

Exercices résolus de mathématiques.

Trigonométrie

Calcul numérique

TRI 38

EXTRI380-EXTRI389

<http://www.matheux.c.la>

Jacques Collot
Benoit Baudalet – Steve Tumson
Jan Frans Broeckx – Nicole Berckmans
Fabienne Zoetard

Mai 2014

EXTRI380 – FACSA, ULG, Liège, septembre 2013.

Vérifier l'identité et préciser les conditions d'existence :

$$\frac{\tan(a+b) + \tan(a-b)}{\tan(a+b) - \tan(a-b)} = \frac{\tan a(1 + \tan^2 b)}{\tan b(1 + \tan^2 a)}$$

CE :

$$\left. \begin{array}{l} \tan a \Rightarrow a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\ \tan b \Rightarrow b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\ 1 + \tan^2 a \neq 0 \Rightarrow \text{toujours vérifié} \\ \tan(a+b) \neq 0 \Rightarrow a+b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\ \tan(a-b) \neq 0 \Rightarrow a-b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\ \tan(a+b) - \tan(a-b) \neq 0 \Rightarrow a+b \neq a-b + k\pi \Rightarrow b \neq \frac{k\pi}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\ b \neq k\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Modifions le membre de gauche en tenant compte que $\begin{cases} \tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y} \\ \tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y} \end{cases}$

$$\begin{aligned} \frac{\tan(a+b) + \tan(a-b)}{\tan(a+b) - \tan(a-b)} &= \frac{\frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b} + \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}}{\frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b} - \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}} \\ &= \frac{(\tan a + \tan b)(1 + \tan a \tan b) + (\tan a - \tan b)(1 - \tan a \tan b)}{(\tan a + \tan b)(1 + \tan a \tan b) - (\tan a - \tan b)(1 - \tan a \tan b)} \end{aligned}$$

On développe et on simplifie pour arriver à

$$\frac{2 \tan a + 2 \tan a \tan^2 b}{2 \tan b + 2 \tan^2 a \tan b} = \frac{\tan a(1 + \tan^2 b)}{\tan b(1 + \tan^2 a)}$$

EXTRI381 – FACSA, ULG, Liège, septembre 2013.

Vérifier l'identité et préciser les conditions d'existence:

$$\tan(a+b) = \frac{\sin^2 a - \sin^2 b}{\sin a \cos a - \sin b \cos b}$$

CE :

$$\left. \begin{array}{l} 1) a+b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\ 2) \sin a \cos a \neq \sin b \cos b \Rightarrow \sin 2a \neq \sin 2b \\ \Rightarrow \begin{cases} 2a \neq 2b + k\pi \\ 2a \neq \pi - 2b + k\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a-b \neq k\frac{\pi}{2} \\ a+b \neq \frac{\pi}{2} + k\frac{\pi}{2} \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} a \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \\ b \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Modifions le membre de droite. (Les formules sont rappelées en-dessous)

$$\begin{aligned} \frac{\sin^2 a - \sin^2 b}{\sin a \cos a - \sin b \cos b} &= \frac{\frac{1 - \cos 2a}{2} - \frac{1 - \cos 2b}{2}}{\frac{1}{2} \sin 2a - \frac{1}{2} \sin 2b} = \frac{\cos 2b - \cos 2a}{\sin 2a - \sin 2b} \\ &= -\frac{\sin(b+a)\sin(b-a)}{\cos(a+b)\sin(a-b)} = \tan(a+b) \end{aligned}$$

Rappels:

$$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x \Rightarrow \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

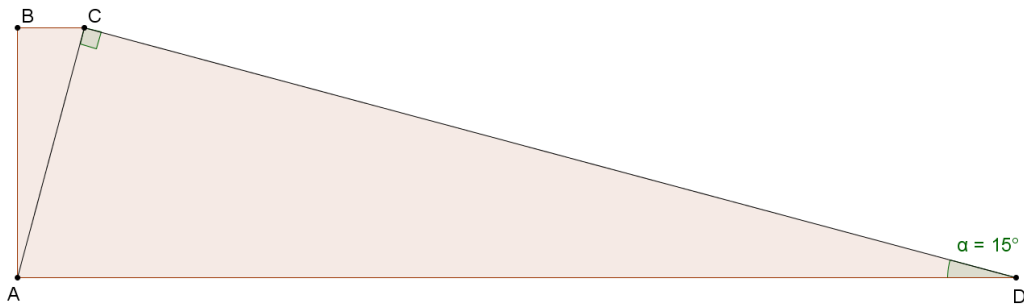
$$\cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$$

$$\sin p - \sin q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$$

Le 15 mai 2014

EXTRI382 – FACSA, ULG, Liège, septembre 2013.

Un des angles d'un trapèze rectangle $ABCD$ vaut 15° . La plus petite diagonale vaut 7 centimètres et est perpendiculaire au côté oblique. Calculer le périmètre et l'aire du trapèze. Utiliser 4 chiffres derrière la virgule dans les calculs.



$BAC = CDA = 15^\circ$ car angles à côtés perpendiculaires.

$$\overline{AB} = \overline{AC} \cdot \cos 15^\circ = 6.7615$$

$$\overline{BC} = \overline{AC} \cdot \sin 15^\circ = 1.8117$$

$$\overline{CD} = \overline{AC} \cdot \tan 75^\circ = 26.1244$$

$$\overline{AD} = \frac{\overline{AC}}{\cos 75^\circ} = 27.0459$$

$$\text{Périmètre : } p = 61.7435$$

$$\text{Aire : } A = \frac{\overline{BC} + \overline{AD}}{2} \cdot \overline{AB} = \frac{1.8117 + 27.049}{2} \cdot 6.7615 = 97.5603$$

15 mai 2014

EXTRI383 – FACSA, ULG, Liège, septembre 2013.

Soit l'équation suivante :

$$\sqrt{2 \tan x + 1} = \frac{2}{\cos^2 x} - 2 \tan^2 x - \tan x$$

- Donner les conditions d'existence.
- Résoudre l'équation.
- Tracer les solutions entre $[0, 2\pi]$ sur le cercle trigonométrique

CE :

- 1) $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$
 - 2) $2 \tan x + 1 \geq 0 \Rightarrow \tan x \geq -\frac{1}{2}$
 - 3) $\frac{2}{\cos^2 x} \geq 2 \tan^2 x + \tan x \Rightarrow 2 + 2 \tan^2 x \geq 2 \tan^2 x + \tan x \Rightarrow \tan x \leq 2$
- $\Rightarrow x \in [-0.46365 + k\pi, 1.1071 + k\pi[$ avec $k \in \mathbb{Z}$

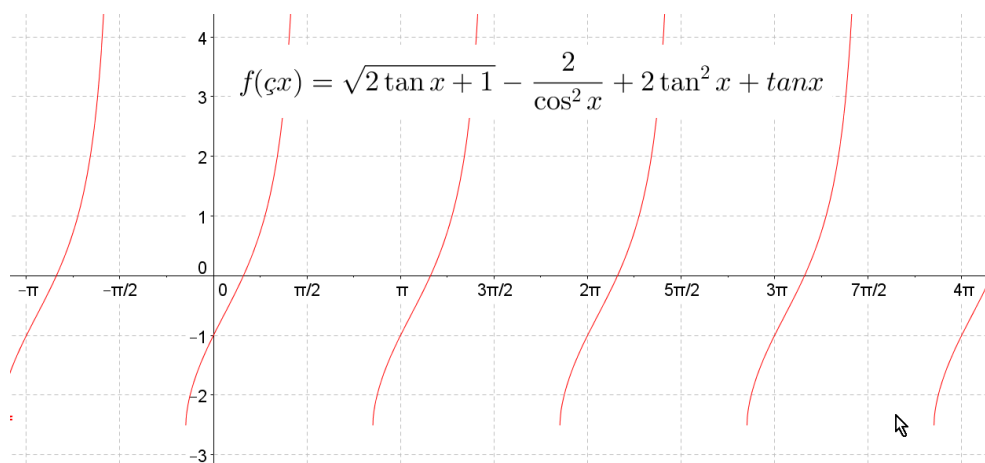
$$\sqrt{2 \tan x + 1} = \frac{2}{\cos^2 x} - 2 \tan^2 x - \tan x \quad \text{or} \quad 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\Rightarrow \sqrt{2 \tan x + 1} = 2 + \cancel{2 \tan^2 x} - \cancel{2 \tan^2 x} - \tan x$$

$$\Rightarrow 2 \tan x + 1 = 4 - 4 \tan x + \tan^2 x \Rightarrow \tan^2 x - 6 \tan x + 3 = 0$$

$$\Rightarrow \tan x = 3 \pm \sqrt{6} \Rightarrow \begin{cases} x = 1.3893 & \text{à rejeter} \\ x = 0.50323 + k\pi \end{cases}$$

Conclusion : $x = 0.50323 + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}$



EXTRI384 – EPL, UCL, LLN, juillet 2014.

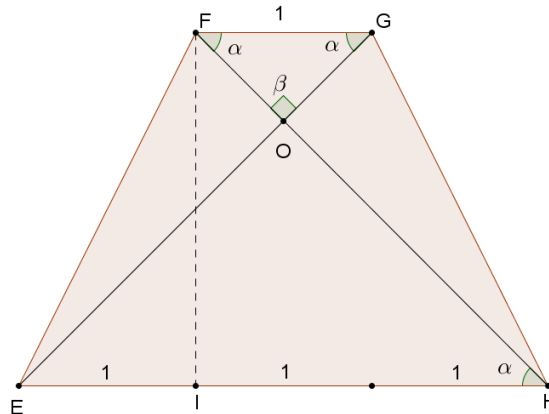
On considère un trapèze *isocèle* $EFGH$.

La longueur de la grande base EH est égale à 3 m et celle de la petite base, FG , est égale à 1 m.

L'aire de ce trapèze est égale à 4 m^2 .

1. Représentez schématiquement le quadrilatère, en indiquant clairement les notations introduites dans l'énoncé ainsi que les variables que vous utiliserez dans vos calculs.
2. Soit O , le point d'intersection des diagonales du trapèze, indiquez ce point sur la figure que vous avez dessinée précédemment. Calculez la distance de ce point à la petite base.
3. Du sommet G du trapèze, on abaisse une perpendiculaire à la diagonale FH . Soit K , le point d'intersection de cette perpendiculaire avec FH . Représentez ces éléments sur la figure et calculez le rapport GK / KH .

Solution proposée par Nicole Berckmans



$$h = FI, \quad \overline{EI} = 1, \quad S = 4 \text{ m}^2 = \frac{(1+3)h}{2} \Rightarrow h = 2 \text{ m}$$

$$\overline{EF} = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5} \text{ m}, \quad \tan \alpha = \frac{\overline{FI}}{\overline{IH}} = \frac{2}{2} = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}; \beta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow K \equiv O$$

Les triangles FGO et HEO sont semblables, $k = \frac{1}{3}$.

\Rightarrow distance de O à $FG = \frac{1}{3}$ distance de O à EH .

Puisque $FI = 2$, distance de O à $FG = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \text{ m}$

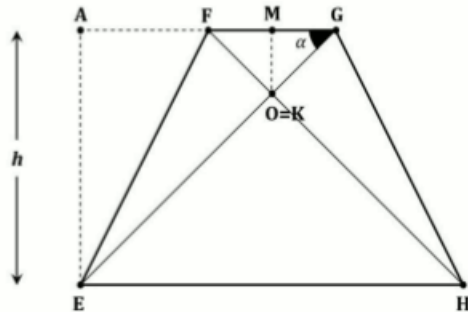
$$\frac{\overline{GO}}{\overline{OH}} = \frac{1}{3} \text{ car } 3\overline{GO} = \overline{OH} \quad (k = \frac{1}{3})$$

Solution proposée par Jan Frans Broeckx

- 1) Soit h la distance entre la grande base et la petite base du trapèze. Alors son aire S est égale à :

$$S = \frac{\overline{EH} + \overline{FG}}{2} \cdot h \quad \Rightarrow \quad h = \frac{2S}{\overline{EH} + \overline{FG}} = \frac{2.4}{3 + 1} = 2 \text{ m}$$

et la figure du trapèze, à l'échelle, est alors :



- 2) Soit A l'intersection de la perpendiculaire à la grande base en E avec la droite portant la petite base. Le triangle EAF est rectangle en A, et donc :

$$\overline{EF} = \sqrt{\overline{EA}^2 + \overline{AF}^2} = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{5} \text{ m}$$

- 3) Soit α l'angle FGE :

$$\tan \alpha = \frac{\overline{AE}}{\overline{AM}} = \frac{2}{2} = 1 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 45^\circ$$

$$\Rightarrow \quad \overline{OM} = \overline{MG} = \frac{\overline{FG}}{2} = 0,5 \text{ m}$$

- 4) Le pied K de la perpendiculaire à FG issue de G coïncide avec le point d'intersection O des diagonales, puisque celles-ci font des angles de $\pm 45^\circ$ avec la direction des bases, et sont donc perpendiculaires. Le triangle GMO étant similaire au triangle GAE, on a que :

$$\frac{\overline{GK}}{\overline{KH}} = \frac{\overline{GO}}{\overline{OE}} = \frac{\overline{MO}}{h - \overline{MO}} = \frac{0,5}{1,5} = \frac{1}{3}$$

14 septembre 2014

EXTRI385 – – EPL, UCL, LLN, juillet 2014.

On demande de résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} x + y = \frac{\pi}{4} \\ \sqrt{2} \sin x \sin y + 1 = 0 \end{cases}$$

et de représenter les solutions sur le cercle trigonométrique

Solution proposée par Nicole Berckmans

Remarquons que $\sqrt{2} \sin x \sin y + 1 = 0$ est une équation symétrique en x et y .

$$\text{On a : } \sqrt{2} \sin x \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) + 1 = 0 \Rightarrow \sqrt{2} \sin x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (\cos x - \sin x) + 1 = 0$$

$$\Rightarrow \sin x \cos x - \sin^2 x + 1 = 0 \Rightarrow \sin x \cos x + \cos^2 x = 0$$

$$\Rightarrow \cos x (\sin x + \cos x) = 0$$

$$1) \cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$2) \sin x + \cos x = 0 \Rightarrow \tan x + 1 = 0 \Rightarrow \tan x = -1 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$$

Sur le cercle trigonométrique $[0, 2\pi]$

$$\left. \begin{array}{l} \left[x = \frac{\pi}{2}, y = -\frac{\pi}{4} \right] \\ \left[x = \frac{3\pi}{2}, y = -\frac{5\pi}{4} \right] \\ \left[x = \frac{7\pi}{4}, y = -\frac{3\pi}{2} \right] \\ \left[x = \frac{3\pi}{4}, y = -\frac{\pi}{2} \right] \end{array} \right\}$$

Il n'y a pas de couple (x, y) tels que x et y appartiennent tous les deux à $[0, 2\pi]$

Solution proposée par Jan Frans Broeckx

Remarquez tout d'abord que le système est symétrique en x et y ; par conséquent, pour toute solution $(x, y) = (a, b)$ trouvée, le couple $(x, y) = (b, a)$ sera également une solution.

De la première équation on tire

$$y = \frac{\pi}{4} - x$$

ce qu'on remplace dans la deuxième équation, qu'on résout ensuite pour x :

$$\begin{aligned} & \sqrt{2} \sin x \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) + 1 = 0 \\ \Leftrightarrow & \sqrt{2} \sin x \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos x - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x\right) + 1 = 0 & \left(\sin \frac{\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ \Leftrightarrow & \sin x \cos x - \sin^2 x + (\sin^2 x + \cos^2 x) = 0 \\ \Leftrightarrow & (\sin x + \cos x) \cos x = 0 \end{aligned}$$

a) $\cos x = 0$

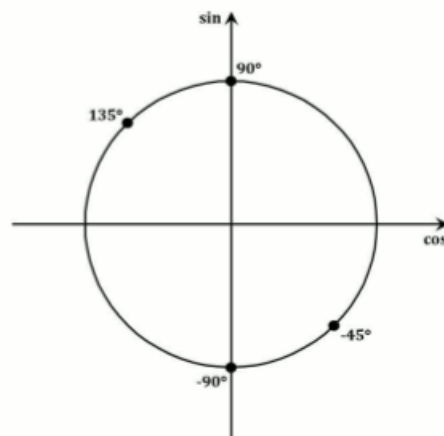
$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ et } y = -\frac{\pi}{4} - k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

b) $\sin x + \cos x = 0 \Leftrightarrow \cos x = -\sin x$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \text{ et } y = \frac{\pi}{2} - k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

L'ensemble des solutions du système est donc :

$$\begin{aligned} S = & \left\{ \left(\frac{\pi}{2} + k\pi ; -\frac{\pi}{4} - k\pi \right) \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \\ & \cup \left\{ \left(-\frac{\pi}{4} + k\pi ; \frac{\pi}{2} - k\pi \right) \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \end{aligned}$$



14 septembre 2014

EXTRI386 – – EPL, UCL, LLN, juillet 2014.

Cochez chaque fois l'unique affirmation vraie parmi les trois possibilités.

Réponse juste = 1 point, autre réponse = 0

- Dans un triangle ABC de côtés a, b et c (opposés aux angles respectifs A, B et C)

d'aire S , on a $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c} =$

$$\frac{S}{2abc} \quad \square$$

$$\frac{S}{abc} \quad \square$$

$$\frac{2s}{abc} \quad \square$$

- Dans l'intervalle $0 < x < \pi$, l'équation $\cos^2 x + \frac{1}{4} \cos^2 2x = 0$ admet exactement

$$0 \text{ solution} \quad \square$$

$$1 \text{ solution} \quad \square$$

$$2 \text{ solutions} \quad \square$$

- L'expression $1 - 8 \cos^2 \sin^2 a$ est identiquement égale à

$$\cos 2a \quad \square$$

$$\cos 4a \quad \square$$

$$\cos 8a \quad \square$$

- Dans un triangle ABC , si $\cos^2(A - B) - \cos 2B = \frac{1}{2}$, alors

$$C = 90^\circ \quad \square$$

$$C = 60^\circ \text{ ou } C = 120^\circ \quad \square$$

$$C = 45^\circ \text{ ou } C = 135^\circ \quad \square$$

Solution proposée par Nicole Berckmans

1) Rép : $\frac{2S}{abc}$. En effet prenons un triangle rectangle isocèle d'hypothénuse a et de côtés de

l'angle droit b . On a $a^2 = 2b^2$, $S = \frac{b^2}{2}$ et $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} \Rightarrow \frac{1}{a} = \frac{\sqrt{2}/2}{b}$

D'autre part : $\frac{2S}{abc} = \frac{2b^2/2}{abb} = \frac{1}{a} \Rightarrow \frac{2S}{abc} = \frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b}$

2) Rép : 0 solution.

La somme de 2 carrés est nul si chacun est nul.

$$\left. \begin{array}{l} \cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \dots \\ \cos 2x = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \\ x = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \dots \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow S = \emptyset$$

3) Rép $\cos 4a$

$$1 - 8\cos^2 a \sin^2 a = 1 - 2\sin^2 2a = \cos 4a \quad (\text{Carnot})$$

$$4) \cos^2(a-b) - \cos 2a \cos 2b = \frac{1}{2}$$

$$(\cos a \cos b + \sin a \sin b)^2 - (\cos^2 a - \sin^2 a)(\cos^2 b - \sin^2 b) = \frac{1}{2}$$

.....

$$(\cos a \sin b + \sin a \cos b)^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} \sin(a+b) = \pm \sqrt{2}/2 \\ \text{Or } \sin(a+b) = \sin c \text{ car } c = 180^\circ - (a+b) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sin c = \pm \sqrt{2}/2 \Rightarrow c = 45^\circ \text{ ou } 135^\circ$$

Solution proposée par Jan Frans Broeckx

Dans un triangle ABC de côtés a, b et c et d'aire S , on a :

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c} = \frac{2S}{abc}$$

parce-que la formule pour l'aire du triangle ABC est $S = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2}ac \sin B = \frac{1}{2}ab \sin C$.

Dans l'intervalle $0 < x < \pi$, l'équation $\cos^2 x + \frac{1}{4}\cos^2 2x = 0$ admet exactement **0 solutions**, parce-que :

$$\begin{aligned}\cos^2 x + \frac{1}{4}\cos^2 2x = 0 &\Leftrightarrow \cos^2 x + \frac{1}{4}(2\cos^2 x - 1)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \cos^2 x + \frac{1}{4}(4\cos^4 x - 4\cos^2 x + 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow \cos^2 x + \frac{1}{4} = 0 \\ &\Leftrightarrow \cos^2 x = -\frac{1}{4} \quad \text{Impossible!}\end{aligned}$$

L'expression $1 - 8\cos^2 a \sin^2 a$ est identiquement égale à **$\cos 4a$** , parce-que :

$$1 - 8\cos^2 a \sin^2 a = 1 - 2(2\sin a \cos a)^2 = 1 - 2\sin^2 2a = \cos 4a$$

Dans un triangle ABC, si $\cos^2(A - B) - \cos 2A \cos 2B = \frac{1}{2}$, alors **$C = 45^\circ$ ou $C = 135^\circ$** , parce-que :

$$\begin{aligned}\cos^2(A - B) - \cos 2A \cos 2B = \frac{1}{2} &\Leftrightarrow 2\left(\cos^2(A - B) - \frac{1}{2}\right) - 2\cos 2A \cos 2B = 0 \\ &\Leftrightarrow (2\cos^2(A - B) - 1) - 2\cos 2A \cos 2B = 0 \\ &\Leftrightarrow \cos(2(A - B)) - 2\cos 2A \cos 2B = 0 \\ &\Leftrightarrow \cos 2A \cos 2B + \sin 2A \sin 2B - 2\cos 2A \cos 2B = 0 \\ &\Leftrightarrow \sin 2A \sin 2B - \cos 2A \cos 2B = 0 \\ &\Leftrightarrow \cos(2(A + B)) = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Donc : } 2(A + B) = 90^\circ &\quad \text{ou} \quad 2(A + B) = 270^\circ \\ A + B = 45^\circ &\quad \text{ou} \quad A + B = 135^\circ \\ C = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ &\quad \text{ou} \quad C = 180^\circ - 135^\circ = 45^\circ\end{aligned}$$

14 septembre 2014

EXTRI387 – – EPL, UCL, LLN, juillet 2014.

1) Répondez à la question 1a) ou 1b), en donnant le développement qui mène à la réponse.

1a) Un but de football a une largeur l et une hauteur h connues. Un joueur dispose d'un angle de tir¹ au but au raz du sol égal à α et il remarque que la distance qui le sépare du second poteau vaut le double de la distance d qui le sépare du premier poteau. Exprimez d en fonction de l et α .

1b) Soit FBC un triangle dont l'angle F vaut α et dont le côté BC est de longueur l . La longueur d du côté FB vaut la moitié de la longueur du côté FC . Exprimez d en fonction de l et α .

2) Répondez à la question 2a) ou 2b), en donnant le développement qui mène à la réponse.

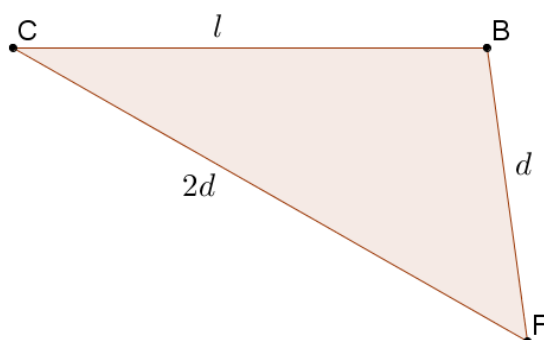
2a) Le joueur se trouve maintenant face au but à égale distance des deux poteaux et dispose d'un angle de tir β sur la barre transversale. Exprimez la distance x qui sépare le joueur de la ligne de but en fonction de l, h et β

2b) Un triangle ABC , isocèle en A , est tracé sur le sol horizontal. On considère un rectangle vertical $BCDE$ de longueur l et de hauteur h . Soit β l'angle DAE . Exprimez la distance x entre A et la droite BC en fonction de l, h et β

3) Calculer d et x au cm près pour les données suivantes : $l = 7.32$ m, $h = 2.44$ m, $\alpha = 20^\circ, \beta = 20^\circ$.

¹ L'angle de tir sur un segment AB à partir d'un point C est l'angle ACB

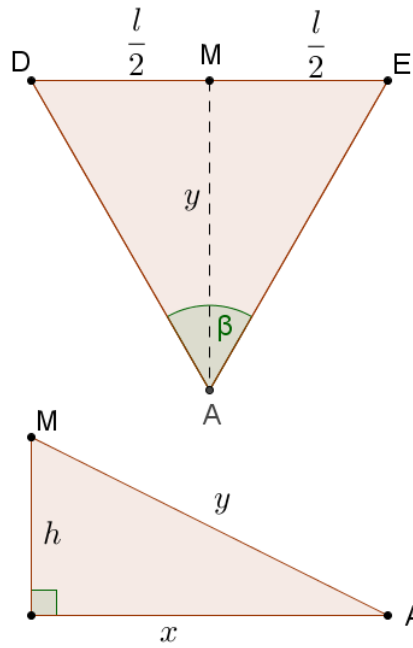
Solution proposée par Nicole Berckmans



$$l^2 = d^2 + 4d^2 - 4d^2 \cos \alpha$$

$$\frac{l^2}{d^2} = 5 - 4 \cos \alpha$$

$$d = \frac{l}{\sqrt{5 - 4 \cos \alpha}} = 6.57 \text{ m}$$



$$\tan \frac{\beta}{2} = \frac{l/2}{x}$$

$$y = \frac{l}{2 \tan \frac{\beta}{2}}$$

$$y^2 = x^2 + h^2$$

$$x^2 = \frac{l^2}{4 \tan^2 \beta/2} - h^2$$

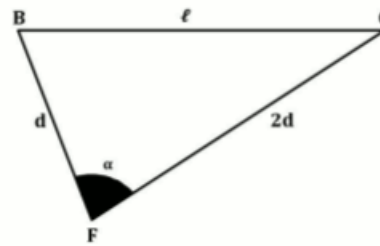
$$x = 20.61 \text{ m}$$

Solution proposée par Jan Frans Broeckx

- 1) Les questions 1a) et 1b) sont deux formulations équivalentes du même problème.

Application du théorème d'Al Kashi donne :

$$\begin{aligned}\ell^2 &= d^2 + (2d)^2 - 2d(2d) \cos \alpha \\ &= 5d^2 - 4d^2 \cos \alpha \\ &= (5 - 4 \cos \alpha)d^2 \\ \Rightarrow d &= \frac{\ell}{\sqrt{5 - 4 \cos \alpha}}\end{aligned}$$



- 2) Les questions 2a) et 2b) sont deux formulations équivalentes du même problème.

Soit M le milieu de BC. Le triangle horizontal AMC est rectangle en M, donc :

$$x^2 = \overline{AC}^2 - \frac{1}{4}\ell^2$$

Le triangle vertical ACD est rectangle en C, donc :

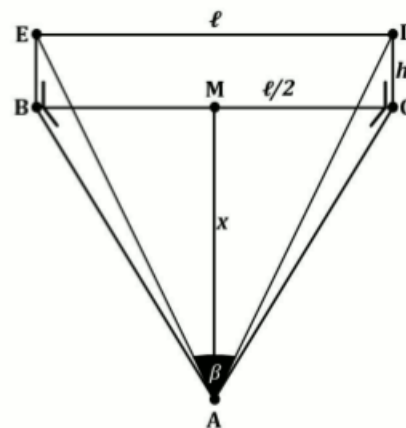
$$\overline{AC}^2 = \overline{AD}^2 - h^2$$

$$\text{et donc : } x^2 = \overline{AD}^2 - \frac{1}{4}\ell^2 - h^2$$

Le triangle oblique DAE est isocèle en A, c'est-à-dire $\overline{AE} = \overline{AD}$. Le théorème d'Al Kashi donne alors :

$$\ell^2 = \overline{AD}^2 + \overline{AE}^2 - 2\overline{AD} \overline{AE} \cos \beta = 2(1 - \cos \beta)\overline{AD}^2$$

$$\Rightarrow \overline{AD}^2 = \frac{\ell^2}{2(1 - \cos \beta)}$$



$$\Rightarrow x^2 = \frac{\ell^2}{2(1 - \cos \beta)} - \frac{1}{4}\ell^2 - h^2 \Rightarrow x = \sqrt{\left(\frac{1}{2(1 - \cos \beta)} - \frac{1}{4}\right)\ell^2 - h^2}$$

- 3) Avec $\ell = 7,32$ m, $h = 2,44$ m, $\alpha = 20^\circ$ et $\beta = 20^\circ$:

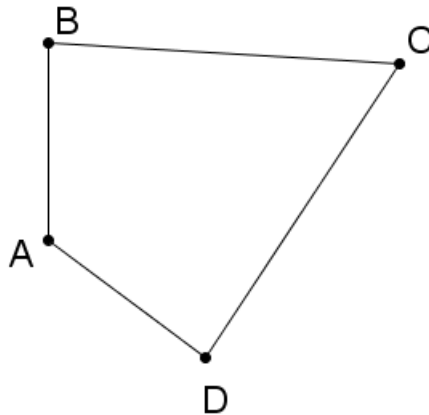
$$d = \frac{7,32}{\sqrt{5 - 4 \cos 20^\circ}} = 6,57 \text{ m}$$

$$x = \sqrt{\left(\frac{1}{2(1 - \cos 20^\circ)} - \frac{1}{4}\right)(7,32)^2 - (2,44)^2} = 20,61 \text{ m}$$

14 septembre 2014

EXTRI388 – – EPL, UCL, LLN, septembre 2014.

Considérons un quadrilatère $ABCD$ représenté schématiquement ci-dessous.



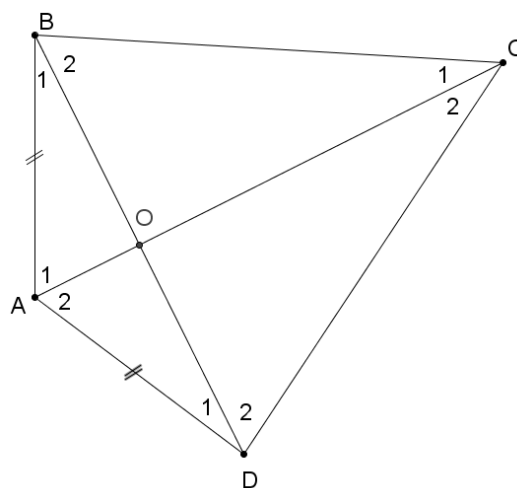
On précise que, dans ce quadrilatère :

- les côtés AB et AD sont de même longueur,
- les angles aux sommets B et D sont de même mesure.

Dans le cas particulier où la longueur de côté AB est égale à 1 m et l'angle au sommet A est de 120° ,

1. Exprimez la longueur de la diagonale AC en fonction de l'angle au sommet C .
2. Si la longueur de la diagonale AC est de 2 m, quelle est la valeur de l'angle au sommet C ?
3. Dans ce cas, calculez la surface et le périmètre du quadrilatère.

Solution proposée par Nicole Berckmans



1) Le triangle ABD étant isocèle, $B_1 = D_1$. Puisque $B_{12} = D_{12}$ le triangle CDB est aussi isocèle. Les points A et C étant tous les deux à égale distance de B et D , la droite AC est médiatrice du segment BD .

$$A_1 = A_2 = \widehat{120^\circ/2} = 60^\circ, \quad B_1 = D_1 = 30^\circ$$

Dans le triangle OAC : $\overline{AO} = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ et $\overline{BO} = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

$$\text{Dans le triangle } OBC : \tan \widehat{C_1} = \frac{\overline{OB}}{\overline{OC}}; \overline{OC} = \frac{\sqrt{3}}{2 \tan C_1}$$

$$\Rightarrow \overline{AC} = \overline{AO} + \overline{OC} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2 \tan C_1} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cot \frac{C_{12}}{2}$$

$$2) \text{ Si } \overline{AC} = 2 \text{ m, alors } 2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2 \tan C_1} \Rightarrow 4 = 1 + \sqrt{3} \cot C_1$$

$$\Rightarrow \cot C_1 = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} \Rightarrow C_1 = 30^\circ \Rightarrow C_{12} = 60^\circ$$

3) Surface :

$$\left. \begin{array}{l} \Delta ABD = \frac{1}{2} \overline{BD} \cdot \overline{AO} \\ \Delta CBD = \frac{1}{2} \overline{BD} \cdot \overline{OC} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{1}{2} \overline{BDAC} = \frac{1}{2} \times (2 \times \overline{BO}) \times 2 = \sqrt{3}$$

$$\text{Périmètre : } 2(AB + BC) = 2(1 + \sqrt{3})$$

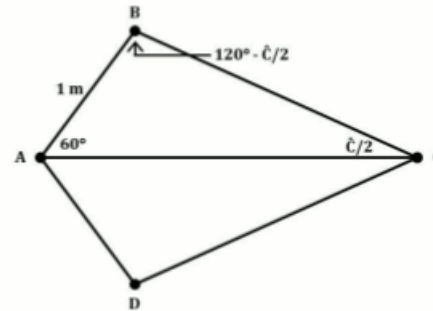
$$\text{car } \left. \begin{array}{l} \sin C_1 = \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \\ \sin C_1 = \frac{\overline{OB}}{\overline{BC}} = \frac{\sqrt{3}}{2BC} \end{array} \right\} \Rightarrow \overline{BC} = \sqrt{3}$$

Solution proposée par Jan Frans Broeckx

- 1) Etant donné que $\overline{AB} = \overline{AD}$, $\widehat{B} = \widehat{C}$ et que le côté AC est commun, les triangles ABC et ADC sont isométriques. Avec $\overline{AB} = 1$ m et $\widehat{A} = 120^\circ$, la situation est comme montré ci-dessous.

Règle aux sinus dans ABC :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin \frac{\widehat{C}}{2}} &= \frac{\overline{AC}}{\sin \left(120^\circ - \frac{\widehat{C}}{2} \right)} \Rightarrow \\ \overline{AC} &= \frac{\sin \left(120^\circ - \frac{\widehat{C}}{2} \right)}{\sin \frac{\widehat{C}}{2}} \\ &= \frac{\sin 120^\circ \cos \frac{\widehat{C}}{2} - \cos 120^\circ \sin \frac{\widehat{C}}{2}}{\sin \frac{\widehat{C}}{2}} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cot \frac{\widehat{C}}{2} + \frac{1}{2} \end{aligned}$$



- 2) Avec $\overline{AC} = 2$ m :

$$\cot \frac{\widehat{C}}{2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\overline{AC} - \frac{1}{2} \right) = \frac{2 \cdot 3}{\sqrt{3} \cdot 2} = \frac{3}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \tan \frac{\widehat{C}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \frac{\widehat{C}}{2} = 30^\circ \Leftrightarrow \widehat{C} = 60^\circ$$

- 3) $\widehat{B} = 90^\circ \Rightarrow \overline{BC} = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$ m

$$\text{Aire ABCD} = 2(\text{Aire ABC}) = 2 \left(\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sqrt{3} \right) = \sqrt{3} \text{ m}^2$$

$$\text{Périmètre ABCD} = 2(\sqrt{3} + 1) \text{ m}$$

14 septembre 2014

EXTRI389 – – EPL, UCL, LLN, septembre 2014.

Soient deux fonctions $f_1(x)$ et $f_2(x)$ (x étant une variable réelle) définies par :

$$f_1(x) = (1 + \sin^2 x)\cos x + (\sqrt{3}\cos^2 x - 1)\sin x$$

$$f_2(x) = \cos x - \sin x$$

Pour des valeurs de x comprises dans l'intervalle $[-\pi, \pi]$ le rapport $\frac{f_1(x)}{f_2(x)}$ est-il strictement supérieur à un?

Solution proposée par Nicole Berckmans

$$1 < \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{(1 + \sin^2 x)\cos x + (\sqrt{3}\cos^2 x - 1)\sin x}{\cos x - \sin x}$$

$$\Rightarrow 1 < \frac{\cos x - \sin x}{\cos x - \sin x} + \frac{\sin x \cos x (\sin x + \sqrt{3}\cos x)}{\cos x - \sin x}$$

$$\Rightarrow 0 < \sin x \cos x \frac{\sin x + \sqrt{3}\cos x}{\cos x - \sin x}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin x + \sqrt{3}\cos x \Rightarrow \tan x = -\sqrt{3} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{3} \\ x = \frac{2\pi}{3} \end{cases} \\ \cos x - \sin x = 0 \Rightarrow \tan x = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{3\pi}{4} \\ x = \frac{\pi}{4} \end{cases} \end{array} \right.$$

x	$-\pi$	$-\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	π								
$\sin x$	0	-	-	-	-	-	-	0	+	+	+	+	+	+	+	0	
$\cos x$	-	-	-	0	+	+	+	+	+	+	+	0	-	-	-	-	
$\sin x + \sqrt{3}\cos x$	-	-	-	-	0	+	+	+	+	+	+	+	0	-	-	-	
$\cos x - \sin x$	-	-	0	+	+	+	+	+	+	0	-	-	-	-	-	-	
	0	+	/	-	0	+	0	-	0	+	/	-	0	+	0	-	0

Conclusion : $x \in \left] -\pi, -\frac{3\pi}{4} \right[\cup \left] -\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{3} \right[\cup \left] 0, \frac{\pi}{4} \right[\cup \left] \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3} \right[$

Solution proposée par Jan Frans Broeckx

C'est une inéquation, qu'on peut transformer comme suit :

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)} > 1 \Leftrightarrow f(x) \equiv \frac{f_1(x) - f_2(x)}{f_2(x)} > 0 \Leftrightarrow f(x) = \frac{\sin x \cos x (\sin x + \sqrt{3} \cos x)}{\cos x - \sin x} > 0$$

Conditions d'existence :

$f(x)$ n'existe pas si $\sin x = \cos x$, c'est-à-dire pour $x = \frac{\pi}{4}$ et $x = -\frac{3\pi}{4}$ (dans l'intervalle $[-\pi, \pi]$).

Racines du numérateur (dans l'intervalle $[-\pi, \pi]$) :

- $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ et $x = \pm\pi$
- $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{2}$
- $\sin x + \sqrt{3} \cos x = 0 \Leftrightarrow \tan x = -\sqrt{3} \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{3}$ et $x = \frac{2\pi}{3}$

Tableau des signes :

x	$-\pi$	$-\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	π								
$\sin x$	0	-	-	-	-	-	0	+	+	+	+	+	+	0			
$\cos x$	-	-	-	0	+	+	+	+	+	0	-	-	-	-			
$\sin x + \sqrt{3} \cos x$	-	-	-	-	0	+	+	+	+	+	+	+	0	-			
$\cos x - \sin x$	-	-	0	+	+	+	+	+	+	0	-	-	-	-			
$f(x)$	0	+		-	0	+	0	-	0	+		-	0	+	0	-	0

Solution :

$$S =]-\pi; -\frac{3\pi}{4}[\cup]-\frac{\pi}{2}; -\frac{\pi}{3}[\cup]0; \frac{\pi}{4}[\cup]\frac{\pi}{2}; \frac{2\pi}{3}[$$

