

**Exercices résolus de mathématiques.**

# **Trigonométrie**

# **Calcul numérique**

**TRI 40**

**EXTRI400-EXTRI409**

<http://www.matheux.c.la>

Jacques Collot  
Benoit Baudalet – Steve Tumson  
Jan Frans Broeckx – Nicole Berckmans  
Fabienne Zoetard

Janvier 2015

# EXTRI400 – FACSA, ULG, Liège, septembre 2014.

Montrer que :

$$\sin \frac{\pi}{12} \sin \frac{7\pi}{12} = \frac{1}{4}$$

---

$$\begin{aligned} \sin \frac{\pi}{12} \cdot \sin \frac{7\pi}{12} &= \frac{\sin \frac{\pi}{6}}{2 \cos \frac{\pi}{12}} \cdot \sin \frac{5\pi}{12} & \text{car } \begin{cases} \sin \frac{\pi}{6} = 2 \sin \frac{\pi}{12} \cdot \cos \frac{\pi}{12} \\ \frac{7\pi}{12} \text{ et } \frac{5\pi}{12} \text{ sont supplémentaires} \end{cases} \\ &= \frac{\frac{1}{2}}{2 \sin \frac{5\pi}{12}} \cdot \sin \frac{5\pi}{12} & \text{car } \frac{\pi}{12} \text{ et } \frac{5\pi}{12} \text{ sont complémentaires} \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

---

20 janvier 2015

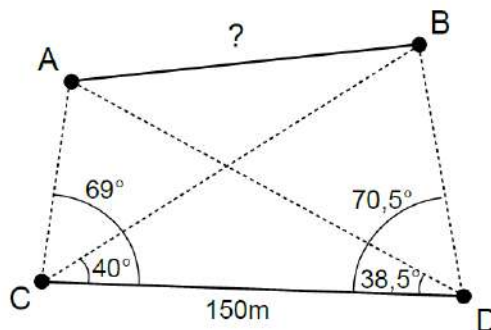
## EXTRI401 – FACSA, ULG, Liège, septembre 2014.

Pour déterminer la distance entre 2 points inaccessibles  $A$  et  $B$ , on choisit une base d'opération  $CD$  longue de 150 m et on mesure les angles  $BCD = 40^\circ$ ,  $ACD = 69^\circ$ ,  $ADC = 38.5^\circ$  et  $BDC = 70.5^\circ$ . Calculer la distance  $AB$  (le dessin ci-dessous n'est pas à l'échelle!)

---

**Nous reprenons la solution proposée par l'université.**  
**(Prof. P. Duysinx et Prof. P. Dewallef)**

La configuration décrite dans l'énoncé peut se représenter de la manière suivante (le dessin n'est pas à l'échelle!) :



En appliquant le théorème de Pythagore généralisé au triangle  $ABC$  il vient :

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 - 2\overline{AC} \overline{BC} \cos \widehat{ACB}$$

Le segment  $\overline{AC}$  peut être déterminé en appliquant la relation des sinus dans le triangle  $ACD$  :

$$\frac{\overline{AC}}{\sin \widehat{ADC}} = \frac{\overline{DC}}{\sin \widehat{CAD}} \Rightarrow \overline{AC} = \frac{\overline{DC} \sin \widehat{ADC}}{\sin \widehat{CAD}}$$

L'angle  $\widehat{ADC}$  est donné dans l'énoncé et vaut  $38.5^\circ$  alors que l'angle  $\widehat{CAD}$  peut être évalué en notant que la somme des angles d'un triangle vaut  $180^\circ$  ce qui, appliqué au triangle  $ACD$  donne :

$$180^\circ = \widehat{ADC} + \widehat{CDA} + \widehat{ADC} + \widehat{CAD} \Rightarrow \widehat{CAD} = 180^\circ - 69^\circ - 38.5^\circ = 72.5^\circ$$

ainsi nous calculons  $\overline{AC} = \frac{150 \text{ m} \times \sin 38.5^\circ}{\sin 72.5^\circ} = 97.91 \text{ m.}$

Pour déterminer le segment  $\overline{BC}$ , nous procédons de manière similaire en appliquant Pythagore généralisé au triangle  $BCD$  :

$$\frac{\overline{BC}}{\sin \widehat{BDC}} = \frac{\overline{DC}}{\sin \widehat{CBD}} \Rightarrow \overline{BC} = \frac{\overline{DC} \sin \widehat{BDC}}{\sin \widehat{CBD}}$$

L'angle  $\widehat{BDC}$  est donné dans l'énoncé et vaut  $70.5^\circ$  alors que l'angle  $\widehat{CBD}$  peut être évalué en notant que la somme des angles d'un triangle vaut  $180^\circ$  ce qui, appliqué au triangle  $BCD$  donne :

$$180^\circ = \widehat{BDC} + \widehat{CDB} + \widehat{BDC} + \widehat{CBD} \Rightarrow \widehat{CBD} = 180^\circ - 70.5^\circ - 40^\circ = 69.5^\circ$$

et nous calculons  $\overline{BC} = \frac{150 \text{ m} \times \sin 70.5^\circ}{\sin 69.5^\circ} = 150.96 \text{ m.}$

Le segment  $\overline{AB}$  est alors estimé en reprenant la première relation :

$$\begin{aligned} \overline{AB}^2 &= \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 - 2 \overline{AC} \overline{BC} \cos \widehat{ACB} \\ &= 97,91^2 + 150,96^2 - 2 \times 97,91 \times 150,96 \times \cos(69^\circ - 40^\circ) \\ &= 6520,45 \Rightarrow \overline{AB} = 80,75 \text{ m.} \end{aligned}$$

## EXTRI402 – FACS, ULB, Brussels, juillet 2014.

$$\text{On pose } y = \arcsin\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)$$

Calculer  $\cos(4y)$  et en déduire  $y$ .

---

### Solution proposée par Jan Frans Broeckx

$$y = \arcsin\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right) \Leftrightarrow \sin y = \frac{1+\sqrt{5}}{4} \quad (\sin y > 0)$$

$$\text{et } \cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y} = \sqrt{1 - \frac{(1+\sqrt{5})^2}{16}} = \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4} = \frac{\sqrt{10(\sqrt{5}-1)}}{4}$$

$$\sin 2y = 2 \sin y \cos y = \frac{(1+\sqrt{5})\sqrt{10}\sqrt{\sqrt{5}-1}}{8} = \frac{\sqrt{10(\sqrt{5}+1)^2(\sqrt{5}-1)}}{8} = \frac{\sqrt{10(\sqrt{5}+1)}}{4}$$

$$\sin^2 2y = \frac{5(\sqrt{5}+1)}{8}$$

$$\cos 4y = 1 - 2 \sin^2 2y = 1 - \frac{5(\sqrt{5}+1)}{4} = -\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)$$

$$\Rightarrow \cos 4y = -\sin y = -\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)$$

On en déduit que :

$$\cos 4y = -\sin y = \sin(-y) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + y\right)$$

et donc que :

$$4y = \pm\left(\frac{\pi}{2} + y\right) + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \quad \text{et} \quad -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$$

$$(a) \quad 4y = \frac{\pi}{2} + y + 2k\pi \Leftrightarrow y = \frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3}$$

Les deux solutions appartenant à l'intervalle  $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$  sont :

$$y = \frac{\pi}{6} \quad \text{à rejeter puisque } \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} \neq \frac{1+\sqrt{5}}{4}$$

$$y = -\frac{\pi}{2} \quad \text{à rejeter puisque } \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1 \neq \frac{1+\sqrt{5}}{4}$$

$$(b) \quad 4y = -\frac{\pi}{2} - y + 2k\pi \Leftrightarrow y = -\frac{\pi}{10} + k\frac{2\pi}{5}$$

Les deux solutions appartenant à l'intervalle  $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$  sont :

$$y = -\frac{\pi}{10} \quad \text{à rejeter puisque } \sin\left(-\frac{\pi}{10}\right) < 0$$

$$y = \frac{3\pi}{10} \quad \text{solution acceptable.}$$

$$\Rightarrow y = \frac{3\pi}{10} = 54^\circ$$

### Solution proposée par Jacques Collot

$$y = \arcsin\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right) \Rightarrow \sin(y) = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$$

Remarquons que  $1 > \frac{1+\sqrt{5}}{4} > \frac{\sqrt{2}}{2}$ . Ce qui implique  $\frac{\pi}{2} > y > \frac{\pi}{4}$  (1)

$$\cos(4y) = 1 - 2\sin^2(2y) = 1 - 8\sin^2(y) \cdot \cos^2(y) = 1 - 8\sin^2(y)(1 - \sin^2(y))$$

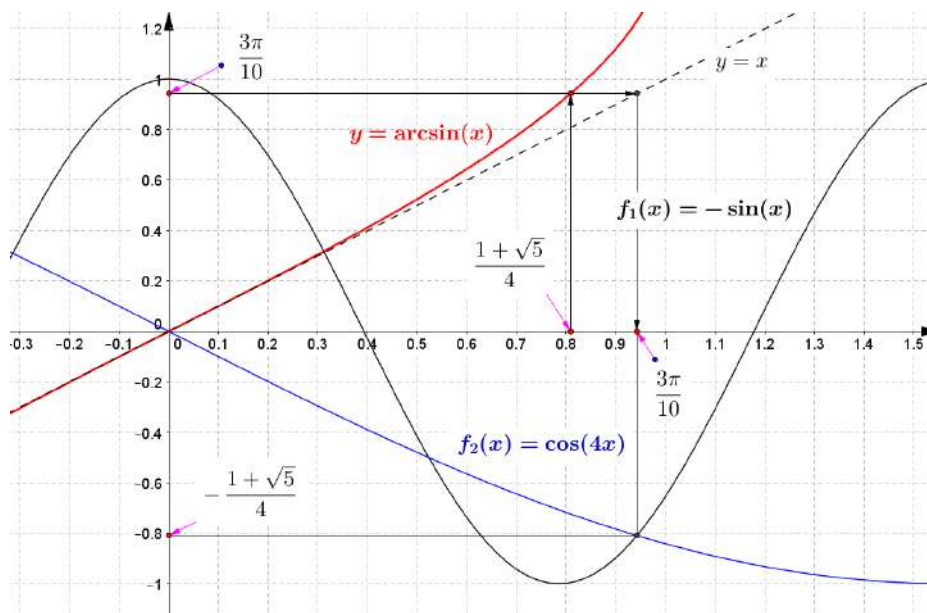
$$\text{Or } \sin^2(y) = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^2 = \frac{1}{8}(3+\sqrt{5})$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \cos(4y) &= 1 - 8 \cdot \frac{1}{8}(3+\sqrt{5}) \left(1 - \frac{1}{8}(3+\sqrt{5})\right) = 1 - \frac{1}{8}(3+\sqrt{5})(5-\sqrt{5}) \\ &= \frac{1}{8}(8 - 15 + 3\sqrt{5} - 5\sqrt{5} + 5) = -\frac{1+\sqrt{5}}{4} = -\sin(y) \end{aligned}$$

Il faut maintenant résoudre :

$$\cos(4y) = -\sin(y) \Rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{2} - 4y\right) = \sin(-y)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -y = \frac{\pi}{2} - 4y + 2k\pi \\ -y = \pi - \frac{\pi}{2} + 4y + 2k\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3} \text{ A rejeter en vertu de (1)} \\ y = -\frac{\pi}{10} + 2k\pi \text{ ou } \boxed{y = \frac{3\pi}{10}} \end{cases}$$



Le 30 juin 2015. Modifié le 1 septembre 2015

## EXTRI403 – FACS, ULB, Bruxelles, juillet 2015.

Un homme désire mesurer la hauteur d'un arbre qui se trouve au fond de son jardin.

Depuis la porte de sa maison, il voit l'arbre sous un angle de  $6^\circ$ , ayant avancé de dix mètres, il le voit sous un angle de  $9^\circ$ . En négligeant la taille de l'homme devant les dimensions de l'arbre et du jardin, en supposant que l'arbre pousse perpendiculairement au sol et que ce dernier est horizontal, déterminer la longueur du jardin et la hauteur de l'arbre.

En cas de chute, l'arbre risque-t-il de toucher la maison?

Indication: pour évaluer numériquement les fonctions trigonométriques qui pourraient intervenir dans le calcul, utiliser l'approximation suivante

$$f(x) \approx f(0) + xf'(0) \quad (1)$$

où  $f$  est une fonction trigonométrique (sin, cos ou tan),  $x$  est l'angle exprimé en radian et  $f'$  est la dérivée première de  $f$ .

### Solution proposée par Jan Frans Broeckx

#### Partie 1 Expression générale.

On cherche d'abord des expressions générales qui donnent la hauteur  $h$  et la distance  $\ell$  de l'arbre en termes des données  $\Delta\ell$ ,  $\alpha$  et  $\beta$  indiquées dans la figure à droite.

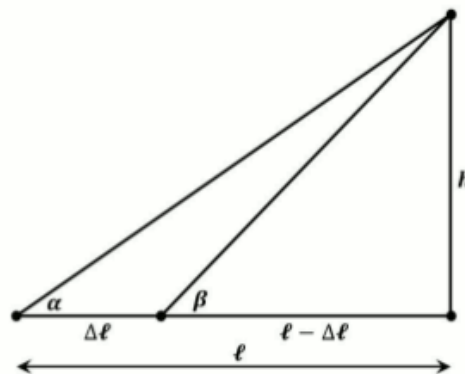
(Cette partie est quasiment identique à l'exercice EXTRI376)

$$\tan \beta = \frac{h}{\ell - \Delta\ell} \Rightarrow \ell - \Delta\ell = \frac{h}{\tan \beta}$$

$$\tan \alpha = \frac{h}{\ell} = \frac{h}{\Delta\ell + (\ell - \Delta\ell)} = \frac{h}{\Delta\ell + \frac{h}{\tan \beta}}$$

$$\Rightarrow \tan \alpha = \frac{h \tan \beta}{\Delta\ell \tan \beta + h} \Leftrightarrow \Delta\ell \tan \alpha \tan \beta + h \tan \alpha = h \tan \beta$$

$$\Rightarrow h = \Delta\ell \frac{\tan \alpha \tan \beta}{\tan \beta - \tan \alpha} \quad \text{et} \quad \ell = \frac{h}{\tan \alpha}$$



#### Partie 2 Calcul numérique

Pour l'approximation numérique on a :  $f(x) = \tan x$        $f(0) = 0$   
 $f'(x) = 1 + \tan^2 x$        $f'(0) = 1$   
 $\Rightarrow \tan x \cong x$  (en radians)

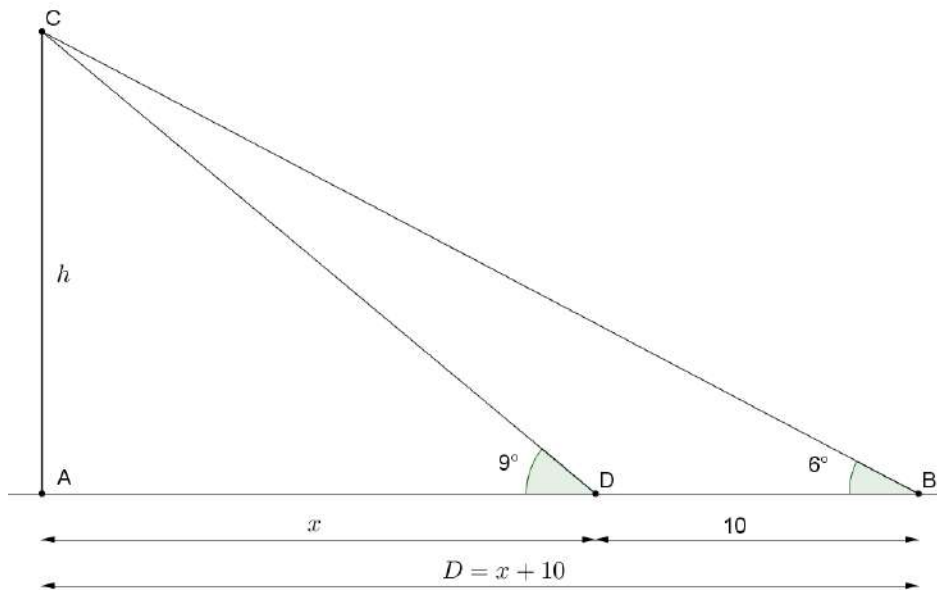
On retient 4 décimales dans le calcul, et on arrondit le résultat final.

$$\alpha = 6^\circ = \frac{6\pi}{180} = \frac{\pi}{30} = 0,1047 \text{ rad} \Rightarrow \tan \alpha \cong 0,1047$$

$$\beta = 9^\circ = \frac{9\pi}{180} = \frac{\pi}{20} = 0,1571 \text{ rad} \Rightarrow \tan \beta \cong 0,1571$$

$$h = 10 \frac{0,1047 \cdot 0,1571}{0,1571 - 0,1047} = 3,139 \cong 3,14 \text{ m} \quad \text{et} \quad \ell = \frac{3,139}{0,1047} = 29,98 \cong 30 \text{ m}$$

## Solution proposée par Jacques Collot



$$\text{On a directement : } h = (x + 10) \tan 6 = x \tan 9 \Rightarrow x = \frac{10 \tan 6}{\tan 9 - \tan 6}$$

$$\text{Or } \tan 6 = \tan 0 + \frac{6\pi}{180} \cdot \frac{1}{\cos^2 0} = \frac{\pi}{30} \text{ et } \tan 9 = \tan 0 + \frac{9\pi}{180} \cdot \frac{1}{\cos^2 0} = \frac{\pi}{20}$$

$$\Rightarrow x = \frac{10 \frac{\pi}{30}}{\frac{\pi}{20} - \frac{\pi}{30}} = 20 \text{ m} \Rightarrow h = 20 \tan 9 = 20 \times \frac{\pi}{20} = \pi \text{ m}$$

L'arbre ne risque pas de tomber sur la maison.



## EXTRI404 – FACS, ULB, Bruxelles, septembre 2014..

Les étoiles Duhhe et Alkaid dans la constellation de la Grande Ourse sont distantes de la Terre de 105 al et de 138 al respectivement (une année-lumière (al) est la distance parcourue par la lumière en une année). Depuis la Terre, leurs lignes de visée - c'est-à-dire les droites qui les relient à la Terre - sont séparées de  $22,5^\circ$ .

Calculez la distance entre ces deux étoiles en année-lumière .

---

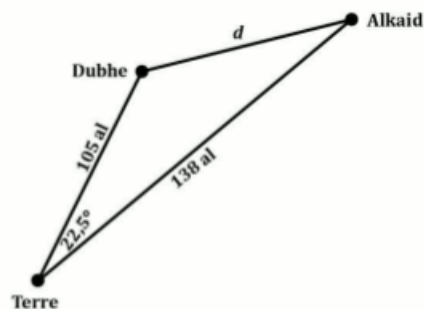
### Solution proposée par Jan Frans Broeckx

- 1) Il s'agit d'une simple application du théorème d'Al Kashi :

$$\begin{aligned}d^2 &= 105^2 + 138^2 - 2 \cdot 105 \cdot 138 \cdot \cos 22,5^\circ \\ &= 11025 + 19044 - 28980,92388 \\ &= 3294,97\end{aligned}$$

$$d = \sqrt{3294,97} = 57,4 \text{ al}$$

où nous avons utilisé la calculatrice pour calculer  $\cos 22,5^\circ$  et la racine carrée.



- 2) Cependant, l'exercice doit être résolu **sans calculatrice**, et le calcul manuel d'une racine carrée n'est plus enseigné au secondaire. Pour cela, nous utiliserons l'approximation linéaire d'une fonction :

$$f(a+h) \approx f(a) + h \cdot f'(a) \quad (\text{avec } h \text{ petit})$$

ce qui, pour  $f(x) = \sqrt{x}$ , devient :

$$\sqrt{a+h} \approx \sqrt{a} + \frac{h}{2\sqrt{a}}$$

où  $a$  est un argument, proche de  $a+h$ , pour lequel  $\sqrt{a}$  est facile à calculer mentalement.

Pour le calcul de  $\cos 22,5^\circ$  nous utilisons une des formules de Carnot, et nous prenons  $\sqrt{2} \approx 1,4$  :

$$\cos^2 22,5^\circ = \frac{1}{2}(1 + \cos 45^\circ) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{4}(2 + \sqrt{2})$$

$$\cos 22,5^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{2}} \approx \frac{1}{2}\sqrt{3,4} = \frac{1}{2}\sqrt{4 - 0,6} \approx \frac{1}{2}\left(\sqrt{4} - \frac{0,6}{2\sqrt{4}}\right) = \frac{1}{2}\left(2 - \frac{0,6}{4}\right) = \frac{1}{2} \cdot 1,85$$

Par conséquent :

$$d^2 = 105^2 + 138^2 - 2 \cdot 105 \cdot 138 \cdot \cos 22,5^\circ \approx 105^2 + 138^2 - 2 \cdot 105 \cdot 138 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1,85 = 3262,5$$

$$d = \sqrt{3262,5} = \sqrt{3025 - 237,5} \approx \sqrt{3025} + \frac{237,5}{2\sqrt{3025}} = 55 + \frac{237,5}{110} \approx 55 + 2,1 = 57,1 \text{ al}$$

ce qui est à moins de 1% de la valeur exacte.

## EXTRI405 – FACS, ULB, Bruxelles, septembre 2014.

Prouvez l'égalité suivante :

$$4 \arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \arctan\left(\frac{1}{239}\right) = \frac{\pi}{4}$$

Solution proposée par Jan Frans Broeckx

Prenons la tangente du membre de gauche :

$$\begin{aligned} \tan\left(4 \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right) - \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{239}\right)\right) &= \frac{\tan\left(4 \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right)\right) - \tan\left(\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{239}\right)\right)}{1 + \tan\left(4 \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right)\right) \tan\left(\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{239}\right)\right)} \\ &= \frac{\tan\left(4 \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right)\right) - \frac{1}{239}}{1 + \frac{1}{239} \tan\left(4 \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right)\right)} \end{aligned} \quad (1)$$

Nous avons maintenant besoin d'une formule pour exprimer  $\tan 4a$  en termes de  $\tan a$ . Partons de la formule pour  $\tan 2a$ :

$$\tan 2a = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a}$$

que nous appliquons deux fois de suite :

$$\begin{aligned} \tan 4a &= \tan(2(2a)) = \frac{2 \tan 2a}{1 - \tan^2 2a} \\ &= \frac{2 \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a}}{1 - \left(\frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a}\right)^2} = \frac{4 \tan a (1 - \tan^2 a)}{(1 - \tan^2 a)^2 - 4 \tan^2 a} \\ &= \frac{4 \tan a - 4 \tan^3 a}{1 - 6 \tan^2 a + \tan^4 a} \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\tan\left(4 \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right)\right) = \frac{\frac{4}{5} - \frac{4}{125}}{1 - \frac{6}{25} + \frac{1}{625}} = \frac{\frac{100 - 4}{125}}{\frac{625 - 150 + 1}{625}} = \frac{5.96}{476} = \frac{480}{476} = \frac{120}{119}$$

On remplace ce résultat dans l'expression (1) :

$$\tan\left(4 \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right) - \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{239}\right)\right) = \frac{\frac{120}{119} - \frac{1}{239}}{1 + \frac{1}{239} \cdot \frac{120}{119}} = \frac{120.239 - 119}{119.239 + 120} = \frac{28561}{28561} = 1 = \tan \frac{\pi}{4}$$

## Solution proposée par Jacques Collot

A titre informatif, voici une méthode qui utilise une formule d'Euler qui n'est pas sensée être connue par un élève du secondaire :

$$\arctan \frac{1}{n} = \arctan \frac{1}{n+p} + \arctan \frac{p}{n^2 + np + 1}$$

La démonstration de la formule est donnée ci-dessous. Appliquons plusieurs fois cette formule.

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{4} &= \arctan 1 = \arctan \frac{1}{1+4} + \arctan \frac{4}{1+4+1} \\ &= \arctan \frac{1}{5} + \arctan \frac{2}{3} = \arctan \frac{1}{5} + \arctan \frac{1}{\frac{3}{2} + \frac{7}{2}} + \arctan \frac{\frac{7}{2}}{\frac{9}{4} + \frac{21}{4} + 1} \\ &= 2 \arctan \frac{1}{5} + \arctan \frac{7}{17} = 2 \arctan \frac{1}{5} + \arctan \frac{1}{\frac{17}{7} + \frac{18}{7}} + \arctan \frac{\frac{18}{7}}{\left(\frac{17}{7}\right)^2 + \frac{17}{7} \cdot \frac{18}{7} + 1} \\ &= 3 \arctan \frac{1}{5} + \arctan \frac{9}{46} = 3 \arctan \frac{1}{5} + \arctan \frac{1}{\frac{46}{9} - \frac{1}{9}} + \arctan \frac{-\frac{1}{9}}{\left(\frac{46}{9}\right)^2 - \frac{46}{9} \cdot \frac{1}{9} + 1} \\ &= 4 \arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{239} \end{aligned}$$

## Annexe

La vérification de la formule est très simple :

$$\begin{aligned} \tan \left( \arctan \frac{1}{n+p} + \arctan \frac{1}{n^2 + np + 1} \right) &= \frac{\frac{1}{n+p} + \frac{p}{n^2 + np + 1}}{1 - \frac{1}{n+p} \cdot \frac{p}{n^2 + np + 1}} \\ &= \frac{n^2 + np + 1 + np + p^2}{n^2 + n^2 p + n + n^2 p + p - p} = \frac{1}{n} \end{aligned}$$

La formule permet d'établir de nombreuses expressions de la forme

$$\frac{\pi}{4} = \arctan \frac{1}{n_1} + \arctan \frac{1}{n_2} + \dots + \arctan \frac{1}{n_n}$$

Ces expressions permettent d'estimer la valeur de  $\pi$ .

Voir : le fascinant nombre  $\pi$ . p-90, 91, Jean-Paul Delahaye. Belin

## EXTRI406 – POL, ERM, Bruxelles, 2007.

Dans un triangle  $ABC$ , on a la relation  $\sin\left(A + \frac{B}{2}\right) = k \cdot \sin \frac{B}{2}$  où  $k$  est une constante réelle positive.

Démontrer que  $\tan \frac{A}{2} \cdot \tan \frac{C}{2} = \frac{k-1}{k+1}$ .

---

### Solution proposée par Hugues Vemeiren

De l'hypothèse, on tire  $k = \frac{\sin\left(A + \frac{B}{2}\right)}{\sin \frac{B}{2}}$

$$\frac{k-1}{k+1} = \frac{\frac{\sin\left(A + \frac{B}{2}\right)}{\sin \frac{B}{2}} - 1}{\frac{\sin\left(A + \frac{B}{2}\right)}{\sin \frac{B}{2}} + 1} = \frac{\sin\left(A + \frac{B}{2}\right) - \sin \frac{B}{2}}{\sin\left(A + \frac{B}{2}\right) + \sin \frac{B}{2}}$$

Par les formules d'addition, de duplication et de Carnot :

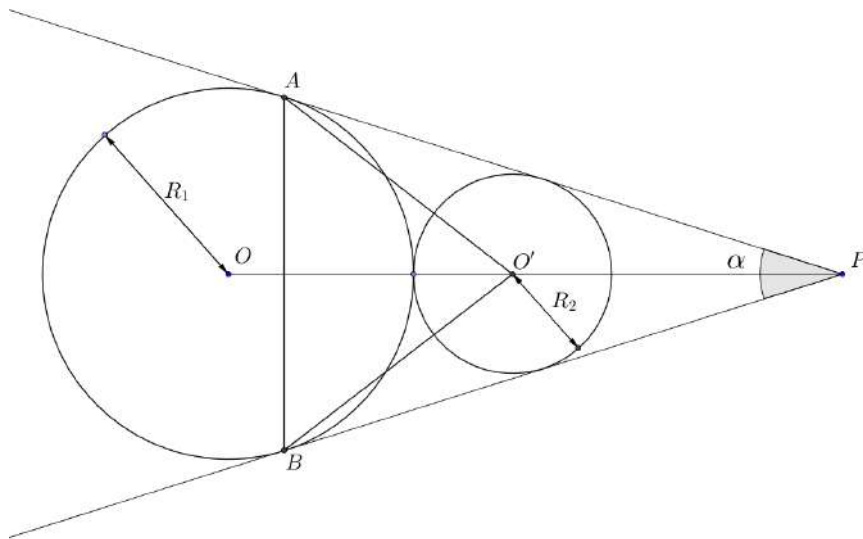
$$\begin{aligned} \frac{k-1}{k+1} &= \frac{\sin A \cdot \cos \frac{B}{2} + \sin \frac{B}{2} \cdot \cos A - \sin \frac{B}{2}}{\sin A \cdot \cos \frac{B}{2} + \sin \frac{B}{2} \cdot \cos A + \sin \frac{B}{2}} \\ &= \frac{\sin A \cdot \cos \frac{B}{2} + \sin \frac{B}{2} \cdot (\cos A - 1)}{\sin A \cdot \cos \frac{B}{2} + \sin \frac{B}{2} \cdot (\cos A + 1)} \\ &= \frac{2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} + \sin \frac{B}{2} \cdot (-2 \sin^2 \frac{A}{2})}{2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} + \sin \frac{B}{2} \cdot (2 \cos^2 \frac{A}{2})} \\ &= \frac{\sin \frac{A}{2} \cdot (\cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} - \sin \frac{B}{2} \sin \frac{A}{2})}{\cos \frac{A}{2} \cdot (\sin \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} + \sin \frac{B}{2} \cos \frac{A}{2})} \\ &= \tan \frac{A}{2} \cdot \frac{\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)}{\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)} = \tan \frac{A}{2} \cdot \cot \frac{A+B}{2} \end{aligned}$$

Mais dans un triangle  $C = \pi - (A + B)$ , donc  $\tan \frac{C}{2} = \tan \frac{\pi - (A + B)}{2} = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{A + B}{2}\right) = \cot \frac{A+B}{2}$

On a bien, finalement:  $\frac{k-1}{k+1} = \tan \frac{A}{2} \cdot \tan \frac{C}{2}$

## EXTRI407 – EPL, UCL, LLN, juillet, 2015.

On considère deux cercles tangents extérieurement de centres  $O$  et  $O'$  et de rayons  $R_1$  et  $R_2$  (avec  $R_1 > R_2$ ) comme représentés à la figure ci-dessous.

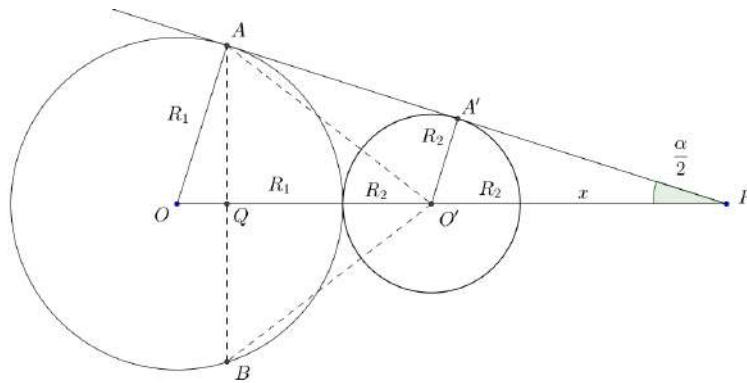


1. Les tangentes communes aux deux cercles forment entre elles un angle  $\alpha$ .  
Formulez une relation simple entre cet angle  $\alpha$  et les rayons des cercles,  $R_1$  et  $R_2$ .
2. Déduisez-en pour quelle valeur du rapport  $R_1 / R_2$  est de  $90^\circ$ .
3. Dans le cas où  $R_1 = 6$  [m] et  $R_2 = 2$  [m], calculez l'angle  $\alpha$  et le périmètre du triangle  $ABO'$  (Voir figure :  $A$  et  $B$  sont les points de tangence au cercle de centre  $O$  et de rayon  $R_1$ , des tangentes communes aux deux cercles considérés).

### Remarques :

- Justifier vos affirmations et préciser vos hypothèses.
- Vos résultats de calcul peuvent se présenter sous la forme de fractions comportant éventuellement radicaux (Veillez cependant à simplifier aux maximum vos réponses).

**Solution proposée par Nicole Berckmans**



1. Dans les triangles rectangles  $AOP$  et  $A'O'P$ , on a

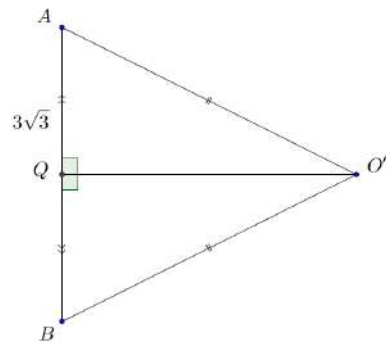
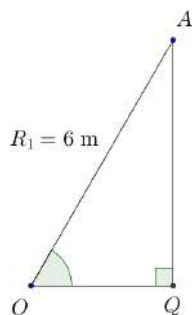
$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{R_1}{R_1 + 2R_2 + x} = \frac{R_2}{R_2 + x} \quad (i)$$

De (i), on tire  $R_2 + x = \frac{R_2(R_1 + R_2)}{R_1 - R_2}$ .

Puisque  $\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{R_2}{R_2 + x}$ , on en déduit que

$$\boxed{\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{R_1 - R_2}{R_1 + R_2}} \quad \text{ou encore} \quad \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{\frac{R_1}{R_2} - 1}{\frac{R_1}{R_2} + 1}$$

2. Si  $\frac{\alpha}{2} = 45^\circ$  alors  $\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\frac{R_1}{R_2} - 1}{\frac{R_1}{R_2} + 1} \Rightarrow \boxed{\frac{R_1}{R_2} = \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} - 1}}$



3. Si  $R_1 = 6$  et  $R_2 = 2$ , alors  $\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}$ ,  $\frac{\alpha}{2} = \frac{\pi}{6}$  et  $\alpha = \frac{\pi}{3}$

Dans le triangle  $AQO$  :

$$\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} = \frac{OQ}{R_1} \quad \text{donc } OQ = 3 \text{ [m]}$$

$$\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{AQ}{R_1} \quad \text{donc } AQ = 3\sqrt{3} \text{ [m]}$$

D'autre part :  $OO' = R_1 + R_2 = 8$  [m]. Dès lors  $QO' = 5$  [m]

$$\text{Aire du triangle } AO'B = \frac{1}{2} \times 5 \times 6\sqrt{3} = 15\sqrt{3} \text{ [m}^2\text{]}$$

$$\overline{AO'} = \sqrt{5^2 + (3\sqrt{3})^2} = 2\sqrt{13}$$

$$\text{Périmètre du triangle } AO'B = 6\sqrt{3} + 4\sqrt{13} \text{ [m]}$$

---

17 septembre 2015

# EXTRI408 – EPL, UCL, LLN, juillet, 2015.

Résoudre

$$\cos x + \sin 3x = \cos 2x$$

Indiquer les solutions sur le cercle trigonométrique  $[0, 2\pi]$

---

## Solution proposée par Nicole Berckmans

$$\sin 3x = \cos 2x - \cos x \Rightarrow 2 \sin \frac{3x}{2} \cos \frac{3x}{2} = -2 \sin \frac{3x}{2} \sin \frac{x}{2} \quad (\text{Simpson})$$

$$1) \sin \frac{3x}{2} = 0, \quad \frac{3x}{2} = k\pi, \quad x = \frac{2k\pi}{3}$$

$$S_1 = \left\{ 0, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, 2\pi \right\}$$

$$2) \cos \frac{3x}{2} = -\sin \frac{x}{2} \Rightarrow \cos \frac{3x}{2} = \cos \left( \frac{\pi}{2} + \frac{x}{2} \right)$$

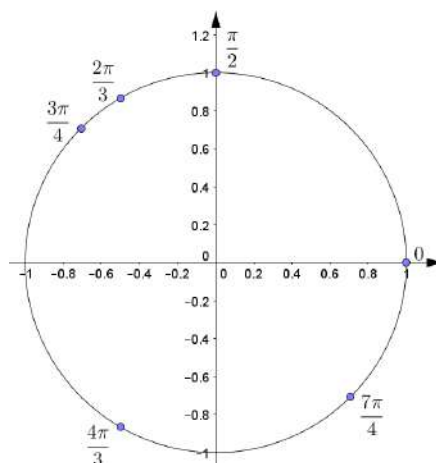
$$\frac{3x}{2} = \pm \left( \frac{\pi}{2} + \frac{x}{2} \right) + 2k\pi$$

$$2.1) \frac{3x}{2} = \frac{\pi}{2} + \frac{x}{2} + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$S_2 = \left\{ \frac{\pi}{2} \right\}$$

$$2.2) \frac{3x}{2} = -\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2} + 2k\pi \Rightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$$

$$S_3 = \left\{ \frac{7\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \right\}$$



---

17 septembre 2015



# EXTRI409 – EPL, UCL, LLN, juillet, 2015.

Cochez chaque fois l'unique affirmation vraie parmi les trois possibilités.

Réponse juste = 1 point; autre réponse = 0.

- Dans un triangle équilatéral le rapport entre la longueur des côtés et le rayon du cercle circonscrit est égal à

$\sqrt{2}$                         $\sqrt{3}$                        2

- Dans l'intervalle  $0 < x < \frac{\pi}{2}$ , l'équation  $\cos x = \tan x$  admet exactement

0 solution                       1 solution                       2 solutions

- L'expression  $\cos^2(a+b) + \cos^2(a-b)$  est identiquement égale à

$1 + \cos 2a \cos 2b$                         $1 + \cos^2 a \cos^2 b$                         $1 + \cos^4 a \cos^4 b$

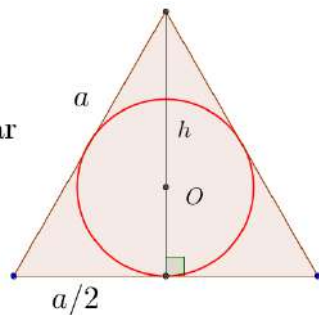
- Si dans un triangle  $ABC$  de côtés  $a, b$  et  $c$  (opposés aux angles respectifs  $A, B$  et

$C$ ), on a que  $C = 120^\circ$  et  $\frac{a}{b} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$ , alors

$B = 30^\circ$                         $B = 45^\circ$                         $B = 60^\circ$

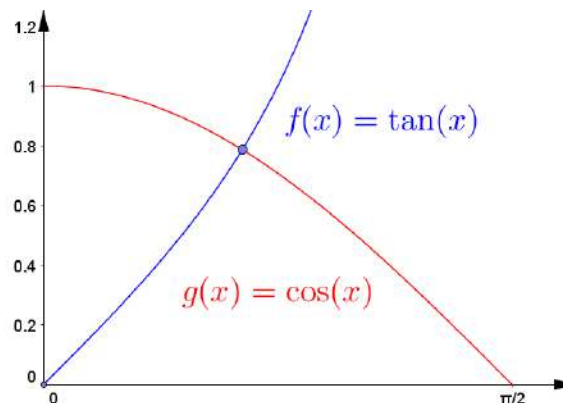
## Solution proposée par Nicole Berckmans

1) Rép :  $\sqrt{3}$  car



$$\frac{a}{R} = \frac{a}{\frac{2}{3}h} = \frac{a}{\frac{2}{3}\sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}}} = \frac{a}{\frac{2}{3}\frac{\sqrt{3}}{2}a} = \sqrt{3}$$

2) Rép : 1 solution



3) Rép :  $1 + \cos 2a \cdot \cos 2b$ .

On le vérifie pour  $a = \frac{\pi}{2}$  et  $b = 0$

4) Rép :  $B = 45^\circ$

En effet si  $B = 30^\circ$  alors  $A = 30^\circ$  et  $a = b$

si  $B = 60^\circ$  alors  $A = 180^\circ - 120^\circ - 60^\circ < 0$

---

17 septembre 2015