigonométrie

Calcul numérique

TRI 3

EXTRI030 – EXTRI039

<http://www.matheux.be.tf>

Jacques Collot

1 avril 03

EXTRI030 – Mons, questions-types 2000-2001.

Résoudre l'équation trigonométrique suivante :

$$\cos^2 a + \cos^2 b = 2 \cos a \cos b \cos x + \sin^2 x$$

Représenter les solutions sur le cercle trigonométrique.

$$\cos^2 a + \cos^2 b = 2 \cos a \cos b \cos x + \sin^2 x$$

$$\frac{1}{2} \cos 2a + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2b + \frac{1}{2} - 2 \cos a \cos b \cos x = 1 - \cos^2 x$$

$$\cos(a+b) \cos(a-b) - [\cos(a+b) + \cos(a-b)] \cos x = -\cos^2 x$$

$$\cos^2 x - [\cos(a+b) + \cos(a-b)] \cos x + \cos(a+b) \cos(a-b) = 0$$

Calculons le Δ

$$\begin{aligned} \Delta &= \cos^2(a+b) + 2 \cos(a+b) \cos(a-b) + \cos^2(a-b) - 4 \cos(a+b) \cos(a-b) \\ &= [\cos(a+b) - \cos(a-b)]^2 \end{aligned}$$

$$\cos x = \frac{\cos(a+b) + \cos(a-b) \pm [\cos(a+b) - \cos(a-b)]}{2}$$

$$1) \cos x = \frac{2 \cos(a+b)}{2} \rightarrow x = \pm(a+b) + 2k\pi$$

$$2) \cos x = \frac{2 \cos(a-b)}{2} \rightarrow x = \pm(a-b) + 2k\pi$$

$$\rightarrow x = \pm(a \pm b) + 2k\pi$$

**EXTRI031 – FPMS, Mons, questions-types 2000-2001.
EPL, UCL, Louvain – Juillet 07**

Résoudre l'équation trigonométrique suivante :

$$\tan(a+x) \tan(a-x) = \frac{1-2\cos 2a}{1+2\cos 2a}$$

Représenter les solutions sur le cercle trigonométrique.

$$\tan(a+x) \tan(a-x) = \frac{1-2\cos 2a}{1+2\cos 2a}$$

$$CE: a+x \neq \pm \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad a-x \neq \pm \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad a \neq \pm \frac{3\pi}{8} + k\pi$$

Transformons le premier membre :

$$\begin{aligned} \tan(a+x) \tan(a-x) &= \frac{\sin(a+x) \sin(a-x)}{\cos(a+x) \cos(a-x)} \\ &= \frac{\cos(a+x-a+x) - \cos(a+x+a-x)}{\cos(a+x-a+x) + \cos(a+x+a-x)} \\ &= \frac{\cos 2x - \cos 2a}{\cos 2x + \cos 2a} \end{aligned}$$

$$\rightarrow \frac{\cos 2x - \cos 2a}{\cos 2x + \cos 2a} = \frac{1 - 2\cos 2a}{1 + 2\cos 2a}$$

$$\begin{aligned} \cos 2x - \cos 2a + 2\cos 2a \cos 2x - 2\cos^2 2a \\ = \cos 2a - 2\cos^2 2a + \cos 2x - 2\cos a \cos 2x \end{aligned}$$

$$4\cos 2a \cos 2x = 2\cos 2a \quad (1)$$

$$\text{Si } \cos 2a = 0 \rightarrow a = \pm \frac{\pi}{4} + k\pi$$

L'équation (1) devient $0 \cdot \cos 2x = 0$. Donc x est indéterminé.

Ce qui revient à dire que l'équation de départ est alors une identité

$$\text{indépendante de } x: \tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \tan\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = 1$$

Il reste

$$\cos 2x = \frac{1}{2} \rightarrow x = \pm \frac{\pi}{6} + k\pi$$

Modifié le 1 juillet 2006 (Meriem)

EXTRI032 – Liège, septembre 2000.

Vérifier l'identité

$$\tan a + 2 \tan 2a + 4 \tan 4a + 8 \cot 8a = \cot a$$

$$\tan a + 2 \tan 2a + 4 \tan 4a + 8 \cot 8a = \cot a$$

$$\text{Rappel : } \cot 2\alpha = \frac{1}{2} \cot \alpha - \frac{1}{2} \tan \alpha$$

$$\begin{aligned} & \tan a + 2 \tan 2a + 4 \tan 4a + 8 \cot 8a \\ &= \tan a + 2 \tan 2a + 4 \tan 4a + 4 \cot 4a - 4 \tan 4a \\ &= \tan a + 2 \tan 2a + 4 \cot 4a \\ &= \tan a + 2 \tan 2a + 2 \cot 2a - 2 \tan 2a \\ &= \tan a + 2 \cot 2a \\ &= \tan a + \cot a - \tan a \\ &= \cot a \end{aligned}$$

EXTRI033 – FACSA, ULG, Liège - Juillet 1999.

Polytech, UMONS, Mons – Juillet 2005.

FACSA, ULG, Liège – septembre 2010

a) Si a, b et c sont en progression arithmétique, vérifier que :

$$\frac{\sin a + \sin b + \sin c}{\cos a + \cos b + \cos c} = \tan b$$

b) Pour quelles valeurs de la raison la proposition est-elle en défaut ?

c) Etudier la réciproque.

Suggestion : si p est la raison arithmétique, exprimer a et c en fonction de b et p .

ENONCE POLYTECH

Si a, b et c sont en progression arithmétique, vérifier que :

$$\frac{\sin a + \sin b + \sin c}{\cos a + \cos b + \cos c} = \sqrt{3}$$

a) Soit p la raison :

$$\begin{aligned} \frac{\sin a + \sin b + \sin c}{\cos a + \cos b + \cos c} &= \frac{\sin(b-p) + \sin b + \sin(b+p)}{\cos(b-p) + \cos b + \cos(b+p)} \\ &= \frac{2 \sin \frac{b-p+b+p}{2} \cos \frac{b-p-b-p}{2} + \sin b}{2 \cos \frac{b-p+b+p}{2} \cos \frac{b-p-b-p}{2} + \sin b} \\ &= \frac{2 \sin b \cos p + \sin b}{2 \cos b \cos p + \cos b} = \frac{\sin b (2 \cos p + 1)}{\cos b (2 \cos p + 1)} = \tan b \end{aligned}$$

Polytech : $a + b + c = 180^\circ \rightarrow (b-p) + b + (b+p) = 180^\circ \rightarrow b = 60^\circ \rightarrow \tan b = \sqrt{3}$

b) si $2 \cos p + 1 = 0 \rightarrow p = \pm 120 + 2k\pi$

c) si on a : $\tan b = \frac{\sin b}{\cos b} = \frac{\sin a + \sin b + \sin c}{\sin a + \sin b + \sin c}$

$$\sin b \cos a + \sin b \cos b + \sin b \cos c = \cos b \sin a + \cos b \sin b + \cos b \sin c$$

$$\sin b (\cos a + \cos c) = \cos b (\sin a + \sin c)$$

$$\tan b = \frac{\sin a + \sin c}{\cos a + \cos c}$$

$$\tan b = \frac{\frac{1}{2} \sin \frac{a+c}{2} \cos \frac{a-c}{2}}{\frac{1}{2} \cos \frac{a+c}{2} \cos \frac{a-c}{2}} = \tan \frac{a+c}{2}$$

Cette relation est vérifiée si $b = \frac{a+c}{2}$ c'est-à-dire si a , b , et c sont

en progression arithmétique.

EXTRI034 – FACSA, ULG, Liège - Septembre 1999.

si $a + b + c = \pi$ vérifier que

$$\sin a - \sin b + \sin c = 4 \sin \frac{a}{2} \cos \frac{b}{2} \sin \frac{c}{2}$$

$$\text{si } a + b + c = \pi \rightarrow \pi - c = a + b$$

$$\sin a - \sin b + \sin (a + b)$$

$$= \sin a - \sin b + \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

$$= \sin a (1 + \cos b) - \sin b (1 - \cos a)$$

$$= 2 \sin a \cos^2 \frac{b}{2} - \sin b \left(1 - 1 + 2 \sin^2 \frac{a}{2} \right)$$

$$= 2 \sin a \cos^2 \frac{b}{2} - 2 \sin b \sin^2 \frac{a}{2}$$

$$= 2 \left[2 \sin \frac{a}{2} \cos \frac{a}{2} \cos^2 \frac{b}{2} - 2 \sin \frac{b}{2} \cos \frac{b}{2} \sin^2 \frac{a}{2} \right]$$

$$= 4 \sin \frac{a}{2} \cos \frac{b}{2} \left[\cos \frac{a}{2} \cos \frac{b}{2} - \sin \frac{b}{2} \sin \frac{a}{2} \right]$$

$$= 4 \sin \frac{a}{2} \cos \frac{b}{2} \cos \frac{a+b}{2}$$

$$= 4 \sin \frac{a}{2} \cos \frac{b}{2} \cos \left(\frac{\pi - c}{2} \right)$$

$$= 4 \sin \frac{a}{2} \cos \frac{b}{2} \sin \frac{c}{2}$$

EXTRI035 – FACSA, ULiège, Liège, juillet 1998.
EPL, UCL, Louvain, juillet 2005.

Montrer que si les angles d'un triangle ABC vérifient la relation

$$\sin 4A + \sin 4B + \sin 4C = 0$$

le triangle est rectangle

$$A = \pi - (B + C) \rightarrow \sin A = \sin (B + C)$$

D'une part, on a : $\sin 4A = 2 \sin 2A \cos 2A$

$$\begin{aligned} \sin 2A &= \sin 2[\pi - (B + C)] = \sin 2\pi \cos 2(B + C) - \sin 2(B + C) \cos 2\pi \\ &= -\sin 2(B + C) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos 2A &= \cos 2[\pi - (B + C)] = \cos 2\pi \cos [-2(B + C)] - \sin 2\pi \sin 2(B + C) \\ &= \cos 2(B + C) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sin 4A = -2 \sin 2(B + C) \cos 2(B + C)$$

D'autre part :

$$\sin 4B + \sin 4C = 2 \sin 2(B + C) \cos 2(B - C) \quad (\text{Simpson})$$

Utilisons ces relations en remplaçant dans l'expression de départ :

$$\sin 4A + \sin 4B + \sin 4C = 0$$

$$\Rightarrow -2 \sin 2(B + C) \cos 2(B + C) + 2 \sin 2(B + C) \cos 2(B - C) = 0$$

$$\Rightarrow \sin 2(B + C) [-\cos 2(B + C) + \cos 2(B - C)] = 0$$

Cette équation est vérifiée si :

$$1) \sin 2(B + C) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2(B + C) = 0 \rightarrow B + C = k\pi & \text{Pas de triangle} \\ 2(B + C) = \pi \rightarrow B + C = \frac{\pi}{2} & \text{Rectangle en } A \end{cases}$$

$$2) -\cos 2(B + C) + \cos 2(B - C) = 0$$

$$\cos 2(B + C) = \cos 2(B - C)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2(B + C) = 2(B - C) + 2k\pi \rightarrow C = \frac{\pi}{2} & \text{Rectangle en } C \\ 2(B + C) = -2(B - C) + 2k\pi \rightarrow B = \frac{\pi}{2} & \text{Rectangle en } B \end{cases}$$

EXTRI036 – FACSA, ULiège, Liège, septembre 1998.

Montrer que si les angles d'un triangle ABC vérifient la relation

$$\sin 3A + \sin 3B + \sin 3C = 0$$

l'un des angles est égal à 60°

Comme la somme des angles d'un triangle vaut 180° , on a : $A = 180^\circ - (B + C)$

$\Rightarrow \sin A = \sin(B + C)$ ou encore

$$\sin 3A = \sin 3(B + C) = 2 \sin \frac{3}{2}(B + C) \cos \frac{3}{2}(B + C).$$

On introduit cette relation dans l'expression donnée et on utilise Simpson.

$$\sin 3A + \underbrace{\sin 3B + \sin 3C}_{\text{Simpson}}$$

$$= 2 \sin \frac{3}{2}(B + C) \cos \frac{3}{2}(B + C) + 2 \sin \frac{3}{2}(B + C) \cos \frac{3}{2}(B - C)$$

$$= 2 \sin \frac{3}{2}(B + C) \left[\cos \frac{3}{2}(B + C) + \cos \frac{3}{2}(B - C) \right] = 0$$

Ce qui nous donne une première solution :

$$1) \sin \frac{3}{2}(B + C) = 0 \Rightarrow \frac{3}{2}(B + C) = k180^\circ \Rightarrow 180 - A = \frac{2}{3}k180^\circ$$

$$\Rightarrow A = 180^\circ - k120^\circ = 60^\circ$$

$$\text{Il reste : } \cos \frac{3}{2}(B + C) + \cos \frac{3}{2}(B - C) = 0$$

$$\text{Ou encore : } \cos \frac{3}{2}(B + C) = -\cos \frac{3}{2}(B - C) = \cos \left[180^\circ - \frac{3}{2}(B - C) \right]$$

On obtient les solutions suivantes :

$$2) \frac{3}{2}(B + C) = 180^\circ - \frac{3}{2}(B - C) \Rightarrow B + C = 120^\circ - B + C \Rightarrow B = 60^\circ$$

$$3) \frac{3}{2}(B + C) = -180^\circ + \frac{3}{2}(B - C) \Rightarrow B + C = -120^\circ + B - C \Rightarrow C = -60^\circ$$

Mais d'un point de vue géométrique, on considère la valeur absolue de l'angle, donc $C = 60^\circ$.

On a donc bien obligatoirement un angle de 60° .

EXTRI037 – FACSA, ULG, Liège, juillet 1997.

Si $a + b + c = \pi$, vérifier les identités suivantes.

$$a) \cos 4a + \cos 4b + \cos 4c + 1 = 4 \cos 2a \cos 2b \cos 2c$$

$$b) \frac{\tan b + \tan c}{\sin 2a} = \frac{\tan c + \tan a}{\sin 2b} = \frac{\tan a + \tan b}{\sin 2c}$$

$$a) \cos 4a + \cos 4b + \cos 4c + 1 = 4 \cos 2a \cos 2b \cos 2c$$

$$\cos 4a + \cos 4b + \cos 4c + 1 = 2 \cos^2 2a + 2 \cos^2 2b + 2 \cos^2 2c - 2$$

or

$$\cos 2a = \cos 2[\pi - (b + c)] = \cos 2\pi \cos(b + c) - \sin 2\pi \sin 2(b + c)$$

$$= \cos 2(b + c) = \cos 2b \cos 2c - \sin 2b \sin 2c$$

$$\cos^2 2a = \cos^2 2b \cos^2 2c - 2 \cos 2b \cos 2c \sin 2b \sin 2c + \sin^2 2b \sin^2 2c$$

$$= \cos^2 2b \cos^2 2c - 2 \cos 2b \cos 2c \sin 2b \sin 2c + (1 - \cos^2 2b)(1 - \cos^2 2c)$$

$$= 2 \cos^2 2b \cos^2 2c - 2 \cos 2b \cos 2c \sin 2b \sin 2c - \cos^2 2b - \cos^2 2c + 1$$

donc

$$2 \cos^2 2a + 2 \cos^2 2b + 2 \cos^2 2c - 2$$

$$= 4 \cos^2 2b \cos^2 2c - 4 \cos 2b \cos 2c \sin 2b \sin 2c$$

$$= 4 (\cos 2b \cos 2c - \sin 2b \sin 2c) \cos 2b \cos 2c$$

$$= 4 \cos 2(b + c) \cos 2b \cos 2c$$

$$= 4 \cos 2a \cos 2b \cos 2c$$

$$b) \frac{\tan b + \tan c}{\sin 2a} = \frac{\tan c + \tan a}{\sin 2b} = \frac{\tan a + \tan b}{\sin 2c}$$

$$\frac{\tan b + \tan c}{\sin 2a} = \frac{\tan c + \tan a}{\sin 2b}$$

$$\frac{\sin(b + c)}{\cos b \cos c \sin 2a} = \frac{\sin(c + a)}{\cos a \cos c \sin 2b}$$

$$\frac{\sin a}{2 \cos b \cos c \sin a \cos a} = \frac{\sin(c + \pi - b - c)}{2 \cos a \cos c \sin b \cos b}$$

$$\frac{\sin a}{\sin a} = \frac{\sin(\pi - b)}{\sin b} = 1$$

Tous les rapports sont égaux à 1.

EXTRI038 – FACSA, ULG, Liège, septembre 1996
FACS, ULB, Bruxelles, septembre 2004.

Si a

$$\sin (a + b + c + d) = 0$$

vérifier que :

$$\sin (a + c) \sin (a + d) = \sin (b + c) \sin (b + d)$$

$$\sin (a + c) \sin (a + d) = \sin (b + c) \sin (b + d)$$

$$\frac{1}{2} \cos (a + c - a - d) - \frac{1}{2} \cos (a + c + a + d)$$

$$= \frac{1}{2} \cos (b + c - b - d) - \frac{1}{2} \cos (b + c + b + d)$$

$$\cos (c - d) - \cos (2a + c + d) = \cos (c - d) - \cos (2b + c + d)$$

$$\cos (2a + c + d) - \cos (2b + c + d) = 0$$

$$-2 \sin \frac{1}{2} (2a + 2b + 2c + 2d) \sin \frac{1}{2} (2a + c + d - 2b - c - d) = 0$$

$$\sin (a + b + c + d) \sin (a - b) = 0$$

Ce qui est vérifié en vertu de l'hypothèse.

EXTRI039 – Liège, juillet 1997.

:

Soit

$$E = \cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c - 2 \cos a \cos b \cos c - 1$$

Montrer que si :

$$c = a + b$$

alors $E = 0$.

La réciproque est-elle vraie ?

$$E = \cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c - 2 \cos a \cos b \cos c - 1$$

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\cos^2(a+b) = \cos^2 a \cos^2 b - 2 \sin a \sin b \cos a \cos b + \sin^2 a \sin^2 b$$

Donc, puisque $c = a+b$:

$$\begin{aligned} E &= \cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 a \cos^2 b - 2 \sin a \sin b \cos a \cos b + \sin^2 a \sin^2 b \\ &\quad - 2 \cos^2 a \cos^2 b + 2 \sin a \sin b \cos a \cos b - 1 \\ &= \cos^2 a + \cos^2 b - \cos^2 a \cos^2 b + \sin^2 a \sin^2 b - 1 \\ &= \cos^2 a + \cos^2 b - \cos^2 a \cos^2 b + (1 - \cos^2 a)(1 - \cos^2 b) - 1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Réciproque

Soit: $\cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c - 2 \cos a \cos b \cos c - 1 = 0$

C'est une équation du second degré en $\cos c$.

$$\begin{aligned} \cos c &= \cos a \cos b \pm \sqrt{\cos^2 a \cos^2 b + 1 - \cos^2 a - \cos^2 b} \\ &= \cos a \cos b \pm \sqrt{(\cos^2 a - 1)(\cos^2 b - 1)} \\ &= \cos a \cos b \pm \sin a \sin b \end{aligned}$$

$$1) \quad \cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b = \cos(a-b)$$

$$\rightarrow c = \pm(a-b)$$

$$2) \quad \cos c = \cos a \cos b - \sin a \sin b = \cos(a+b)$$

$$\rightarrow c = \pm(a+b)$$

Conclusion : $c = \pm(a \pm b)$

La réciproque n'est donc pas nécessairement vraie.