Exercices résolus de mathématiques.

Trigonométrie
Calcul numérique

TRI 41

EXTRI410-EXTRI419

http://www.matheux.c.la

Jacques Collot
Benoit Baudelet – Steve Tumson
Jan Frans Broeckx – Nicole Berckmans
Fabienne Zoetard

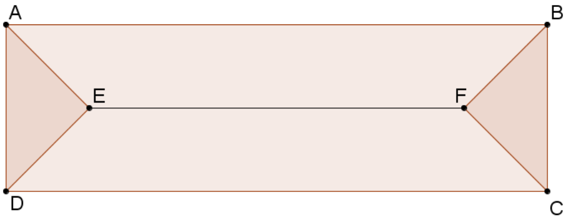
Septembre 2015

EXTRI410 – EPL, UCL, LLN, juillet, 2015.

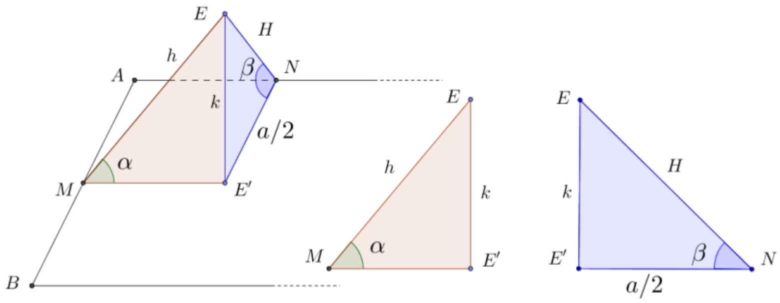
Le croquis ci-dessous représente un toit à quatre pans vu du haut. La base $ABCD$ est rectangulaire et horizontale. On désigne par a la longueur du côté AD et par b la longueur du côté AB. Les pans ADE et BCF sont inclinés d'un angle α par rapport à l'horizontale, tandis que les pans $ABFE$ et $CDEF$ le sont d'un angle β.

1. Exprimez la superficie S_{ADE} du pan ADE en fonction de a, b, α, β.
2. Exprimez la superficie S_{ABFE} du pan $ABFE$ en fonction de a, b, α, β.
3. Calculez S_{ADE} et S_{ABFE} an cm^2 près pour les données suivante : $a = 7$ m, $b = 10$ m, $\alpha = 30°, \beta = 25°$

Pour les questions 1 et 2, donnez une expression aussi simple que possible puis expliquez comment vous l'obtenez.



Solution proposée par Nicole Berckmans



$$\left.\begin{array}{l} 1)\ \sin\alpha = \dfrac{k}{h} \\ 2)\ \tan\beta = \dfrac{k}{a/2} \end{array}\right\} \Rightarrow h = \frac{a\tan\beta}{2\sin\alpha} \qquad (3)$$

$$4)\ ME' = \cos\alpha . h = \cos\alpha . \frac{a\tan\beta}{2\sin\alpha} = \frac{a}{2}.\tan\beta.\cot\alpha \qquad (4)$$

$$5)\ \cos\beta = \frac{a}{2H} \Rightarrow H = \frac{a}{2\cos\beta} \qquad (5)$$

Surface ADE : $S_{ADE} = \dfrac{1}{2}.\dfrac{a}{2}.h = \dfrac{a^2}{4}.\dfrac{\tan\beta}{\sin\alpha}$ en vertu de (3)

Petite base du trapèze $ABFE = b - 2ME' = b - \cancel{2}\dfrac{a}{\cancel{2}}.\tan\beta.\cot\alpha$ en vertu de (4)

Surface du trapèze : $S_{ABFE} = \dfrac{2b - a\tan\beta.\cot\alpha}{2}.\dfrac{a}{2\cos\beta}$

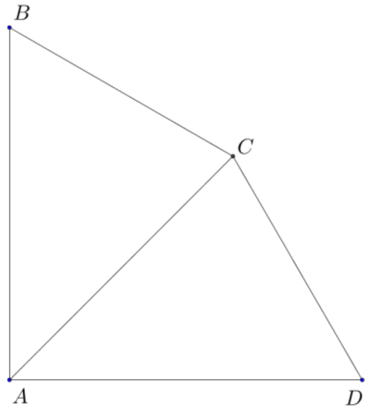
Avec les données, on obtient : $S_{ADE} = 11.4254\ \text{cm}^2$ et $S_{ABFE} = 27.7015\ \text{cm}^2$

---

15 septembre 2015

EXTRI411 – EPL, UCL, LLN, septembre, 2015.

On considère le quadrilatère *ABCD* représenté à la figure ci-dessous.



On précise que :

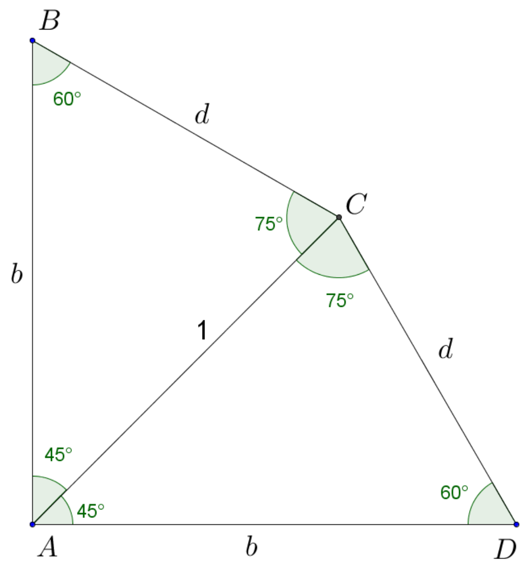
- Les côtés *AB* et *AD* sont de même longueur.
- Les côtés *BC* et *CD* sont de même longueur (différente de celle des deux autres côtés).
- La longueur de la diagonales AC est de 1 $[\mathrm{m}]$
- La mesure de l'angle au sommet *A* (soit $\widehat{BAD}$) est de 90°.
- La mesure de l'angle au sommet *C* (soit $\widehat{BCD}$) est de 150°.

1. Calculez la longueur du côté *AD*.
2. Calculez le rapport des longueurs des côtés *AB* et *BC* (soit *AB* / *BC*).
3. Calculez la longueur de la diagonales *BD*.

Remarques :

- Justifiez vos affirmations et préciser vos hypothèses.
- Vos résultats de calcul peuvent se présenter sous la forme de fractions comportant éventuellement des radicaux (Veillez cependant à simplifier au maximum vos réponses.)

Solution proposée par Nicole Berckmans



1) Soit $AD=b,$ on a : $\dfrac{b}{\sin 75°}=\dfrac{1}{\sin 60°}$

Or $\sin 75°=\sin\left(30°+45°\right)=\dfrac{1}{2}.\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}.\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}.\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$

Dès lors : $b=\dfrac{\sin 75°}{\sin 60°}=\dfrac{\dfrac{\sqrt{2}}{2}.\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}=\dfrac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{6}}=\dfrac{3\sqrt{2}+\sqrt{6}}{6}$

2) $\dfrac{AB}{BC}=\dfrac{b}{d}=\dfrac{\sin 75°}{\sin 45°}=\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$

3) $BD=b\sqrt{2}=\dfrac{\cancel{2}}{\sqrt{3}}.\dfrac{1+\sqrt{3}}{\cancel{2}}=\dfrac{\sqrt{3}+3}{3}$

EXTRI412 – EPL, UCL, LLN, septembre, 2015.

1. Trouvez les valeurs de x pour lesquelles l'égalité suivante est vérifiée :

$$\tan 3x + \tan x = 0$$

2. Parmi ces valeurs, représentez sur le cercle trigonométrique celles comprises entre 0 et 2π

Solution proposée par Nicole Berckmans

$$\text{CE :} \quad \left.\begin{array}{l} 3x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi \end{array}\right\} \Rightarrow x \neq \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3}$$

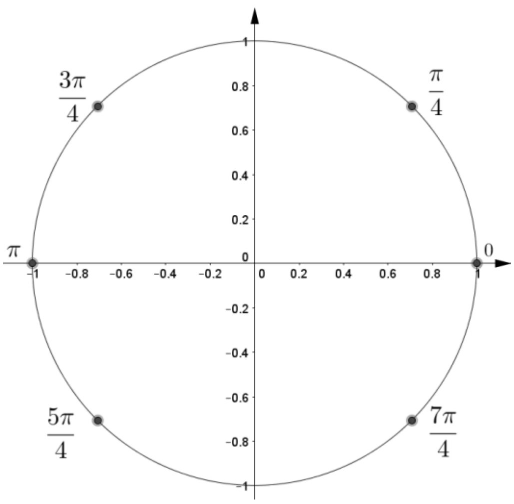
$$\tan 3x = -\tan x \Rightarrow \tan 3x = \tan(-x)$$

$$\text{Donc } 3x = -x + k\pi$$

$$4x = k\pi$$

$$x = k\frac{\pi}{4}$$

$$S = \left\{0, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \pi, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right\}$$



---

15 septembre 2015

EXTRI413 – EPL, UCL, LLN, septembre, 2015.

Cochez chaque fois l'unique affirmation vraie parmi les trois possibilités.

Réponse juste $=1$ point; autre réponse $=0$

- L'aire d'un triangle ABC de côtés a, b et c (opposés aux angles respectifs $A, B,$ et C) est égale à

  $\frac{1}{2}\left(a^2b^2c^2 \sin A \sin B \sin C\right)^{\frac{1}{3}}$ $\square$

  $\frac{1}{2}\left(a^2b^2c^2 \sin A \sin B \sin C\right)^{\frac{2}{3}}$ $\square$

  $\frac{1}{2}\left(a^2b^2c^2 \sin A \sin B \sin C\right)^{\frac{3}{2}}$ $\square$

- Dans l'intervalle $0 < x < \frac{\pi}{2}$, l'aquation $\cos x + \tan x = 0$ admet exactement

  0 solution $\square$ 1 solution $\square$ 2 solutions $\square$

- L'expression $\frac{\sin a}{1+\cos a}$ est identiquement égale à

  $\sin\frac{a}{2}$ $\square$ $\cos\frac{a}{2}$ $\square$ $\tan\frac{a}{2}$ $\square$

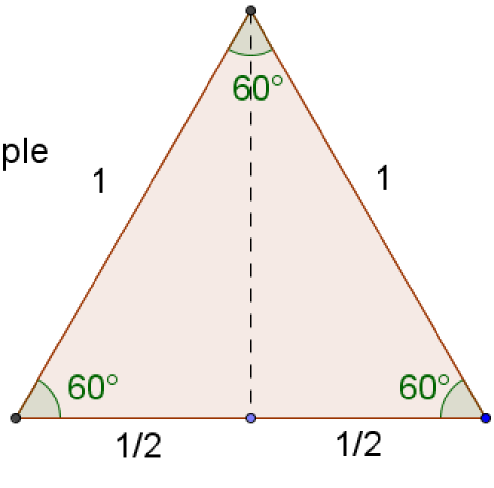
- Dans un triangle ABC non dégénéré, si $\sin^2 A = \sin^2 B + \sin^2 C$, alors

  $A = 30°$ $\square$ $A = 45°$ $\square$ $A = 90°$ $\square$

Solution proposée par Nicole Berckmans

1) Réponse 1

Exemple



$$\text{Aire} = \frac{1}{2}.1.\frac{\sqrt{3}}{2}$$

On doit donc avoir :

$$\frac{1}{2}\left(1.1.1.\frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n = \frac{1}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow n = \frac{1}{3}$$

2) Réponse 1 : pas de solution.

En effet, $\cos x \geq 0$, $\tan x \geq 0$ et $\cos x + \tan x > 0$

3) Réponse 3 : Si $a = 90°$, $\dfrac{\sin a}{1+\cos a} = \dfrac{1}{1} = \tan 45°$

4) Réponse 3 : Si $A = 90°$

alors $\sin^2 A = \sin^2 B + \sin^2 C$

$\Rightarrow \qquad 1 = \sin^2 B + \cos^2 B \quad$ (Pythagore)

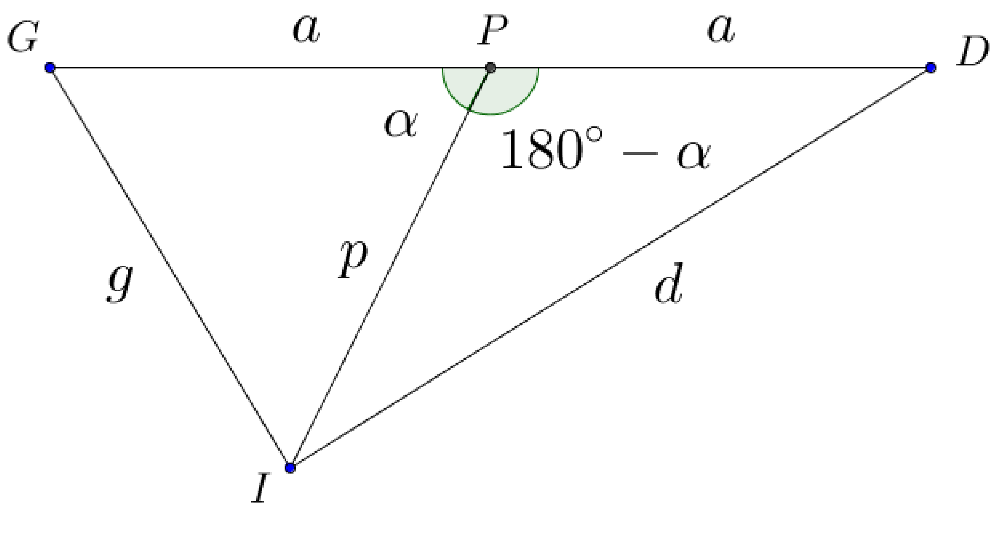
EXTRI414 – EPL, UCL, LLN, septembre, 2015.

La pipistrelle commune (*pipistellus pipistrellus*) est une petite chauve-souris de nos régions capable d'écholocalisation : elle émet des ultrasons et écoute leur écho pour localiser les insectes dont elle se nourrit.
Considérons une pipistrelle immobile qui émet des ultrasons à partir d'un point P situé au milieu du segment GD qui joint ces deux oreilles G et D. Les ultrasons sont réfléchis par un insecte I également immobile. Un ultrason émis au temps zéro et réfléchi par l'insecte parvient à l'oreille G au temps t_1 et à l'oreille D au temps $t_2 > t_1$. Soit c la vitesse du son, p la distance entre P et I, a la distance entre P et G, et α la mesure de l'angle $\widehat{GPI}$.

1. Faites un croquis et indiquez-y les quantités mentionnées ci-dessus ainsi que les variables que vous utiliserez dans vos calculs.
2. Dans un premier cas, la pipistrelle a l'oreille D bouchée mais il fait encore suffisamment clair pour qu'elle sache dans quelle direction se trouve l'insecte. Exprimer la distance p en fonction des données disponibles.
3. Il fait maintenant un noir d'encre (α n'est donc plus disponible) et la pipistrelle a recouvré toutes ses facultés auditives. Exprimez p en fonction des données disponibles.
4. Pour la question 2, calculez p au mm près pour les données suivantes : $c = 340$ m/s, $a = 1$ cm, $\alpha = 20°$, $t_1 = 12$ ms.

Pour les questions 2 et 3, donnez une expression aussi simple que possible puis expliquez comment vous l'obtenez.

Solution proposée par Nicole Berckmans



2) $g^2 = p^2 + a^2 - 2ap\cos\alpha$ or $g = ct_1 - p$

$$\left(ct_1 - p\right)^2 = p^2 + a^2 - 2ap\cos\alpha$$

En développant, on trouve : $p = \dfrac{c^2t_1^2 - a^2}{2\left(ct_1 - a\cos\alpha\right)} \cong 204.5$ cm.

3)

$$\begin{array}{rcl} d^2 & = & p^2 + a^2 + 2ap\cos\alpha \\ g^2 & = & p^2 + a^2 - 2ap\cos\alpha \\ \hline d^2 + g^2 & = & 2\left(p^2 + a^2\right) \end{array}$$

ou bien $\left(ct_2 - p\right)^2 + \left(ct_1 - p\right)^2 = 2\left(p^2 + a^2\right)$

En développant, on trouve : $p = \dfrac{c^2\left(t_1^2 + t_2^2\right) - 2a^2}{2\left(t_2 - t_1\right)}$

EXTRI415 – Polytech, Umons, Mons, juillet 2015.

Résoudre l'équation trigonométrique suivante :

$$\sin(3x)+1-\cos(2x)-\sin(x)=0$$

Représenter les solutions sur le cercle trigonométrique.

$\sin(3x)+1-\cos 2(x)-\sin x=0$

$\Rightarrow 2\cos(2x)\sin(x)-\cos 2(x)+1=0$ Simpson

$\Rightarrow 2\cos(2x)\sin(x)+2\sin^2(x)=0$ Carnot

1) $\sin(x)=0 \Rightarrow x=2k\pi$

2) Il reste : $\cos(2x)+\sin(x)=0$

$\Rightarrow 1-2\sin^2(x)+\sin(x)=0$

$$\Rightarrow \sin(x)=\frac{-1\pm\sqrt{1-4\times(-2)\times 1}}{-4} \Rightarrow \begin{cases}\sin(x)=1\\ \sin(x)=-\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

2.1) $\sin(x)=1 \Rightarrow x=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$

$$2.2)\ \sin(x)=-\frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases}x=\dfrac{7\pi}{6}+2k\pi\\ x=\dfrac{11\pi}{6}+2k\pi\end{cases}$$

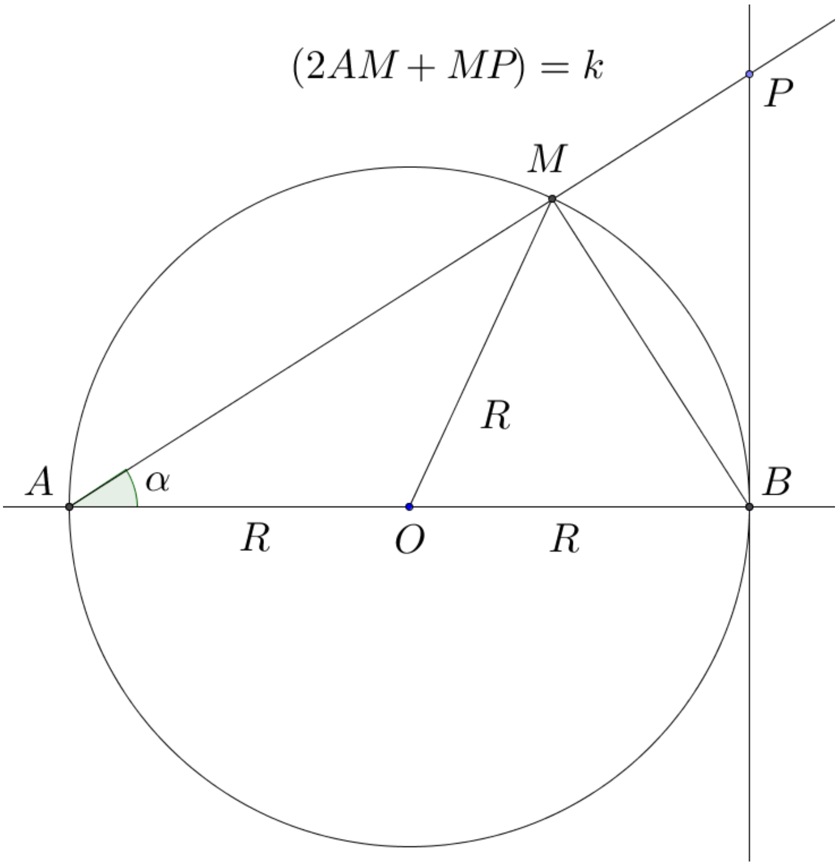
Le 20 septembre 2015

EXTRI416 – Polytech, Umons, Mons, juillet 2015.

Soient le cercle de centre O et de rayon R, un diamètre AB de ce cercle et la tangente au point B de ce cercle.

Par le point A, on mène une sécante coupant le cercle au point M et la tangente au point P, de telle sorte que $(2AM + MP) = k$.

Discuter de la valeur de l'angle $\alpha = \widehat{BAM}$ en fonction des valeurs relatives de k et R.



Notons que : $2AM + MP = AM + MP$

Or : $AM = 2R\cos\alpha$ et $MP = \dfrac{2R}{\cos\alpha}$

$\Rightarrow 2AM + MP = 2R\cos\alpha + \dfrac{2R}{\cos\alpha} = k \Rightarrow \dfrac{1+\cos^2\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{1}{2}\dfrac{k}{R} =$

On a alors l'équation : $\cos^2\alpha - \dfrac{1}{2}\dfrac{k}{R}\cos\alpha + 1 = 0 \qquad (1)$

qui admet des solutions ssi $\Delta = \dfrac{1}{4}.\dfrac{k^2}{R^2} - 4 \geq 0 \Rightarrow k^2 - 16R^2 \geq 0 \Rightarrow (k-4R)(k+4R) \geq 0$

Par conséquent, il faut $\dfrac{k}{R} \in \left]\leftarrow, -4\right] \cup \left[4, \rightarrow\right[$

1) Si $k = 4R,\ \cos^2\alpha - 2\cos\alpha + 1 = 0 \Rightarrow (\cos\alpha - 1)^2 = 0 \Rightarrow \alpha = 0.$

Autrement dit le point P est alors en B.

2) Si $\dfrac{k}{R} \longrightarrow \infty \Rightarrow \dfrac{1+\cos^2\alpha}{\cos\alpha} \longrightarrow \infty$. Ce qui ne peut se faire que si $\cos\alpha \longrightarrow 0$

Ou encore si $\alpha \longrightarrow \dfrac{\pi}{2}$. Dans ce cas, le point P est à l'infini.

Il nous reste à vérifier qu'au moins une racine de l'équation (1) est comprise entre $[-1,1]$

Le terme indépendant de l'équation (1) indique que les racines sont inverses lui de l'autre et de même signe.

Si $k > 0$, alors $\dfrac{1}{2}\dfrac{k}{R} > 0$, et donc la somme des deux racines est positive. Il y a donc une racine comprise entre 0 et 1 et une racine > 1.

Si $k < 0$, alors $\dfrac{1}{2}\dfrac{k}{R} < 0$, et donc la somme des deux racines est négative. Il y a donc une racine comprise entre -1 et 0 et une racine < -1.

EXTRI417 – Polytech, Umons, Mons, juillet 2015.

Une caméra de surveillance, dont l'angle de vue vaut θ (compris entre 45° et 90°), doit être installé dans le coin d'un hall carré de côté *c*. Exprimer la valeur de la surface surveillée en fonction de l'angle α formé par l'axe de la caméra et un des murs adjacents de la pièce, sous l'hypothèse d'une modélisation planaire du problème.

Déterminer la valeur de α qui maximise la valeur de la surface surveillée, et calculer cette dernière lorsque *c* = 20 m et θ = 75°.

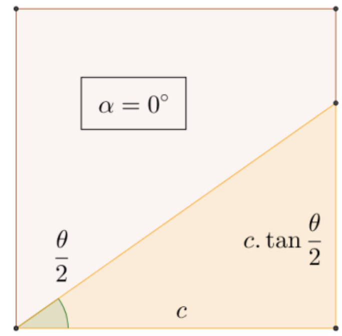


Fig 1

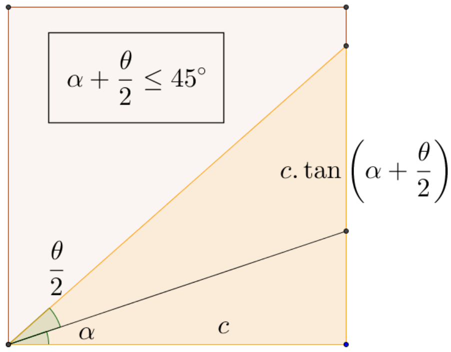


Fig 2

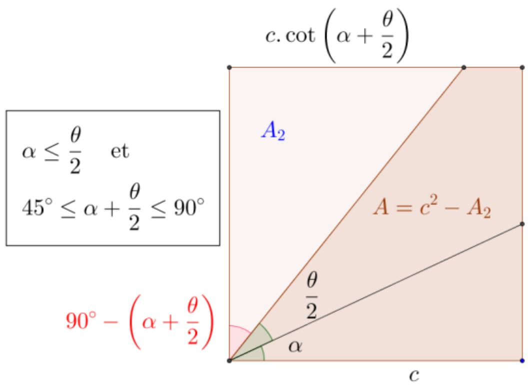


Fig 3

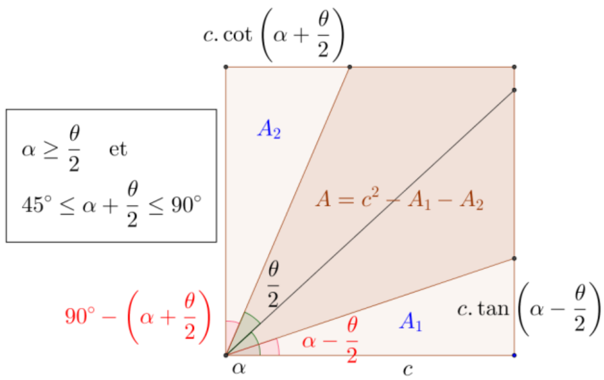


Fig 4

1) $\underline{\alpha = 0°}$ (Fig 1) La surface éclairée est : $A = \frac{1}{2}c^2 \tan\frac{\theta}{2}$

2) $\underline{\alpha + \frac{\theta}{2} \le 45°}$ (Fig 2) La surface surveillée est : $A = \frac{1}{2}c^2 \tan\left(\alpha + \frac{\theta}{2}\right)$

Elle est d'autant plus grande que α est grand.

3) $\underline{\alpha < \frac{\theta}{2} \text{ et } \alpha + \frac{\theta}{2} > 45°}$ (Fig 3) La surface surveillée est : $A = c^2 - A_2$

où A_2 est la surface non-surveillée.

$$\Rightarrow A = c^2 - \frac{1}{2}c^2 \tan\left(90° - \left(\alpha + \frac{\theta}{2}\right)\right) = \frac{c^2}{2}\left(2 - \cot\left(\alpha + \frac{\theta}{2}\right)\right)$$

Elle est d'autant plus grande que α est grand

4) $\underline{\alpha > \frac{\theta}{2} \text{ et } \alpha + \frac{\theta}{2} > 45°}$ (Fig 4) La surface éclairée est : $A = c^2 - A_1 - A_2$

où A_1 et A_2 sont les surfaces non-surveillées.

$$\Rightarrow A = c^2 - \frac{1}{2}c^2 \tan\left(\alpha - \frac{\theta}{2}\right) - \frac{1}{2}c^2 \tan\left(90° - \left(\alpha + \frac{\theta}{2}\right)\right)$$

$$= \frac{c^2}{2}\left(2 - \tan\left(\alpha - \frac{\theta}{2}\right) - \cot\left(\alpha + \frac{\theta}{2}\right)\right) \qquad (2)$$

Pour déterminer la valeur de α qui maximise la surface surveillée, dérivons (2)

$$A' = \frac{c^2}{2}\left(-\frac{1}{\cos^2\left(\alpha - \frac{\theta}{2}\right)} + \frac{1}{\sin^2\left(\alpha + \frac{\theta}{2}\right)}\right)$$

A' sera nul si : $\sin^2\left(\alpha + \frac{\theta}{2}\right) = \cos^2\left(\alpha - \frac{\theta}{2}\right) \Rightarrow \cos^2\left(90° - \left(\alpha + \frac{\theta}{2}\right)\right) = \cos^2\left(\alpha - \frac{\theta}{2}\right)$

1. $\cos\left(90° - \left(\alpha + \frac{\theta}{2}\right)\right) = \cos\left(\alpha - \frac{\theta}{2}\right)$

1.1. $90° - \left(\alpha + \frac{\theta}{2}\right) = \alpha - \frac{\theta}{2} \Rightarrow \alpha = 45°$ Ce résultat était attendu.

1.2. $90° - \left(\alpha + \frac{\theta}{2}\right) = -\alpha + \frac{\theta}{2} \Rightarrow \theta = 90°$. A rejeter car θ n'est pas une variable mais un paramètre qui n'est pas nécessairement égal à 90°

2. $\cos\left(90° - \left(\alpha + \frac{\theta}{2}\right)\right) = -\cos\left(\alpha - \frac{\theta}{2}\right) \Rightarrow \cos\left(90° - \left(\alpha + \frac{\theta}{2}\right)\right) = \cos\left(180 - \alpha + \frac{\theta}{2}\right)$

2.1. $90° - \alpha - \frac{\theta}{2} = 180° - \alpha + \frac{\theta}{2} \Rightarrow \theta = -90°$ A rejeter.

2.2. $90° - \alpha - \frac{\theta}{2} = -180° + \alpha - \frac{\theta}{2} \Rightarrow \alpha = 135°$ A rejeter car $\alpha \in [0, 90°]$

Il reste à calculer la valeur de la surface surveillée pour $c = 20$ m, $\theta = 75°$ et $\alpha = 45°$,

$$A = \frac{20^2}{2}\left[2 - \tan\left(45° - \frac{75°}{2}\right) - \cot\left(45° - \frac{75°}{2}\right)\right] = 347.34 \text{ m}$$

Le 20 septembre 2015

EXTRI418 – FACS, ULB, Bruxelles, juillet, 2015.

Résoudre dans $\mathbb{R}$

$$\arccos(2x)-\arccos(x)=\frac{\pi}{3}$$

$\arccos(2x)-\arccos(x)=\frac{\pi}{3}$

CE:

1) $\arccos(2x)\Rightarrow -1\leq x\leq 1\Rightarrow -\frac{1}{2}\leq x\leq\frac{1}{2}$

2) $\arccos(x)\Rightarrow -1\leq x\leq 1$

3) $\arccos(2x)>\arccos(x)$ car $\frac{\pi}{3}$ est positif.

Comme la fonction $\arccos(\ )$ est décroissante sur son domaine on en déduit que $2x<x\Rightarrow x<0$

Finalement, on doit avoir : $x\in\left[-\frac{1}{2},0\right[$

On peut maintenant passer à la résolution :

$\arccos(2x)-\arccos(x)=\frac{\pi}{3}\Rightarrow\cos\left(\arccos(2x)-\arccos(x)\right)=\cos\frac{\pi}{3}$

$\Rightarrow 2x^2+\sqrt{1-4x^2}.\sqrt{1-x^2}=\frac{1}{2}$ Rappel : $\cos\left(\arcsin(t)\right)=\sqrt{1-t^2}$

$\Rightarrow 2\sqrt{\left(1-4x^2\right)\left(1-x^2\right)}=1-4x^2\Rightarrow 4\left(1-4x^2\right)\left(1-x^2\right)=\left(1-4x^2\right)^2$

On développe et on obtient : $x^2=\frac{1}{4}\Rightarrow x=\pm\frac{1}{2}$

La valeur positive est à rejeter, donc finalement : $\boxed{x=-\frac{1}{2}}$

---

16 février 2016

EXTRI419 – FACS, ULB, Bruxelles, juillet, 2015.

Un agriculteur désire connaître les dimensions de son champ de forme triangulaire.
Deux de ses côtés ont 100 m et 200 m de long et forment un angle de 22,5°.
En supposant plane la surface de ce champ, calculez la longueur du troisième côté ainsi que l'aire du champ.

Indication : N'évaluez les valeurs numériques qu'à la fin des développements analytiques et effectuez les calculs à 10% près.

On applique la formule des cosinus dans les triangles quelconques :

$$a^2 = 100^2 + 200^2 - 2 \times 100 \times 200 \times \cos 22{,}5° = 100^2 \left(5 - 4\cos 22{,}5°\right)$$

$$a = 100\sqrt{5 - 4\cos 22{,}5°}$$

Evaluons $\cos 22{,}5°$

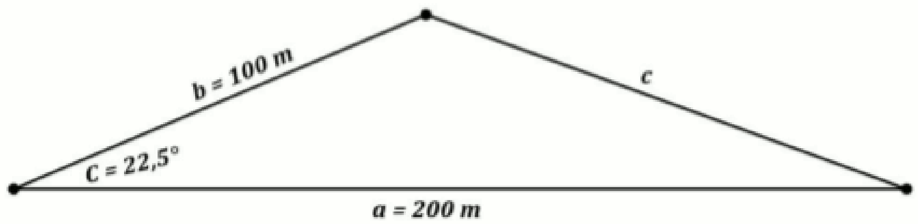
$$\cos 45° = 2\cos^2 22{,}5° - 1 \Rightarrow \cos 22{,}5° = \sqrt{\frac{\frac{\sqrt{2}}{2} + 1}{2}} = \frac{\sqrt{\sqrt{2} + 2}}{2}$$

Finalement,

$$\boxed{a = 100\sqrt{5 - 2\sqrt{2 + \sqrt{2}}} \simeq 114.2 \text{ m}}$$

Solution proposée par Jan Frans Broeckx

La situation est schématisée dans le figure ci-dessous.



Les formules à utiliser sont très simples :

Règle aux cosinus : $c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab.\cos C} = \sqrt{200^2 + 100^2 - 2.200.100.\cos 22{,}5°}$

Aire du triangle : $S = \frac{1}{2}ab.\sin C = \frac{1}{2}.200.100.\sin 22{,}5°$

Cependant, l'exercice doit être résolu manuellement, **sans calculatrice**, et le calcul manuel d'une racine carrée n'est plus enseigné au secondaire. Pour cela, nous utiliserons l'approximation linéaire d'une fonction :

$$f(a+h) \approx f(a) + h.f'(a) \qquad \text{(avec } h \text{ petit)}$$

ce qui, pour $f(x) = \sqrt{x}$, devient :

$$\sqrt{a+h} \approx \sqrt{a} + \frac{h}{2\sqrt{a}}$$

où a est un argument, proche de $a + h$, pour lequel $\sqrt{a}$ est facile à calculer mentalement.

Pour le calcul de cos 22,5° et de sin 22,5° nous utilisons les formules de Carnot, et $\sqrt{2} \approx 1{,}4$:

$$\cos^2 22{,}5° = \frac{1}{2}(1 + \cos 45°) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{4}(2 + \sqrt{2})$$

$$\sin^2 22{,}5° = \frac{1}{2}(1 - \cos 45°) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{4}(2 - \sqrt{2})$$

$$\begin{aligned}
\cos 22{,}5° &= \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}} \approx \frac{1}{2}\sqrt{2+1{,}4} = \frac{1}{2}\sqrt{3{,}4} = \frac{1}{2}\sqrt{4-0{,}6} \approx \frac{1}{2}\left(\sqrt{4} - \frac{0{,}6}{2\sqrt{4}}\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(2 - \frac{0{,}6}{4}\right) = \frac{1}{2}(2 - 0{,}15) = \frac{1}{2}.1{,}85\\
\sin 22{,}5° &= \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}} \approx \frac{1}{2}\sqrt{2-1{,}4} = \frac{1}{2}\sqrt{0{,}60} = \frac{1}{2}\sqrt{0{,}64-0{,}04} \approx \frac{1}{2}\left(\sqrt{0{,}64} - \frac{0{,}04}{2\sqrt{0{,}64}}\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(0{,}80 - \frac{0{,}04}{1{,}60}\right) = \frac{1}{2}(0{,}800 - 0{,}025) = \frac{1}{2}.0{,}775
\end{aligned}$$

On calcule alors pour le 3e côté du champ :

$$
\begin{aligned}
c &= \sqrt{200^2 + 100^2 - 2.200.100.\cos 22{,}5°} \\
&= \sqrt{10^4.\left(4 + 1 - 2.2.\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)} \\
&\approx 100.\sqrt{5 - 2\,.1{,}85} \\
&= 100.\sqrt{1{,}30} \\
&= 100.\sqrt{1 + 0{,}30} \\
&\approx 100.\left(\sqrt{1} + \frac{0{,}30}{2\sqrt{1}}\right) \\
&= 100.(1 + 0{,}15) \\
&= 115 \text{ m}
\end{aligned}
$$

La valeur exacte calculée avec la calculatrice et arrondie au mètre près est de 114 m, donc l'erreur est inférieure à 1%.

On calcule pour l'aire du champ :

$$
\begin{aligned}
S &= \frac{1}{2}.200.100.\sin 22{,}5° \\
&= 10000.\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}} \\
&\approx 5000\,.0{,}775 \\
&= 3875 \text{ m}^2
\end{aligned}
$$

La valeur exacte calculée avec la calculatrice et arrondie au mètre carré près est de 3827 m, donc l'erreur n'est que de 1,3%.

16 février 2016. Modifié le 15 mars 2016 (Jan Frans Breockx)