Exercices résolus de mathématiques.

Trigonométrie
Calcul numérique

TRI 34

EXTRI340-EXTRI349

http://www.matheux.c.la

Jacques Collot
Benoit Baudelet – Steve Tumson
Jan Frans Broeckx – Nicole Berckmans
Fabienne Zoetard

Novembre 2012

EXTRI340 – EPL, UCL, LLN, Septembre 2012.

Pour quelles valeurs de x comprises dans l'intervalle $[0, 2\pi]$, la fonction $f(x)$ suivante est-elle strictement négative?

$$f(x) = \cos 3x - \cos 2x + \cos x - 1$$

Solution proposée par Nicole Berckmans et Louis François

Simpson: $\cos 3x + \cos x = 2\cos 2x \cos x$

Autre: $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$

$$f(x) = 2\cos 2x \cos x - \cos 2x - 1 = \cos 2x(2\cos x - 1) - 1 = (2\cos^2 x - 1)(2\cos x - 1) - 1$$

$$= 4\cos^3 x - 2\cos^2 x - 2\cos x = 2\cos x(2\cos^2 x - \cos x - 1) = 2\cos x(\cos x - 1)(2\cos x + 1)$$

x	0		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{2\pi}{3}$		$\frac{4\pi}{3}$		$\frac{3\pi}{2}$		2π
$2\cos x$	+	+	0	−	−	−	−	−	0	+	+
$\cos x - 1$	0	−	−	−	−	−	−	−	−	−	0
$2\cos x + 1$	+	+	+	+	0	−	0	+	+	+	+
$f(x)$	0	−	0	+	0	−	0	+	0	−	0

$$\boxed{S = \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right[\cup \left]\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right[}$$

Le 12 novembre 2012

EXTRI341 – EPL, UCL, LLN, Septembre 2012.

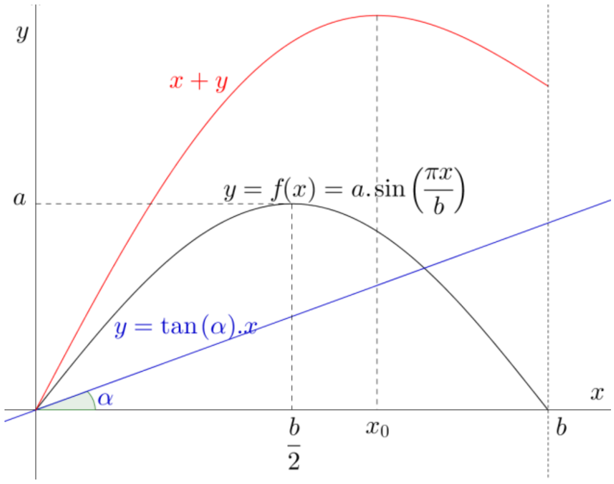
Soit la fonction $y = f(x) = a\sin\left(\frac{\pi x}{b}\right)$. Pour $0 \le x \le b, a > 0, b > 0$ et $\frac{b}{a} < \pi$:

a) Représentez y en fonction de x.

b) Donnez l'expression de x tel que la somme de x et y soit maximale.
Calculez cette valeur de x pour $a = 2$ et $b = \pi$.

c) Tracez sur votre schéma une demi droite partant de $x = 0$, formant un angle α avec l'axe des abscisses et ayant une intersection avec $f(x)$ dans l'intervalle $0 < x < b$. Donnez, en fonction de x, une expression de α et y correspondant à cette intersection. Calculez α et y pour $a = \frac{2}{9}, b = 1$ et $x = \frac{b}{3}$

Solution proposée par Nicole Berckmans et Louis François



b) $x + y = x + a\sin\left(\frac{\pi x}{b}\right) = g(x) \qquad \Rightarrow \frac{dg}{dx} = 1 + \frac{a\pi}{b}\cos\left(\frac{\pi x}{b}\right) = 0$

$$\Rightarrow \cos\frac{\pi x_0}{b} = -\frac{b}{a\pi} \to x_0 = \frac{b}{\pi}\arccos\left(-\frac{b}{a\pi}\right)$$

$$\frac{dg}{dx}(x=0) = 1 + \frac{a\pi}{b} > 0 \qquad \frac{dg}{dx}(x=b) = 1 - \frac{a\pi}{b} < 0$$

Si $a = 2$ et $b = \pi$, $x_0 = \frac{\pi}{\pi}\arccos\left(-\frac{\pi}{2\pi}\right) = \frac{2\pi}{3}$

c) $\begin{cases} y = a\sin\left(\frac{\pi}{b}\right) \\ y = \tan\alpha.x \end{cases} \qquad \begin{cases} \arcsin\left(\frac{\pi x}{b}\right) = \tan\alpha.x \\ y = \tan\alpha.x \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha = \arctan\left(\dfrac{a\sin\left(\frac{\pi x}{b}\right)}{x}\right) \\ y = a\sin\frac{\pi x}{b} \end{cases}$

Si $a = \frac{2}{9}, b = 1$ et $x = \frac{b}{3}$ alors $\alpha = \frac{\pi}{6}$ et $y = \frac{\sqrt{3}}{9}$

Le 12 novembre 2012

EXTRI342 – EPL, UCL, LLN, Septembre 2012.

Pour les affirmations suivantes, cochez laquelle de ces affirmations est la vraie.

a) Pour tout quadrilatère convexe inscriptible (un quadrilatère inscriptible est un quadrilatère dont les sommets se trouvent sur un même cercle), on a que

- un angle est égal à 90 degrés ☐
- La somme de deux angles opposés est égale à 180 degrés. ☐
- la somme des quatre angles est égale à 180 degrés. ☐

b) Dans l'intervalle $\pi < x < 2\pi$, l'équation $\cos x + \sqrt{3}\sin x = 1$ admet exactement

0 solution ☐ 1 solution ☐ 2 solutions ☐

c) L'expression $1 - 8\cos^2 a \sin^2 a$ est identiquement égale à

$\cos 2a$ ☐ $\cos 4a$ ☐ $\cos 8a$ ☐

d) Si dans un triangle ABC l'angle A est strictement supérieur à 90° et les côtés a, b et c (opposés aux angles respectifs A, B et C) satisfont $b = \sqrt{3}c$, alors

$B < 60°$ ☐ $B = 60°$ ☐ $B > 60°$ ☐

Solution proposée par Nicole Berckmans et Louis François

a) Les deux angles soutendent ensembles tout le cercle donc leur somme est 180°.

b) $\cos x + \sqrt{3}\sin x = 1$ admet pour solutions $120° + k360°$ et $k360°$.

Donc 0 solutions pour $]\,\pi, 2\pi\,[$.

c) $1 - 8\cos^2 a \sin^2 a = 1 - 2\sin^2 2a = \cos 4a$.

d) Si $\alpha > 90°$ alors $\beta + \gamma < 90°$.

$$\frac{\sin\beta}{\sin\gamma} = \frac{b}{c} = \sqrt{3}$$

Si $\beta \geq 60°$, $\sin\beta \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$

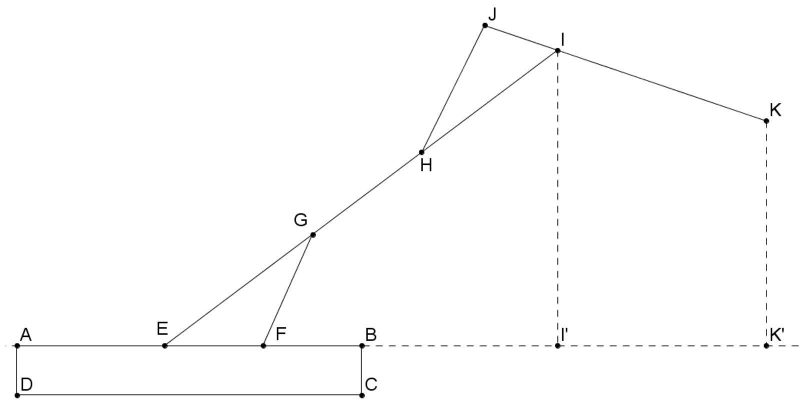
$$\sin\gamma = \frac{\sin\beta}{\sqrt{2}} \geq \frac{1}{2} \text{ et donc } \gamma \geq 30°.$$

Réponse : $\beta < 60°$

Le 12 novembre 2012

EXTRI343 – EPL, UCL, LLN, Septembre 2012.

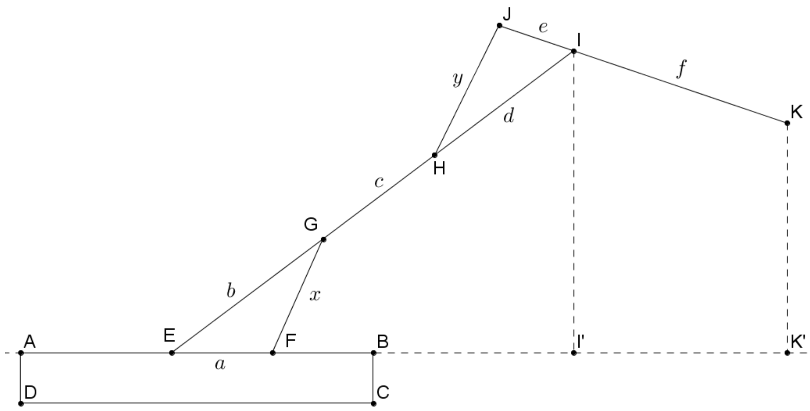
Le croquis ci-dessous schématise une petite pelle mécanique simplifiée. Le rectangle $ABCD$ ainsi que les traits pointillés sont alignés avec les axes verticaux et horizontaux. Les points $EGHI$ sont colinéaires, ainsi que les poinst JIK. Le point I', respectivement K', se trouve sur la droite AB à la verticale du point I, respectivement K. On donne les longueurs $EF = a$, $EG = b, GH = c, HI = d, IJ = e, IK = f$. L'opérateur de la pelle contrôle les longueurs $FG = x$ et $HJ = y$. On désignera par $\widehat{E}$ l'angle FEG, par $\widehat{H}$ l'angle IHJ et $\hat{I}$ l'angle HIJ



Vous veillerez à ce que les expressions demandées aux points 1 à 4 ci-dessous ne contiennent pas d'approximation et soient simplifiées autant que possible. Les paramètres mentionnés ne doivent pas nécessairement tous apparaître dans les expressions.

1) Donnez une expression de $\widehat{E}$ en fonction des paramètres a, b, c, d, e, f, x et y.
2) Donnez une expression de la distance EI' en fonction des paramètres a, b, c, d, e, f, x et y.
3) Donnez une expression de $\hat{I}$ en fonction des paramètres a, b, c, d, e, f, x et y.
4) Donnez une expression de la distance $I'K'$ en fonction des paramètres a, b, c, d, e, $f, x, y, \widehat{E}$ et $\hat{I}$.
5) Calculez $EI', I'K'$ et EK' au cm près pour les données suivantes : $a = 0.4$ m, $b = 1$ m, $d = 1$ m, $e = 0.5$ m, $f = 2$ m, $x = 0.9$ m, $y = 0.7$ m.

Solution proposée par Nicole Berckmans et Louis François



1) Dans le triangle EFG : $x^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos E$

$$\cos E = \frac{a^2 + b^2 - x^2}{2ab} = \frac{0.4^2 + 1 - 0.9^2}{0.8} 0.4375 \Rightarrow E = 64.0555°$$

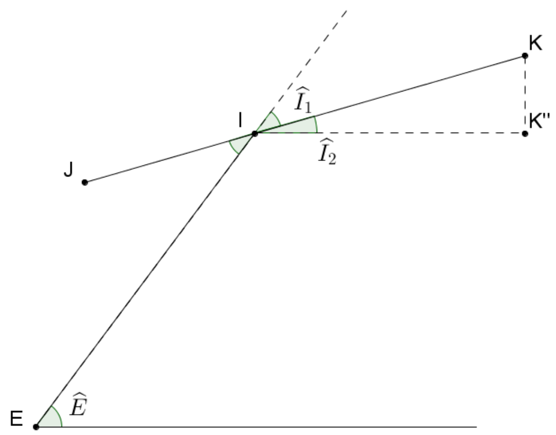
2) Dans le triangle rectangle $EI'I$: $\cos E = \dfrac{EI'}{EI}$

$$EI' = \cos E . EI = \frac{a^2 + b^2 - x^2}{2ab}(b + c + d)$$

$$EI' = 0.4375 \times (1 + 1 + 1) = 1.3125 \text{ m}$$

3) Dans le triangle IJK

$$y^2 = d^2 + e^2 - 2ed\cos \widehat{E} \Rightarrow \cos \hat{I} = \frac{d^2 + e^2 - y^2}{2ed} = 0.76 \Rightarrow \hat{I} = 40.5358°$$



4) $I_2 = E - I_1 = 23.5197°$

$$I'K' = I'K'' = f\cos I_2 = 2\cos 23.5197° = 1.8338 \text{ m}$$

5) $EK' = EI' + I'K' = 1.3125 + 1.8338 = 3.1463 = 315$ cm

Le 12 novembre 2012

EXTRI344 – Compléments.

Trouver les valeurs des expressions suivantes sans utiliser la calculatrice :

$E_1 = \sin 6 \sin 42 \sin 66 \sin 78$

$E_2 = \cos 6 \cos 42 \cos 66 \cos 78$

$E_3 = \tan 6 \tan 42 \tan 66 \tan 78$

$E_4 = \sin 9 \cos 27 \cos 63 \sin 81$

$E_5 = \cos 20 \cos 40 \cos 60 \cos 80$

$E_6 = \sin 20 \sin 40 \sin 60 \sin 80$

$$E_1 = \sin 6 \sin 42 \sin 66 \sin 78 = \frac{\cancel{\sin 12}}{2\cancel{\cos 6}} \frac{\cancel{\sin 84}}{2\cancel{\cos 42}} \frac{\cancel{\sin 132}}{2\cancel{\cos 66}} \frac{\cancel{\sin 156}}{2\cancel{\cos 78}} = \frac{1}{16}$$

$$E_2 = \cos 6 \cos 42 \cos 66 \cos 78 = \cos 6 \cos 42 \sin 24 \sin 12$$

$$= \frac{1}{4}(\sin 30 + \sin 18)(\sin 54 - \sin 30) \qquad \text{car} \begin{cases} \cos 24 \cos 6 = \frac{1}{2}(\sin 30 + \sin 18) \\ \sin 12 \cos 42 = \frac{1}{2}(\sin 54 - \sin 30) \end{cases}$$

$$= \frac{1}{16}(1 + 2\sin 18)(2\sin 54 - 1) = \frac{1}{16}(2\sin 54 + 4\sin 18 \sin 54 - 1 - 2\sin 18)$$

$$= \frac{1}{16}\left(2\sin 54 + 2\underbrace{\cos 36}_{=\sin 54} - 2\underbrace{\cos 72}_{=\sin 18} - 1 - 2\sin 18\right) \qquad \text{car } 4\sin 18 \sin 54 = 2\cos 36 - 2\cos 72$$

$$= \frac{1}{16}(4(\sin 54 - \sin 18) - 1) = \frac{1}{16}(8\cos 36 \sin 18 - 1) \text{ car } \sin 54 - \sin 18 = 2\cos 36 \sin 18$$

$$= \frac{1}{16}\left(8\cos 36 \frac{\sin 36}{2\cos 18}\right) = \frac{1}{16}\left(\frac{2\cancel{\sin 72}}{\cancel{\cos 18}} - 1\right) = \frac{1}{16}$$

$$E_3 = \frac{E_1}{E_2} = 1$$

$$E_4 = \sin 9 \cos 27 \cos 63 \sin 81 = \frac{\sin 18}{2\cancel{\cos 9}} \frac{\sin 54}{2\cancel{\sin 27}} \cancel{\cos 63}\, \cancel{\sin 81} = \frac{1}{4}\sin 18 \sin 54$$

$$= \frac{1}{4}\sin 18 \cos 36 = \frac{1}{4}\frac{\sin 36}{2\cos 18}\cos 36 = \frac{1}{16}\frac{\cancel{\sin 72}}{\cancel{\cos 18}} = \frac{1}{16}$$

$$E_5 = \cos 20 \cos 40 \cos 60 \cos 80 = \frac{\cancel{\sin 40}}{2\cancel{\sin 20}} \frac{\cancel{\sin 80}}{2\cancel{\sin 40}} \frac{1}{2} \frac{\cancel{\sin 160}}{2\cancel{\sin 80}} = \frac{1}{16}$$

$E_6 = \sin 20 \sin 40 \sin 60 \sin 80$ Voir EXTRI287

$$\sin(20^\circ)\sin(40^\circ)\sin(60^\circ)\sin(80^\circ)=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin(20^\circ)\sin(40^\circ)\sin(80^\circ)$$

$$\begin{cases}\sin(80^\circ)=\cos(10^\circ)\\ \sin(20^\circ)\sin(40^\circ)=\frac{1}{2}\left(\cos(20^\circ)-\cos(60^\circ)\right)=\frac{1}{2}\left(\cos(20^\circ)-\frac{1}{2}\right)\end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(20^\circ)\sin(40^\circ)\sin(80^\circ)=\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\cos(20^\circ)-\frac{1}{2}\right)\cos(10^\circ)$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{8}\left(2\cos(20^\circ)\cos(10^\circ)-\cos(10^\circ)\right)=\frac{\sqrt{3}}{8}\left(\cos(30^\circ)+\cos(10^\circ)-\cos(10^\circ)\right)$$

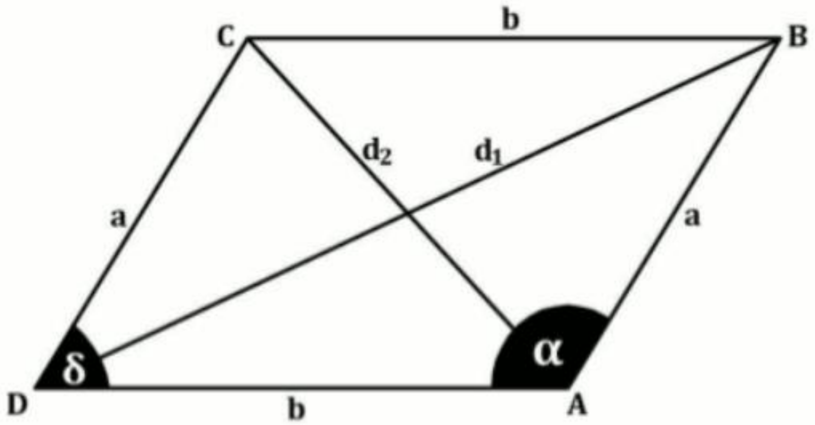
$$=\frac{\sqrt{3}}{8}\cos(30^\circ)=\frac{3}{16}$$

Le 15 novembre 2012

EXTRI345 – FACS, ULB, Bruxelles, juillet 2012.

Prouvez que, dans tout parallélogramme, la somme des carrés de longueurs des 4 côtés est égale à la somme des carrés des longueurs des 2 diagonales.

Solution proposée par JAN FRANS BROECKX



Appliquons la règle aux cosinus (le théorème d'Al Kashi) dans le triangle ABD,

$$d_1{}^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha$$

et également dans le triangle ACD :

$$\begin{aligned} d_2{}^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos\delta \\ &= a^2 + b^2 - 2ab\cos(\pi - \alpha) \\ &= a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha \end{aligned}$$

En additionnant les deux expressions, on trouve que :

$$d_1{}^2 + d_2{}^2 = (a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha) + (a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha) = 2a^2 + 2b^2$$

---

30 mars 2013

EXTRI346 – FACS, ULB, Bruxelles, juillet 2012.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation

$$2\sin^3 x = \sin 3x$$

Solution proposée par JAN FRANS BROECKX

Etablissons d'abord la formule qui exprime $\sin 3x$ en termes de $\sin x$:

$$\begin{aligned}
\sin 3x &= \sin(2x + x) = \sin 2x \cos x + \cos 2x \sin x \\
&= (2\sin x \cos x)\cos x + (1 - 2\sin^2 x)\sin x \\
&= 2\sin x \cos^2 x + \sin x - 2\sin^3 x \\
&= 2\sin x\,(1 - \sin^2 x) + \sin x - 2\sin^3 x \\
&= 3\sin x - 4\sin^3 x
\end{aligned}$$

L'équation devient alors :

$$\begin{aligned}
2\sin^3 x = \sin 3x &\Leftrightarrow 2\sin^3 x = 3\sin x - 4\sin^3 x \\
&\Leftrightarrow 6\sin^3 x - 3\sin x = 0 \\
&\Leftrightarrow 3\sin x\,(2\sin^2 x - 1) = 0 \\
&\Leftrightarrow \sin x\left(\sin^2 x - \frac{1}{2}\right) = 0
\end{aligned}$$

(a) $\sin x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

(b) $\sin^2 x = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \sin x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z})$

L'ensemble des solutions de l'équation est donc :

$$S = \{k\pi \| k \in \mathbb{Z}\} \cup \left\{\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \middle\| k \in \mathbb{Z}\right\}$$

---

30 mars 2013

EXTRI347 – FACS, ULB, Bruxelles, septembre 2012.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation

$$\cos x - \cos 3x + \cos 5x - \cos 7x = 0$$

Solution proposée par JAN FRANS BROECKX

Transformation et factorisation de l'équation :

$$\cos x - \cos 3x + \cos 5x - \cos 7x = 0$$

$\Leftrightarrow \quad (\cos 5x - \cos 3x) - (\cos 7x - \cos x) = 0$ Formule de Simpson

$\Leftrightarrow \quad -2\sin 4x \sin x + 2\sin 4x \sin 3x = 0$

$\Leftrightarrow \quad 2\sin 4x\ (\sin 3x - \sin x) = 0$ Formule de Simpson

$\Leftrightarrow \quad 4\sin 4x\,.\sin x\,.\cos 2x = 0$

Les ensembles des solutions des trois facteurs :

(a) $\sin 4x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4x = k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

$\Leftrightarrow \quad x \in S_1 = \left\{k\frac{\pi}{4} \middle\| k \in \mathbb{Z}\right\}$

(b) $\sin x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

$\Leftrightarrow \quad x \in S_2 = \{k\,\pi \| k \in \mathbb{Z}\}$

(c) $\cos 2x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

$\Leftrightarrow \quad x \in S_3 = \left\{\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \middle\| k \in \mathbb{Z}\right\}$

Solution de l'équation :

On remarque sans difficulté que $S_2 \subset S_1$ et que $S_3 \subset S_1$; par conséquent : $S = S_1$:

$$S = \left\{k\frac{\pi}{4} \middle\| k \in \mathbb{Z}\right\}$$

30 mars 2013

EXTRI348 – FACS, ULB, Bruxelles, septembre 2012.

Démontrez que

$$\sin 10° \sin 50° \sin 70° = \frac{1}{8}$$

Solution proposée par JAN FRANS BROECKX

1e méthode : on utilise les formules pour la transformation de produits en sommes et différences :

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2}(\cos(a-b) - \cos(a+b)) \quad \text{et} \quad \sin a \cos b = \frac{1}{2}(\sin(a+b) + \sin(a-b))$$

$$\begin{aligned}
\sin 10° \sin 50° \sin 70° &= \frac{1}{2}\sin 10° (\cos 20° - \cos 120°) && \cos(-20°) = \cos 20° \\
&= \frac{1}{2}\sin 10° \cos 20 + \frac{1}{4}\sin 10° && \cos 120° = -\frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{4}(\sin 30° - \sin 10°) + \frac{1}{4}\sin 10° && \sin(-10°) = -\sin 10° \\
&= \frac{1}{8} - \frac{1}{4}\sin 10° + \frac{1}{4}\sin 10° && \sin 30° = \frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{8}
\end{aligned}$$

2e méthode : on utilise la formule de duplication pour le sinus et les propriétés des angles associés :

(comme dans l'exercice EXTRI127 qui est très semblable)

$$\sin 2a = 2 \sin a \cos a \quad \Rightarrow \quad \sin a = \frac{1}{2}\frac{\sin 2a}{\cos a}$$

$$\sin 10° \sin 50° \sin 70° = \frac{1}{8}\frac{\sin 20°}{\cos 10°}\frac{\sin 100°}{\cos 50°}\frac{\sin 140°}{\cos 70°}$$

$$\begin{cases} \sin 20° = \cos(90° - 20°) = \cos 70° \\ \sin 100° = \sin(180° - 100°) = \sin 80° = \cos(90° - 80°) = \cos 10° \\ \sin 140° = \sin(180° - 140°) = \sin 40° = \cos(90° - 40°) = \cos 50° \end{cases}$$

$$= \frac{1}{8}\frac{\cos 70°}{\cos 10°}\frac{\cos 10°}{\cos 50°}\frac{\cos 50°}{\cos 70°} = \frac{1}{8}$$

Solution proposée par DOMINIQUE DRUEZ

$\sin 10^o . \sin 50^o . \sin 70^o = \cos 80^o \cos 40^o \cos 20^o =$ $\cos 80^o \cos 40^o \cos 20^o \dfrac{\sin 20^o}{\sin 20^o} =$	$\cos\alpha = \sin(90-\alpha)$
$\dfrac{\cos 80^o \cos 40^o}{\sin 20^o}\dfrac{\sin 40^o}{2} = \dfrac{\cos 80^o}{\sin 20^o}\dfrac{\sin 80^o}{4} = \dfrac{\sin 160^o}{\sin 20^o}\dfrac{1}{8} =$	$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$ *et donc* $\sin\alpha\cos\alpha = \dfrac{\sin 2\alpha}{2}$
$\dfrac{\sin(180^o - 20^o)}{\sin 20^o}\dfrac{1}{8} = \dfrac{\sin 20^o}{\sin 20^o}\dfrac{1}{8} = \dfrac{1}{8}$	$\sin\alpha = \sin(180-\alpha)$

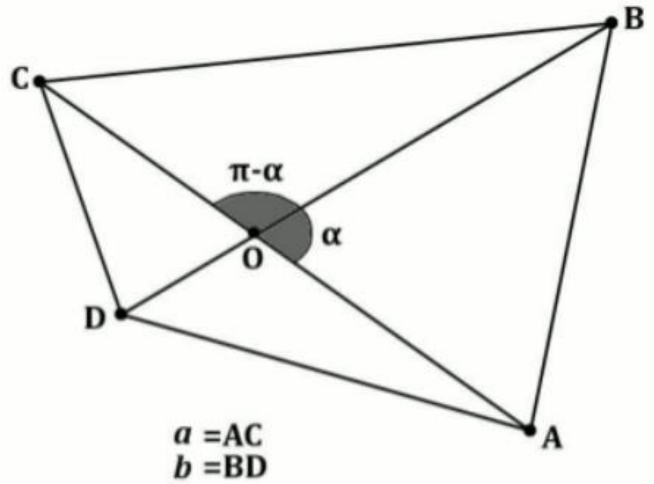
---

30 mars 2013. Modifié le 10 jan 2014 (Dominique Druez)

EXTRI349 – FACS, ULB, Bruxelles, septembre 2012.

Si a et b sont les longueurs des côtés des 2 diagonales d'un quadrilatère plan convexe et si α est l'angle entre ces diagonales, prouver que l'aire du quadrilatère vaut $\frac{1}{2}ab\sin\alpha$.

Solution proposée par JAN FRANS BROECKX



L'aire du quadrilatère est la somme des aires des quatre triangles délimités par les côtés et les diagonales :

$$
\begin{aligned}
S_{ABCD} &= S_{OAB} + S_{OBC} + S_{OCD} + S_{ODA} \\
&= \tfrac{1}{2}OA.\,OB.\sin\alpha + \tfrac{1}{2}OB.\,OC.\sin(\pi-\alpha) + \tfrac{1}{2}OC.\,OD.\sin\alpha + \tfrac{1}{2}OD.\,OA.\sin(\pi-\alpha) \\
&= \tfrac{1}{2}(OA.\,OB + OB.\,OC + OC.\,OD + OD.\,OA).\sin\alpha \\
&= \tfrac{1}{2}\big(OB.\,(OA+OC) + OD.\,(OA+OC)\big).\sin\alpha \\
&= \tfrac{1}{2}\big((OB+OD).\,(OA+OC)\big).\sin\alpha \\
&= \tfrac{1}{2}BD.\,AC.\sin\alpha \\
&= \tfrac{1}{2}ab\sin\alpha
\end{aligned}
$$

---

30 mars 2013