Exercices résolus de mathématiques.

Trigonométrie
Calcul numérique

TRI 36

EXTRI360-EXTRI369

http://www.matheux.c.la

Jacques Collot
Benoit Baudelet – Steve Tumson
Jan Frans Broeckx – Nicole Berckmans
Fabienne Zoetard

Octobre 2013

EXTRI360 – FACSA, ULG, Liège, juillet 2012.

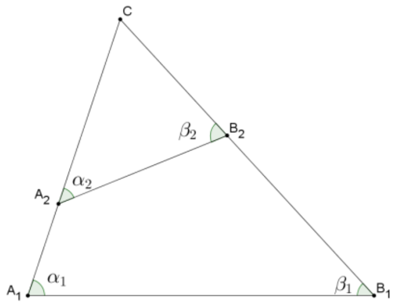
Deux bateaux initialement situés en A_1 et B_1 naviguent en direction du point C. On mesure $\overline{A_1B_1} = 50$ km et les angles $\alpha_1 = 85°$ et $\beta_1 = 65°$. Au temps t_2, les deux bateaux se trouvent en A_2 et B_2 ayant parcouru respectivement $\overline{A_1A_2} = 30$ km et $\overline{B_1B_2} = 50$ km. On mesure les angles α_1 et β_2 entre les trajectoire et le segment de droite en les bateaux.

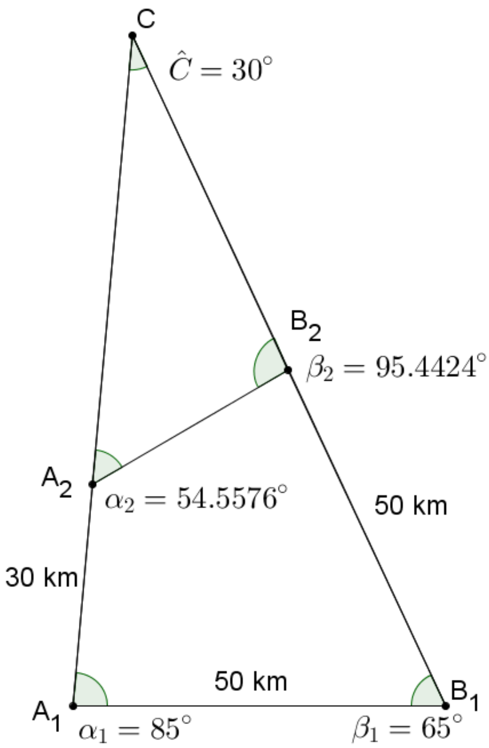
a) Démontrer que les angles satisfont $\alpha_1 + \beta_1 = \alpha_2 + \beta_2$.

b) Déterminer l'angle C et les distances $\overline{A_1C}$ et $\overline{B_1C}$.

c) Calculer la distance $\overline{A_2B_2}$ entre les bateaux en t_2 et les angles α_2 et β_2.

Donner es résultats numériques avec 4 chiffres après la virgule.





a) $\left.\begin{array}{l}\Delta A_1CB_1 : \alpha_1+\beta_1+C=180°\\ \Delta A_2CB_2 : \alpha_2+\beta_2+C=180°\end{array}\right\}\Rightarrow \alpha_1+\beta_1=\alpha_2+\beta_2$

b) $C=180°-85°-65°=30°$

c) $\dfrac{\overline{A_1C}}{\sin\beta_1}=\dfrac{\overline{A_1B_1}}{\sin C}\Rightarrow \overline{A_1C}=\dfrac{\sin\beta_1}{\sin C}\overline{A_1B_1}=\dfrac{\sin 65°}{\sin 30°}\times 50=90.6308\text{ km}$

$\dfrac{\overline{B_1C}}{\sin\alpha_1}=\dfrac{\overline{A_1B_1}}{\sin C}\Rightarrow \overline{B_1C}=\dfrac{\sin\alpha_1}{\sin C}\overline{A_1B_1}=\dfrac{\sin 85°}{\sin 30°}\times 50=99.6195\text{ km}$

d) $\left.\begin{array}{l}\overline{A_2C}=60.6308\text{ km}\\ \overline{B_2C}=49.6195\text{ km}\end{array}\right\}\Rightarrow \overline{A_2B_2}=\sqrt{\overline{A_2C}^2+\overline{B_2C}^2-2.\overline{A_2C}.\overline{B_2C}.\cos\widehat{C}}$

$=\sqrt{60.6308^2+49.6195^2-2\times 60.6308\times 49.6195\times\cos 30°}$

$=30.4527\text{ km}$

$\cos\alpha_2=\dfrac{\overline{A_2B_2}^2+\overline{A_2C}^2-\overline{CB_2}^2}{2.\overline{A_2B_2}.\overline{A_2C}}=\dfrac{30.4527^2+60.6308^2-49.6195^2}{2\times 30.4527\times 60.6308}=0.57988$

$\Rightarrow \alpha_2=54.5579°\Rightarrow \beta_2=95.4424°$

Le 15 octobre 2013

EXTRI361 – FACSA, ULG, Liège, septembre 2012.

Résoudre

$$\sqrt{3}\cos 2x+\sin 2x=2$$

$\sin 2x+\sqrt{3}\sin 2x=2$

On pose $\tan\phi=\sqrt{3}\Rightarrow\phi=60°$

L'équation devient : $\sin(2x+\phi)=2\cos 60°\Rightarrow\sin(2x+60)=1$

$\Rightarrow 2x+60°=90°+k360°\Rightarrow \boxed{x=15°+k180°}$

Le 15 octobre 2013

EXTRI362 – POLYTECH, Umons, Mons, juillet 2012.

Résoudre l'équation trigonométrqiue suivante :

$$\sin 4x \cos x + 2\sin x \cos^2 2x = 1 - 2\sin^2 x$$

et représenter les solutions sur le cercle trigonométrique

Solution proposée par Fabienne Zoetard

$$\underbrace{\sin 4x}_{2\sin 2x \cos 2x} \cos x + 2\sin x \cos^2 2x = \underbrace{1 - 2\sin^2 x}_{\cos 2x}$$

$$\Rightarrow \cos 2x \left(2\sin 2x \cos x + 2\sin x \cos 2x - 1\right) = 0$$

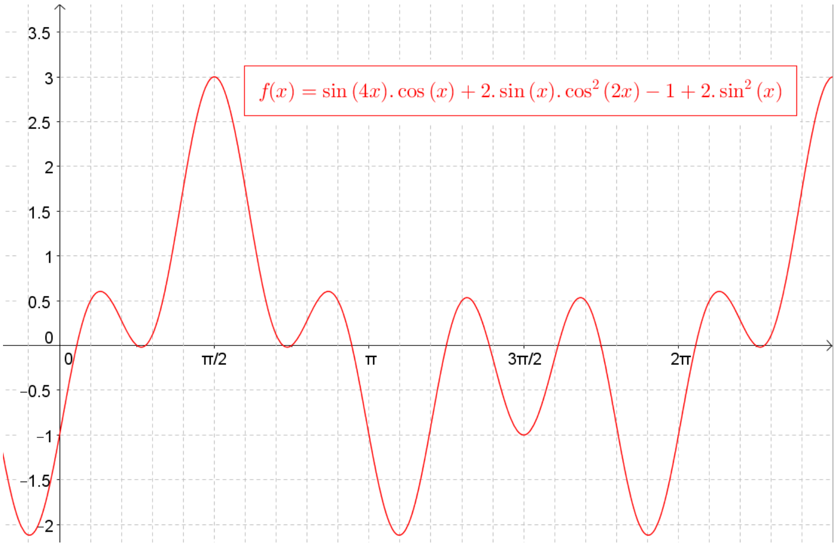
1) $\cos 2x = 0 \Rightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$

2) $2\sin 2x \cos x + 2\sin x \cos 2x - 1 = 0 \Rightarrow \sin 3x = \frac{1}{2}$

$$\begin{cases} 3x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi & \Rightarrow x = \frac{\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3} \\ 3x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi & \Rightarrow x = \frac{5\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3} \end{cases}$$

Solutions dans $\left[0, 2\pi\right[$:

$$\frac{\pi}{18}, \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{18}, \frac{3\pi}{4}, \frac{13\pi}{18}, \frac{17\pi}{18}, \frac{5\pi}{4}, \frac{25\pi}{18}, \frac{7\pi}{4}, \frac{29\pi}{18}$$



Le graphique est donné à titre purement indicatif. Les résolutions graphiques sont interdites.

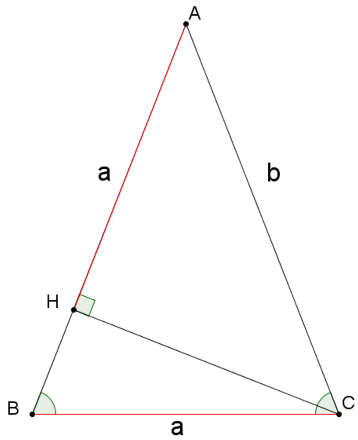
---

21 octobre 2013

EXTRI363 – POLYTECH, Umons, Mons, juillet 2012.

Soit un triangle ABC isocèle en A. On désigne par H le pied de la hauteur issue du sommet C de ce triangle. Que vaut l'angle A, si les longueurs du côté BC et du segement AH sont égales? Résoudre le triangle (donner les valeurs numériques des autres angles et des côtés) si la longueur AB est égale à 4 cm.

Solution proposée par Fabienne Zoetard



$$\text{On a } \begin{cases} \Delta ABC : \dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} \\ \Delta AHC : a = b\cos A \\ \sin B = \sin\left(90 - \dfrac{A}{2}\right) = \cos\dfrac{A}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{b\cos A}{\sin A} = \frac{b}{\cos\frac{A}{2}} \Rightarrow \cos A\cos\frac{A}{2} = \sin A \Rightarrow \cos A\cos\frac{A}{2} = 2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$$

$$1)\ \cos\frac{A}{2} = 0 \Rightarrow \frac{A}{2} = 90° + k180° \Rightarrow A = 180° + k360° \quad \text{A rejeter}$$

$$2)\ \cos A - 2\sin\frac{A}{2} = 0 \Rightarrow 1 - 2\sin^2\frac{A}{2} - 2\sin\frac{A}{2} = 0 \Rightarrow ..... \Rightarrow \sin\frac{A}{2} = \frac{-1\pm\sqrt{3}}{2}$$

$$2.1)\ \sin\frac{A}{2} = \frac{-1+\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{A}{2} = 21.47° + k360 \Rightarrow A = 42.94° + k720° \Rightarrow A = 42.94° \\ \dfrac{A}{2} = 158.53° + k360 \quad \text{A rejeter} \end{cases}$$

$$2.2)\ \sin\frac{A}{2} = \frac{-1-\sqrt{3}}{2} < 0 \qquad \text{A rejeter}$$

<u>Conclusion</u> : $\boxed{A = 42.94°, B = C = 68.53°}$

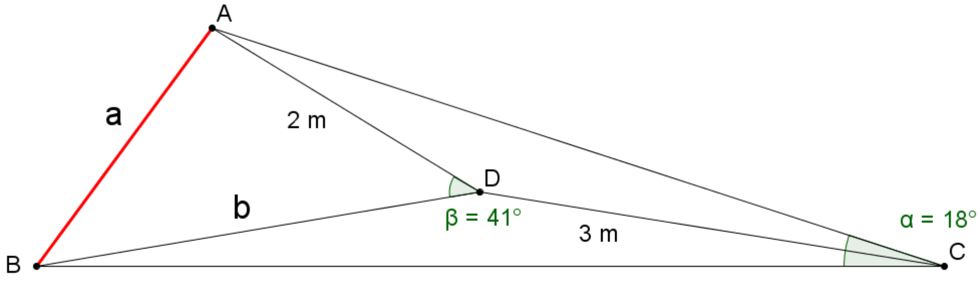
---

21 octobre 2013

EXTRI364 – POLYTECH, Umons, Mons, juillet 2012.

Dans un plan considéré au niveau du sol, une caméra embarquée sur un robot mobile voit une barre de fer sous un angle de 18°. Après que le robot se soit déplacé de 3 m, le long de la bissectrice de cet angle, et en direction de la barre de fer, la caméra voit cette dernière sous un angle de 41°. L'extrémité la plus proche de la barre de fer est alors située à 2 m de la caméra. Calculer la longueur de la barre de fer.

Solution proposée par Fabienne Zoetard



$$\Delta ABD : a^2 = 4 + b^2 - 2\times 2\times b.\cos 41^\circ \qquad (1)$$

$$\Delta ADC : \frac{\sin 9^\circ}{2} = \frac{\sin DAC}{3} \Rightarrow DAC = 13.57^\circ \Rightarrow \begin{cases} ADC = 157.53^\circ \\ BDC = 161.57^\circ \\ DBC = 9.43^\circ \end{cases}$$

Donc : $\dfrac{b}{\sin 9^\circ} = \dfrac{3}{\sin 9.43^\circ} \Rightarrow b = 2.86$

Valeur que l'on injecte dans $(1) :\Rightarrow a^2 = 3.56 \Rightarrow \boxed{a = 1.89 \text{ m}}$

---

21 octobre 2013

EXTRI365 – POLYTECH, Umons, Mons, juillet 2013.

Résoudre l'équation trigonométrique suivante :

$$\sin^2 x + \sin^2 y + \cos y + 0.75 = 0$$

avec la condition supplémentaire : $\cos y = 2\sin x$

Représenter les solutions (en x et y) sur le cercle trigonométrique.

Solution proposée par Fabienne Zoetard

$$\begin{cases} \sin^2 x + \sin^2 y + \cos y + \dfrac{3}{4} = 0 \\ \cos y = 2\sin x \Rightarrow \sin^2 y = 1 - 4\sin^2 x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos y = 2\sin x & (2) \\ -3\sin^2 x + 2\sin x + \dfrac{7}{4} = 0 & (1) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{ De } (1) : \sin x = \frac{-2 \pm 5}{-6} \Rightarrow \begin{cases} \sin x = \dfrac{-1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi \\ x = \dfrac{7\pi}{6} + 2k\pi \end{cases} \\ \sin x = \dfrac{7}{6} \quad \text{A rejeter.} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{De } (2) : \cos y = -1 \Rightarrow y = \pi + 2k'\pi$$

<u>Solution</u> : $\boxed{\begin{cases} x = -\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi \\ y = \pi + 2k'\pi \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x = \dfrac{7\pi}{6} + 2k\pi \\ y = \pi + 2k'\pi \end{cases}}$

---

21 octobre 2013

EXTRI366 – POLYTECH, Umons, Mons, juillet 2013.

Vérifier l'identité suivante :

$$\sin a + 2\sin 2a + \sin 3a = 8\sin a\cos^4\frac{a}{2} - 2\sin^3 a$$

Solution proposée par Fabienne Zoetard

$$\underline{\sin a} + 2\sin 2a + \underline{\sin 3a} \overset{?}{=} 8\sin a\cos^4\frac{a}{2} - 2\sin^3 a$$

$$\Rightarrow 2\sin 2a\cos a + 2\sin 2a \overset{?}{=} 2\sin a\left(4\cos^4\frac{a}{2} - \sin^2 a\right)$$

$$\Rightarrow 2\sin 2a(\cos a + 1) \overset{?}{=} 2\sin a\left(4\cos^4\frac{a}{2} - 4\sin^2\frac{a}{2}\cos^2\frac{a}{2}\right)$$

$$\Rightarrow 2\sin 2a \times 2\cos^2\frac{a}{2} \overset{?}{=} 2\sin a \times 4\cos^2\frac{a}{2}\left(\cos^2\frac{a}{2} - \sin^2\frac{a}{2}\right)$$

$$\Rightarrow 4\sin 2a\cos^2\frac{a}{2} \overset{?}{=} 8\sin a.\cos^2\frac{a}{2}.\cos a$$

$$\Rightarrow 4\sin 2a\cos^2\frac{a}{2} = 4\sin 2a\cos^2\frac{a}{2} \qquad \text{OK}$$

---

21 octobre 2013

EXTRI367 – POLYTECH, Umons, Mons, juillet 2013.

Lors de la construction de nouvelles voies férrées, on désire assurer la jonction entre deux lignes de façon progressive. Les directions des deux lignes concernées (que l'on peut assimiler à des droites, en négligeant l'écartement des rails) se coupent à 120°, en un point vituel O. On désire effectuer le changement de direction en suivant l'arc d'un cercle, de rayon 1 km, dont le centre est situé sur la bissectrice de l'angle, de sommet O, formé par les deux voies.

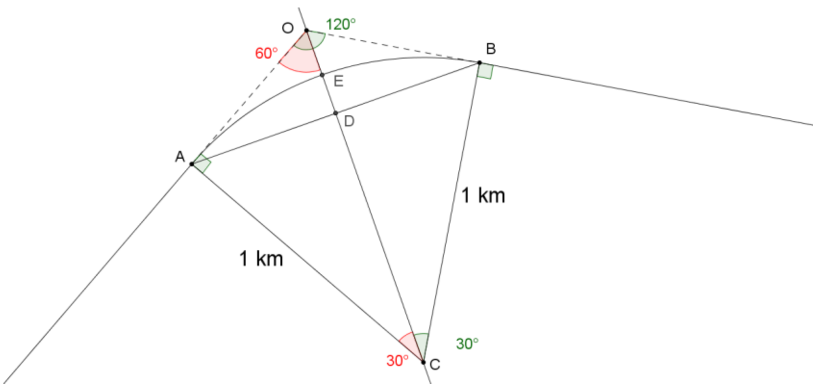
Soient A et B les points de contact entre les voies et l'arc de cercle considéré.

Calculer : 1) les distances OA et OB;

2) la longueur de l'arc de cercle AB;

3) la distance maximale entre cet arc de cercle AB et la corde AB.

Solution proposée par Fabienne Zoetard



$$1)\ \overline{AC} = \overline{OA}.\tan 60° \Rightarrow \overline{OA} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \simeq 0.577 \text{ km}$$

2) 360° intercepte un arc de 2π km

60° intercepte un arc de $\frac{\pi}{3}$ km $\Rightarrow AB = \frac{\pi}{3} \simeq 1.047$ km

$$3)\ \overline{ED} = \overline{CE} - \overline{DC} = 1 - 1 \times \cos 30° = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \simeq 0.134 \text{ km}$$

---

21 octobre 2013

EXTRI368 – FACSA, ULG, Liège, septembre 2013.

Résoudre l'équation trigonométrique suivante :

$$\cos^3 x + 2\sin x.\left(\frac{\sin 2x}{4} - 1\right) + 2\sin^3 x = 0$$

et représenter les solutions sur le cercle trigonométrique

Solution proposée par Fabienne Zoetard

$$\cos^3 x + 2\sin x.\left(\frac{\sin 2x}{4} - 1\right) + 2\sin^3 x = 0$$

$$\Rightarrow \cos^3 x + 2\sin x.\frac{2\sin x.\cos x}{4} - 2\sin x + 2\sin^3 x = 0$$

$$\Rightarrow \cos^3 x + \sin^2 x\cos x - 2\sin x + 2\sin^3 x = 0$$

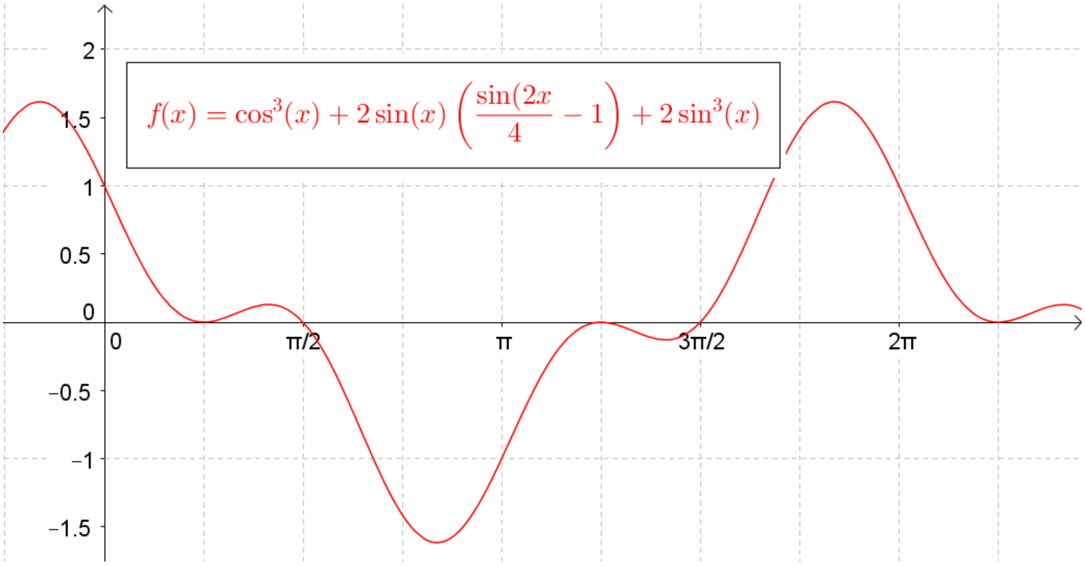
$$\Rightarrow \cos x\left(\cos^2 x + \sin^2 x\right) - 2\sin x\left(1 - \sin^2 x\right) = 0$$

$$\Rightarrow \cos x - 2\sin x\cos^2 x = 0 \Rightarrow \cos x\left(1 - \sin 2x\right) = 0$$

1) $\cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$

2) $\sin 2x = 1 \Rightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi$

<u>Solutions</u> $\boxed{x \in [0, 2\pi[\;\rightarrow \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right)}$



Le graphique est donné à titre indicatif. Les résolutions graphiques sont interdites.

21 octobre 2013

EXTRI369 – FACSA, ULG, Liège, septembre 2013.

Montrer que, lorsque les côtés d'un triangle ont pour expression

$$\begin{cases} a = x^2 + x + 1 \\ b = 2x + 1 \qquad\qquad \text{avec } x > 1 \\ c = x^2 - 1 \end{cases}$$

alors, l'un des angles du triangle vaut 120°. Résoudre le triangle pour $x = 2$

Si $x > 1$ alors on a $x^2 + x + 1 > 2x + 1$ et $x^2 + x + 1 > x^2 - 1$

On peut dès lors supposer que l'angle de 120° est l'angle A opposé au côté a.

On doit alors vérifier : $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

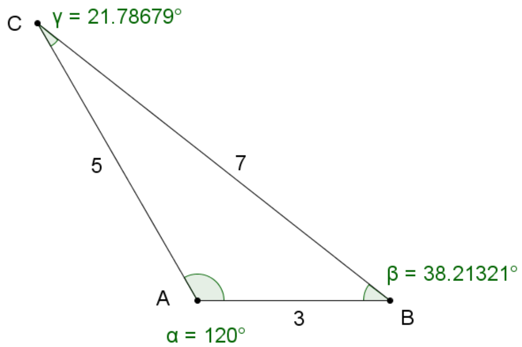
En effet, si on remplace et que l'on développe, on constate que la relation est bien vérifiée:

$$\left(x^2 + x + 1\right)^2 = (2x+1)^2 + \left(x^2 - 1\right)^2 - 2(2x+1)\left(x^2 - 1\right)\left(-\frac{1}{2}\right)$$

On a donc $A = 120°,\ a = 7, b = 5, c = 3$

$\Rightarrow \sin B = \dfrac{b}{a}\sin A \Rightarrow \sin B = \dfrac{5}{7}.\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{5\sqrt{3}}{14} \Rightarrow B = 38.21°$

$\Rightarrow C = 180° - 120° - 38.21° = 21.79°$



---

21 octobre 2013