Exercices résolus de mathématiques.

Trigonométrie
Calcul numérique

TRI 42

EXTRI420-EXTRI429

http://matheux.ovh/Accueil.html

Jacques Collot
Benoit Baudelet – Steve Tumson
Jan Frans Broeckx – Nicole Berckmans
Fabienne Zoetard

Janvier 2016

EXTRI420 – FACS, ULB, Bruxelles, septembre 2015.

Exprimez $\sin 3a$ comme une fonction de $\sin a$.

$$
\begin{aligned}
\sin 3a &= \sin(2a + a) \\
&= \sin 2a \cos a + \cos 2a \sin a \\
&= 2\sin a \cos^2 a + \left(1 - 2\sin^2 a\right)\sin a \\
&= 2\sin a\left(1 - \sin^2 a\right) + \sin a - 2\sin^3 a \\
&= 2\sin a - 2\sin^3 a + \sin a - 2\sin^3 a \\
&\Rightarrow \boxed{\sin a = 3\sin a - 4\sin^3 a}
\end{aligned}
$$

---

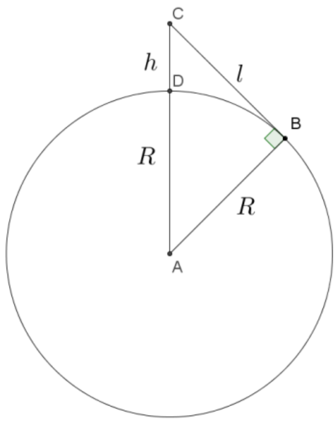
30 janvier 2016

EXTRI421 – FACS, ULB, Bruxelles, septembre 2015.

L'atonium a une hauteur d'environ 100 m. En assimilant la Terre à une sphère parfaite de 6000 km de rayon, jusqu'à quelle distance peut-voir depuis le sommet de ce monument bruxellois.
Quelle devrait être la hauteur d'un bâtiment qui permettrait de voir jusqu'à Ostende, distante de 110 km de Bruxelles?
On demande d'effectuer les calculs à 10% près

Indication : Afin de faciliter les calculs, il peut être intéressant d'approcher les fonctions de petits arguments par leur développement de Taylor au premier ordre:

$$f(x) \approx f(0) + xf'(0)$$



a) Appliquons Pyhtagore dans le triangle rectangle *ABC*

$$(R+h)^2 = l^2 + R^2 \qquad (1)$$

$$\Rightarrow l = \sqrt{(R+h)^2 - R^2} = \sqrt{2Rh + h^2} \simeq \sqrt{2Rh} \quad \text{car } h <<< R$$

$$= \sqrt{2 \times 6 \times 10^3 \times 0,100} = 35.641 \simeq 35.6 \text{ km}$$

b) On repart de (1)

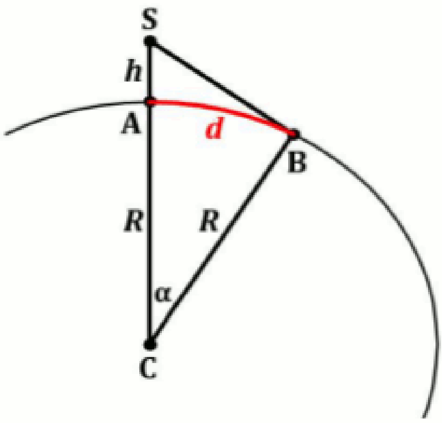
$$h = \sqrt{l^2 + R^2} - R = R\sqrt{\left(\frac{l}{R}\right)^2 + 1} - R$$

Or quand x est petit, on a : $\sqrt{1+x} = 1 + \dfrac{x}{2}$

$$\Rightarrow h = R\left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{l}{R}\right)^2\right) - R = \frac{l^2}{2R} = \frac{110^2}{2 \times 6000} = 1.0083 \simeq 1.0 \text{ km}$$

La tour Burj Khalifa à Dubaï "ne fait que" 828 m

Solution proposée par Jan Frans Broeckx



La situation est schématisée dans le figure à droite. Le triangle CBS est rectangle en B, parce-que la droite SB est tangente au cercle. La « distance » mentionnée dans l'énoncé est la longueur d de l'arc AB.

Les formules à utiliser sont simples :

$$d = R.\alpha$$

$$\tan \alpha = \frac{\overline{SB}}{R} = \frac{\sqrt{(R+h)^2 - R^2}}{R}$$

Cependant, l'exercice doit être résolu manuellement, **sans calculatrice**, et il est donc nécessaire d'introduire des approximations dans le calcul. Ces approximations seront justifiées par le fait que $h \ll R$ et par conséquent que $\alpha \ll 1$; dans ce cas on a que $\tan \alpha \approx \alpha$ (en radians).

$$\alpha \approx \tan \alpha = \frac{\sqrt{(R+h)^2 - R^2}}{R} = \frac{\sqrt{2Rh + h^2}}{R} \approx \frac{\sqrt{2Rh}}{R} = \sqrt{\frac{2h}{R}}$$

$$\Rightarrow \quad d \approx \sqrt{2Rh} \qquad \Leftrightarrow \qquad h \approx \frac{d^2}{2R}$$

1) Atomium

$R = 6000 \text{ km}\,, \qquad h = 100 \text{ m} = 0{,}1 \text{ km}$

$$\Rightarrow \quad d \approx \sqrt{2\,.\,6000\,.\,0{,}1} = \sqrt{1200} = \sqrt{400\,.\,3} = 20\sqrt{3} \approx 20\,.\,1{,}75 = \mathbf{35\ km}$$

où nous avons utilisé l'approximation locale pour la racine carrée :

$$\sqrt{3} = \sqrt{4-1} \approx \sqrt{4} - 1.\left(\sqrt{4}\right)' = \sqrt{4} - \frac{1}{2\sqrt{4}} = 2 - 0{,}25 = 1{,}75$$

(Un calcul sans aucune approximation donne 34,64 km ; l'erreur n'est donc que de 1%.)

2) Hauteur de la tour qui permet de regarder jusqu'à Ostende

$R = 6000 \text{ km}\,, \qquad h = 110 \text{ km}$

$$\Rightarrow \quad h \approx \frac{110^2}{2.6000} = \frac{12100}{12000} \approx \mathbf{1{,}00\ km}$$

(Un calcul sans aucune approximation donne 1,008 km ; l'erreur est inférieur à 1%.)

30 janvier 2016. Modifié le 15 mars 2016 (Jan Frans Broeckx)

EXTRI422 – FACS, ULB, Bruxelles, juillet 2016.

Résoudre dans $\mathbb{R}$

$$\operatorname{cosec}^2 x + \left(1-\sqrt{3}\right)\cot x - \left(1+\sqrt{3}\right) = 0$$

Solution proposée par Jan Frans Broeckx

CE : $\sin x \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \neq k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$

Notation : dans la suite de cet exercice nous noterons la cotangente comme $\cot x$ au lieu de $\operatorname{cotg} x$.

Nous pouvons transformer l'équation en remarquant que le premier terme peut se transformer en :

$$\operatorname{cosec}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x} = 1 + \cot^2 x$$

L'équation devient alors une équation du second degré en $\cot x$:

$$\cot^2 x + \left(1-\sqrt{3}\right)\cot x - \sqrt{3} = 0$$

Son discriminant est :

$$\Delta = \left(1-\sqrt{3}\right)^2 + 4\sqrt{3} = \left(1+\sqrt{3}\right)^2$$

Les solutions de l'équation et $\cot x$ sont donc :

$$\cot x = \frac{1}{2}\left(\left(\sqrt{3}-1\right) \pm \left(1+\sqrt{3}\right)\right) = \begin{cases} \sqrt{3} \\ \text{ou} \\ -1 \end{cases}$$

La solution de l'équation trigonométrique est alors :

$$\boldsymbol{S} = \left\{\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{6}} + \boldsymbol{k\pi} \,\middle\|\, \boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{\mathbf{3\pi}}{\mathbf{4}} + \boldsymbol{k\pi} \,\middle\|\, \boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}\right\}$$

---

25 octobre 2016

EXTRI423 - FACS, ULB, Bruxelles, juillet 2016.
EPL, UCL, LLN, juillet 2016.
POLYTECH, Umons, Mons, juillet 2016.
FACSA, ULG, Liège, juillet 2016

Dans $\mathbb{R}$, trouver toutes les valeurs de x pour lesquelles l'égalité suivante est vérifiée :

$$\sin 5x + \sin x + 2\sin^2 x = 1$$

Présenter sur le cercle trigonométrique celles appartenant à l'intervalle $[-\pi, \pi[$.

Solution proposée par Jan Frans Broeckx

$$\begin{aligned}\sin 5x + \sin x + 2\sin^2 x = 1 &\Leftrightarrow (\sin 5x + \sin x) - (1 - 2\sin^2 x) = 0\\ &\Leftrightarrow 2\sin 3x \cos 2x - \cos 2x = 0\\ &\Leftrightarrow \cos 2x\,(2\sin 3x - 1) = 0\end{aligned}$$

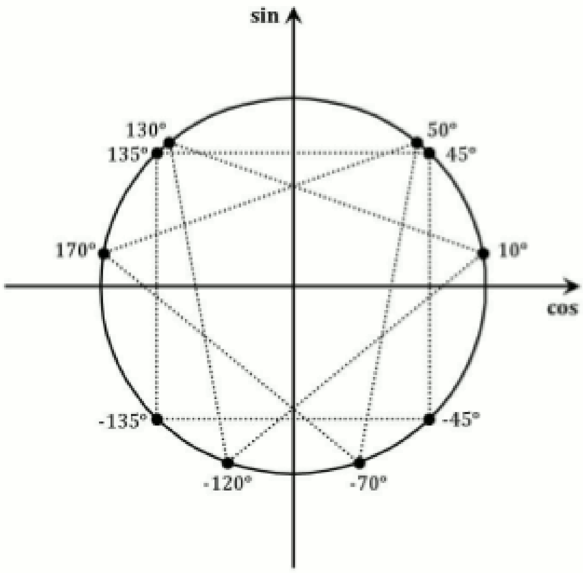
1) $\cos 2x = 0 \quad\Leftrightarrow\quad 2x = 90° + k.180° \quad\Leftrightarrow\quad x = 45° + k.90° \quad (k \in \mathbb{Z})$

2) $\sin 3x = \frac{1}{2} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} 3x = 30° + k.360° & \Leftrightarrow \quad x = 10° + k.120°\ (k \in \mathbb{Z}) \\ \text{ou} & \\ 3x = 150° + k.360° & \Leftrightarrow \quad x = 50° + k.120°\ (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$

L'ensemble de toutes les solutions de l'équation est donc :

$\boldsymbol{S = \{45° + k.90° \| k \in \mathbb{Z}\} \cup \{10° + k.120° \| k \in \mathbb{Z}\} \cup \{10° + k.120° \| k \in \mathbb{Z}\}}$

Représentation sur le cercle trigonométrique de celles appartenant à l'intervalle $[-\pi, \pi[$:



Solution proposée par Nicole Berckmans

Transformons l'équation par les formules de Simpson et de Carnot :

$\sin 5x + \sin x = 1 - 2\sin^2 x \Rightarrow 2\sin 3x \cos 2x = \cos 2x \Rightarrow \cos 2x(2\sin 3x - 1) = 0$

(1) $\cos 2x = 0$

$2x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ càd $x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$

$$\boxed{S_1 = \left\{-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right\}}$$

(2) $\sin 3x = \frac{1}{2}$

- $3x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ càd $x = \frac{\pi}{18} + 2k\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{18}(1 + 12k)$

$$\boxed{S_{21} = \left\{-\frac{11\pi}{18}, \frac{\pi}{18}, \frac{14\pi}{18}\right\}}$$

- $3x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ càd $x = \frac{5\pi}{18} + 2k\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{18}(5 + 12k)$

$$\boxed{S_{22} = \left\{-\frac{7\pi}{18}, \frac{5\pi}{18}, \frac{17\pi}{18}\right\}}$$

---

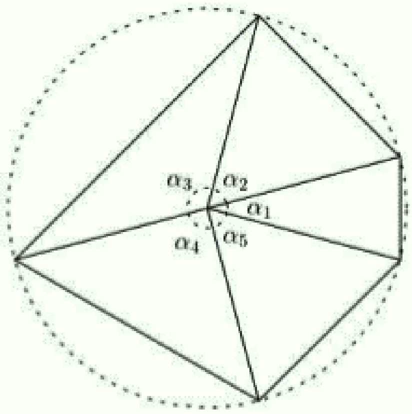
25 octobre 2016

EXTRI424 – FACS, ULB, Bruxelles, juillet 2016.

Soit $\mathcal{P}$ le pentagone inscrit dans un cercle de rayon R représenté ci-contre.

Calculer le périmètre de $\mathcal{P}$ en fonction de R sachant que

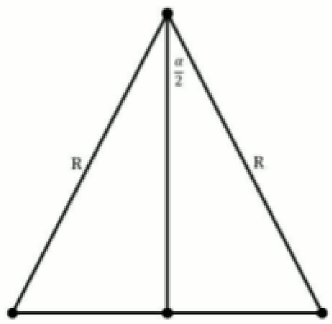
$\boldsymbol{\alpha_1 = 30°, \alpha_2 = 60°, \alpha_3 = 120°}$ **et** $\boldsymbol{\alpha_4 = 90°}$.



Solution proposée par Jan Frans Broeckx

Comme le montre la figure ci-contre, lorsque l'angle au centre vaut α, la longueur de la corde qui sous-tend l'arc intercepté par cet angle vaut

$$l = 2\text{R} \sin\frac{\alpha}{2}$$



On a également que

$$\alpha_5 = 360° - (30° + 60° + 120° + 90°) = 60°$$

La longueur p du périmètre du pentagone $\mathcal{P}$ est donc donnée par :

$$\begin{aligned} p &= 2\text{R}(\sin 15° + \sin 30° + \sin 45° + 2\sin 60°) \\ &= 2\text{R}\left(\sin 15° + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{3}\right) \\ &= \text{R}\left(2\sin 15° + 1 + \sqrt{2} + 2\sqrt{3}\right) \end{aligned}$$

En utilisant la calculatrice, et en arrondissant à deux décimales, le résultat est

$$\boldsymbol{p = 6{,}40\ \text{R}}$$

Cependant, l'exercice doit être résolu manuellement, **sans calculatrice**, et le calcul manuel d'une racine carrée n'est plus enseigné au secondaire. Pour cela, nous utiliserons l'approximation linéaire d'une fonction :

$$f(a+h) \cong f(a) + h.f'(a) \qquad \text{(avec } h \text{ petit)}$$

ce qui, pour $f(x) = \sqrt{x}$, devient :

$$\sqrt{a+h} \cong \sqrt{a} + \frac{h}{2\sqrt{a}}$$

où a est un argument, proche de $a + h$, pour lequel $\sqrt{a}$ est facile à calculer mentalement. Alors :

$$\begin{aligned} \sqrt{3} &= \sqrt{4-1} \cong \sqrt{4} - \frac{1}{2\sqrt{4}} = 2 - 0{,}25 = 1{,}75 \\ \sqrt{2} &= \sqrt{4-2} \cong \sqrt{4} - \frac{1-2}{2\sqrt{4}} = 2 - 0{,}50 = 1{,}50 \end{aligned}$$

Cependant, une simple multiplication nous montre que 1,40 est une meilleure approximation de $\sqrt{2}$ que 1,50 ($1{,}50^2 = 2{,}25$ et $1{,}40^2 = 1{,}96$). Nous utiliserons donc $\boldsymbol{\sqrt{2} \cong 1{,}40}$ et $\boldsymbol{\sqrt{3} \cong 1{,}75}$.

Pour le calcul de la valeur de sin 15° nous utiliserons une des formules de Carnot :

$$\sin^2 15° = \frac{1}{2}(1 - \cos 30°) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{4}\left(2 - \sqrt{3}\right) \cong \frac{1}{4}(2 - 1{,}75) = \frac{1}{16} \quad \Rightarrow \quad \sin 15° \cong \frac{1}{4} = 0{,}25$$

On trouve alors pour la longueur p du périmètre du pentagone $\mathcal{P}$:

$$p \cong \mathrm{R}(0{,}50 + 1 + 1{,}40 + 3{,}50) = \mathbf{6{,}40\ R}$$

ce qui est exactement la même valeur (arrondie à deux décimales) que trouvée à l'aide de la calculatrice…

25 octobre 2016

EXTRI425 – FACS, ULB, Bruxelles, septembre 2016.
EPL, UCL, LLN, juillet 2016.

Résoudre dans $\mathbb{R}$

$$\cos 3\theta + \left(1-\sqrt{3}\right)\cos 2\theta + \left(1-\sqrt{3}\right)\cos\theta + 1 = 0$$

Solution proposée par Jan Frans Broeckx

Nous allons essayer de transformer cette équation en une équation du 3e degré en $\cos\theta$. Pour cela, nous allons utiliser pour $\cos 2\theta$ la formule

$$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$$

et nous déduisons une formule qui exprime $\cos 3\theta$ en fonction de $\cos\theta$ seulement :

$$\begin{aligned}
\cos 3\theta &= \cos(2\theta+\theta)\\
&= \cos 2\theta \,.\, \cos\theta - \sin 2\theta \,.\, \sin\theta\\
&= (2\cos^2\theta - 1)\cos\theta - (2\sin\theta\cos\theta)\sin\theta\\
&= 2\cos^3\theta - \cos\theta - 2\left(1-\cos^2\theta\right)\cos\theta\\
&= 2\cos^3\theta - \cos\theta - 2\cos\theta + 2\cos^3\theta\\
&= 4\cos^3\theta - 3\cos\theta
\end{aligned}$$

L'équation trigonométrique devient alors :

$$\left(4\cos^3\theta - 3\cos\theta\right) + \left(1-\sqrt{3}\right)(2\cos^2\theta - 1) + \left(1-\sqrt{3}\right)\cos\theta + 1 = 0$$

ou encore, après regroupement des termes selon les puissances de $\cos\theta$:

$$4\cos^3\theta + 2\left(1-\sqrt{3}\right)\cos^2\theta - \left(2+\sqrt{3}\right)\cos\theta + \sqrt{3} = 0$$

La somme des coefficients des puissances impaire de $\cos\theta$ (qui est $4 - \left(2+\sqrt{3}\right) = 2-\sqrt{3}$) est égale à la somme des coefficients des puissances paires de $\cos\theta$ (qui est $2\left(1-\sqrt{3}\right) + \sqrt{3} = 2-\sqrt{3}$). Le polynôme en $\cos\theta$ est donc divisible par le facteur $(\cos\theta + 1)$, et application de la règle de Horner donne finalement :

$$\boldsymbol{(\cos\theta + 1)\left(4\cos^2\theta - 2\left(1+\sqrt{3}\right)\cos\theta + \sqrt{3}\right) = 0}$$

1) $\cos\theta + 1 = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \cos\theta = -1 \quad\Leftrightarrow\quad \theta = -\pi + 2k\pi \quad (k\in\mathbb{Z})$
2) $4\cos^2\theta - 2\left(1+\sqrt{3}\right)\cos\theta + \sqrt{3} = 0$

   Le discriminant de ce trinôme du second degré en $\cos\theta$ est

   $$\Delta = 4\left(1+\sqrt{3}\right)^2 - 16\sqrt{3} = 4\left(\left(1+\sqrt{3}\right)^2 - 4\sqrt{3}\right) = 4\left(1-\sqrt{3}\right)^2$$

   Les solutions sont donc

   $$\cos\theta = \frac{1}{8}\left(2\left(1+\sqrt{3}\right) \pm 2\left(1-\sqrt{3}\right)\right) = \begin{cases}\dfrac{1}{2}\\ \text{ou}\\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$$

   auxquelles correspondent les solutions suivantes pour θ :

   $$\cos\theta = \frac{1}{2} \quad\Leftrightarrow\quad \theta = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi \ \ (k\in\mathbb{Z})$$

   $$\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad\Leftrightarrow\quad \theta = \pm\frac{\pi}{6} + 2k\pi \ \ (k\in\mathbb{Z})$$

L'ensemble de toutes les solutions de l'équation est donc :

$$\boldsymbol{S} = \{-\boldsymbol{\pi} + 2k\boldsymbol{\pi} \,\|\, k\in\mathbb{Z}\} \cup \left\{\pm\frac{\boldsymbol{\pi}}{3} + 2k\boldsymbol{\pi} \,\middle\|\, k\in\mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\pm\frac{\boldsymbol{\pi}}{6} + 2k\boldsymbol{\pi} \,\middle\|\, k\in\mathbb{Z}\right\}$$

Solution proposée par Fabienne Zoetard

$$\begin{aligned}
&\cos 3\theta+\left(1-\sqrt{3}\right)\cos 2\theta+\left(1-\sqrt{3}\right)\cos\theta+1=0\\
\Rightarrow\ &\cos 3\theta+\left(1-\sqrt{3}\right)\left(\cos 2\theta+\cos\theta\right)+1=0\\
\Rightarrow\ &2\cos^2\frac{3\theta}{2}-1+\left(1-\sqrt{3}\right)\cdot 2\cdot\cos\frac{3\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}+1=0\\
\Rightarrow\ &2\cos\frac{3\theta}{2}\left(\cos\frac{3\theta}{2}+\left(1-\sqrt{3}\right)\cos\frac{\theta}{2}\right)=0\\
\Rightarrow\ &\cos\frac{3\theta}{2}\left(\cos\frac{3\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2}-\sqrt{3}\cos\frac{\theta}{2}\right)=0\\
\Rightarrow\ &\cos\frac{3\theta}{2}\left(2\cos\theta\cdot\cos\frac{\theta}{2}-\sqrt{3}\cos\frac{\theta}{2}\right)=0\\
\Rightarrow\ &\cos\frac{3\theta}{2}\cdot\cos\frac{\theta}{2}\left(2\cos\theta-\sqrt{3}\right)=0
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow\ \begin{array}{c|c|c}
\cos\frac{3\theta}{2}=0 & \cos\frac{\theta}{2}=0 & 2\cos\theta-\sqrt{3}=0\\
\frac{3\theta}{2}=\frac{\pi}{2}+k\pi & \frac{\theta}{2}=\frac{\pi}{2}+k\pi & \cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}\\
\theta=\frac{\pi}{3}+k\frac{2\pi}{3} & \theta=\pi+2k\pi & \theta=\pm\frac{\pi}{6}+k2\pi\\
(1) & (2) & (2)
\end{array}$$

Remarquons que (2) est inclus dans (1)

$$\Rightarrow S=\left\{\frac{\pi}{3}+k\frac{2\pi}{3};\pm\frac{\pi}{6}+k2\pi\mid k\in\mathbb{Z}\right\}$$

---

25 octobre 2016. Modifié le 29 septembre 2017 (Fabienne Zoetard)

EXTRI426 – FACS, ULB, Bruxelles, septembre 2016.
ULB, UCL, LLN, septembre 2016
POLYTECH, Umons, Mons, septembre 2016
FACSA, ULG, Liège, septembre 2016

Résoudre l'équation trigonométrique suivante, en précisant les conditions d'existence :

$$\frac{\tan x - \sin x}{\tan x + \sin x} = 2 - 2\cos x$$

Représenter les solutions appartenant à l'intervalle $[-\pi, \pi[$ sur le cercle trigonométrique.

Solution proposée par Jan Frans Broeckx

CE ① $\tan x \in \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \quad x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

② $\tan x \neq -\sin x \quad \Leftrightarrow \quad x \neq k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

Sous ces conditions :

$$\frac{\tan x - \sin x}{\tan x + \sin x} = 2 - 2\cos x \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\frac{\sin x - \sin x \cos x}{\cos x}}{\frac{\sin x + \sin x \cos x}{\cos x}} = 2 - 2\cos x$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\sin x\,(1-\cos x)}{\sin x\,(1+\cos x)} = 2(1-\cos x) \qquad (\sin x \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1-\cos x}{1+\cos x} = 2(1-\cos x) \qquad (\cos x \neq 1)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{1+\cos x} = 2$$

$$\Leftrightarrow \quad 2(1+\cos x) = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos x = -\frac{1}{2}$$

L'ensemble des solutions de l'équation trigonométrique est donc :

$$S = \left\{ \pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \,\middle\|\, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Leur représentation sur le cercle trigonométrique est simple, en ne consiste qu'en deux points. Nous la laissons au lecteur.

Solution proposée par Nicole Berckmans

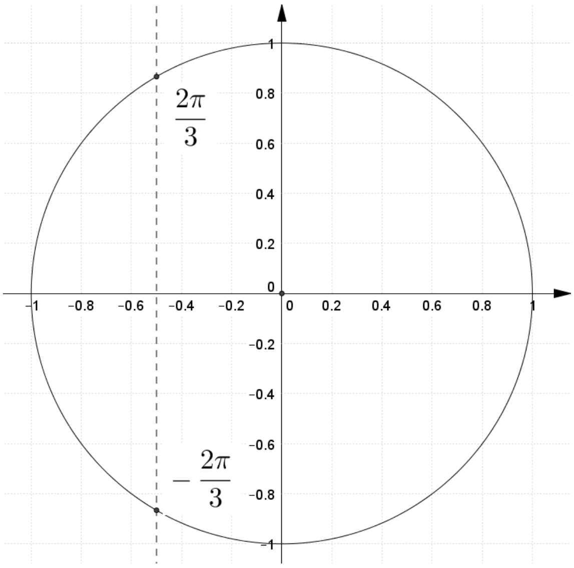
$$\tan x \text{ existe si } x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$\frac{\frac{\sin x}{\cos x} - \sin x}{\frac{\sin x}{\cos x} + \sin x} = \frac{1-\cos x}{1+\cos x} \text{ si } \sin x \neq 0 \Rightarrow x \neq k\pi$$

$$\frac{1-\cos x}{1+\cos x} = 2(1-\cos x)$$

$$(1)\, 1-\cos x = 0 \Rightarrow \cos x = 1 \text{ à rejeter}$$

$$(2)\, \cos x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$$



25 octobre 2016

EXTRI427 – FACS, ULB, Bruxelles, septembre 2016.

Sachant que les coordonnées de Bruxelles sont 50,85° de latitude Nord et 4,35° de longitude Est et que celles de Lagos au Nigéria sont 6,52° de latitude Nord et 3,38° de longitude Est, calculer la distance la plus courte parcourue sur la Terre entre ces deux villes en assimilant la Terre à une sphère parfaite de 6000 km de rayon. On demande d'exprimer la valeur de la réponse numérique à 10% près et d'approcher les fonctions de petits arguments par leur développement de Taylor au premier ordre : $f(x) \approx f(0) + x f'(0)$.

Rappel :

- Pour un point P situé sur le globe terrestre, la latitude est l'angle entre le plan de l'équateur et la demi-droite dont l'origine est le centre de la Terre et qui passe par le point P. Cet angle est compris entre 0° et 90° (Nord ou Sud).
- La longitude est l'angle formé par le plan du méridien de Greenwich et le plan comprenant l'axe de rotation de la Terre (axe Nord-Sud) et le point P. Cet angle est compris entre 0° et 180° (Est ou Ouest).

Solution proposée par Jan Frans Broeckx

Remarque préalable : les exercices doivent être faits ***sans*** calculatrice, donc à l'aide de calculs manuels seulement !

Etant donné qu'on demande un résultat numérique à seulement 10% près, et que les longitudes de Bruxelles et Lagos sont respectivement 4,35° E et 3,38° E, on peut considérer que ces deux villes se trouvent sur le ***même méridien***.

L'angle au centre (de la Terre) entre les rayons vers Bruxelles et vers Lagos est alors simplement la différence entre leurs latitudes, convertie en radians :

$$\Delta\phi = (50{,}85° - 6{,}52°).\frac{\pi}{180°} = \frac{44{,}33°}{180°}.\pi \cong 0{,}246\;.3{,}14 = 0{,}77244$$

La distance entre Bruxelles et Lagos est la longueur de l'arc de cercle de rayon 6000 km sous-tendu par cet angle au centre :

$$d = \mathrm{R}.\Delta\phi \;\cong 6000\;.0{,}77244 = \mathbf{4635\ km}$$

En **trigonométrie sphérique**, si les coordonnées de deux points A et B sur la Terre sont

A (latitude ϕ_{A} ; longitude λ_{A})

B (latitude ϕ_{B} ; longitude λ_{B})

et si le rayon de la Terre, assimilée)à une sphère parfaite, est R, alors la distance entre A et B le long d'un grand cercle est donnée par :

$$d_{\mathrm{AB}} = \mathrm{R}\;.\arccos(\sin\phi_{\mathrm{A}}\,.\sin\phi_{\mathrm{B}} + \cos\phi_{\mathrm{A}}\,.\cos\phi_{\mathrm{B}}\,.\cos(\lambda_{\mathrm{B}} - \lambda_{\mathrm{A}}))$$

En utilisant cette formule avec les coordonnées ci-dessus de Bruxelles et de Lagos, et avec $\mathrm{R} = 6000$ km, on trouve :

$$d = 4643\ \mathrm{km}$$

L'erreur sur notre calcul approché était donc inférieure à 0,2%.

EXTRI428 – EPL, UCL, LLN, juillet 2016.

Cochez chaque fois l'unique affirmation vraie parmi les possibilités.

Réponse juste = 1 point ; autre réponse = 0.

- Soit ABC un triangle rectangle en A, dont les côtés a, b et c sont opposés aux angles respectifs A, B et C. Soit R le rayon du cercle circonscrit. Alors :

  $a = \mathrm{R}$ ☐ $a = \sqrt{2}\mathrm{R}$ ☐ $a = 2\mathrm{R}$ ☐

- Dans l'intervalle $0 < x < \pi$, l'équation $\cos^2 x + \frac{1}{4}\sin^2 2x = 0$ admet exactement

  0 solutions ☐ 1 solution ☐ 2 solutions ☐

- L'expression $\cos(a+b)\cos(a-b) - \sin(a+b)\sin(a-b)$ est identiquement égale à

  $\cos\frac{a}{2}$ ☐ $\cos a$ ☐ $\cos 2a$ ☐

- $\dfrac{\sin\frac{4\pi}{10}}{\sin\frac{3\pi}{10}}$ est égal à

  $\sqrt{2}\sin\frac{2\pi}{10}$ ☐ $2\sin\frac{2\pi}{10}$ ☐ $\sqrt{2}\tan\frac{2\pi}{10}$ ☐ $2\tan\frac{2\pi}{10}$ ☐

Solution proposée par Nicole Berckmans

(1) A sous-tend un demi-cercle de rayon $R \Rightarrow a = 2R$ (figure 1)

(2) L'équation sera égale à zéro si

$$\begin{cases} \cos x = 0 \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{2} \\ \sin 2x = 0 \Rightarrow 2x = \pi \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow \text{ une seule solution : } x = \frac{\pi}{2}$$

(3) $\cos(a+b)\cos(a-b) - \sin(a+b)\sin(a-b) = \cos(a+b+a-b) = \cos 2a$

(4) (a) Si $C = \dfrac{\pi}{2}$ $\cos A = \sin B$ et $\sin A = \cos B$ ce qui vérifie la relation.

(b) Simpson : $\cos A + \cos B = \sin A + \sin B$

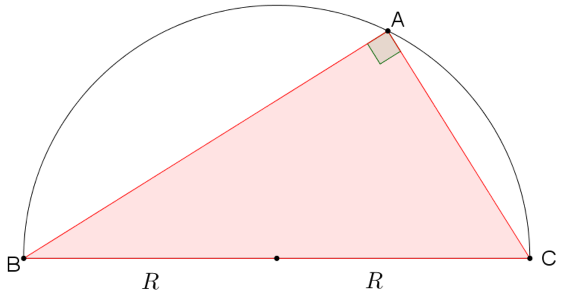
$$\cancel{2}\cos\frac{A+B}{2}\cancel{\cos\frac{A-B}{2}} = \cancel{2}\sin\frac{A+B}{2}\cancel{\cos\frac{A-B}{2}}$$

$$\text{car } \cos\frac{A-B}{2} \neq 0 \quad (\text{sinon } A - B = \pi)$$

$$\tan\frac{A+B}{2} = 1 \Rightarrow \frac{A+B}{2} = \frac{\pi}{4} \Rightarrow A + B = \frac{\pi}{2} \Rightarrow C = \frac{\pi}{2}$$

Conclusion : $C > 60°$

(5) Le complémentaire de $\dfrac{3\pi}{10}$ est $\dfrac{2\pi}{10}$: $\dfrac{\sin\frac{4\pi}{10}}{\cos\frac{2\pi}{10}} = \dfrac{2\sin\frac{2\pi}{10}\cos\frac{2\pi}{10}}{\cos\frac{2\pi}{10}} = 2\sin\dfrac{2\pi}{10}$



Solution proposée par Jan Frans Broeckx

Soit ABC un triangle rectangle en A, dont les côtés a, b et c sont opposés aux angles respectifs A, B et C. Soit R le rayon du cercle circonscrit. Alors , $\boldsymbol{a} = \mathbf{2R}$ parce-que dans un cercle, un angle inscrit qui est droit intercepte son diamètre.

Dans l'intervalle $0 < x < \pi$, l'équation $\cos^2 x + \frac{1}{4}\sin^2 2x = 0$ admet exactement **1 solution** parce-que :

$$\begin{aligned}\cos^2 x + \frac{1}{4}\sin^2 2x = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \cos^2 x + \frac{1}{4}(4\sin^2 x \cos^2 x) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \cos^2 x\,(1 + \sin^2 x) = 0\end{aligned}$$

$1 + \sin^2 x$ ne s'annule nulle part, et pour $0 < x < \pi$, $\cos^2 x$ s'annule seulement en $x = \frac{\pi}{2}$.

L'expression $\cos(a+b)\cos(a-b) - \sin(a+b)\sin(a-b)$ est identiquement égale à $\mathbf{cos\ 2}\boldsymbol{a}$ puisque :

$$\begin{aligned} & \cos(a+b)\cos(a-b) - \sin(a+b)\sin(a-b) \\ = \ & (\cos a \cos b - \sin a \sin b)(\cos a \cos b + \sin a \sin b) - (\sin a \cos b + \cos a \sin b)(\sin a \cos b - \cos a \sin b) \\ = \ & (\cos^2 a \cos^2 b - \sin^2 a \sin^2 b) - (\sin^2 a \cos^2 b - \cos^2 a \sin^2 b) \\ = \ & \cos^2 a\,(\cos^2 b + \sin^2 b) - \sin^2 a\,(\sin^2 b + \cos^2 b) \\ = \ & \cos^2 a - \sin^2 a \quad = \quad \cos 2a \end{aligned}$$

$\dfrac{\sin\frac{4\pi}{10}}{\sin\frac{3\pi}{10}}$ est égal à $\mathbf{2\ sin}\,\frac{2\pi}{10}$ parce-que :

$$\frac{\sin\frac{4\pi}{10}}{\sin\frac{3\pi}{10}} = \frac{2\sin\frac{2\pi}{10}\cos\frac{2\pi}{10}}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{10}\right)} = \frac{2\sin\frac{2\pi}{10}\cos\frac{2\pi}{10}}{\cos\left(\frac{2\pi}{10}\right)} = 2\sin\frac{2\pi}{10}$$

---

15 septembre 2015

EXTRI429 – EPL, UCL, LLN, juillet 2016.

On considère que la terre est une sphère de rayon r. En deux points séparés d'une distance d en vol d'oiseau (donc mesuré le long de la surface de la terre), on souhaite ériger deux tours verticales (elles sont donc perpendiculaires à la surface de la terre) de même hauteur h.

1) Dans un premier cas, les deux tours sont conçues pour qu'il soit tout juste possible de voir le pied de l'une à partir du sommet de l'autre. Exprimez h en fonction de r et d. Calculez h à un mètre près pour les données suivantes : $r = 6371$ km et $d = 50$ km.

2) Dans un second cas, h est spécifié et l'emplacement des deux tours est choisi pour qu'il soit tout juste possible de voir le sommet de l'une à partir du sommet de l'autre. Exprimez d en fonction de r et h. Calculez d à un mètre près pour les données suivantes : $r = 6371$ km et $h = 100$ m.

Pour chacun des deux cas, faites un croquis de la situation et indiquez-y les quantités r, d et h ainsi que les variables intermédiaires que vous utiliserez dans vos calculs.

Solution proposée par Nicole Berckmans

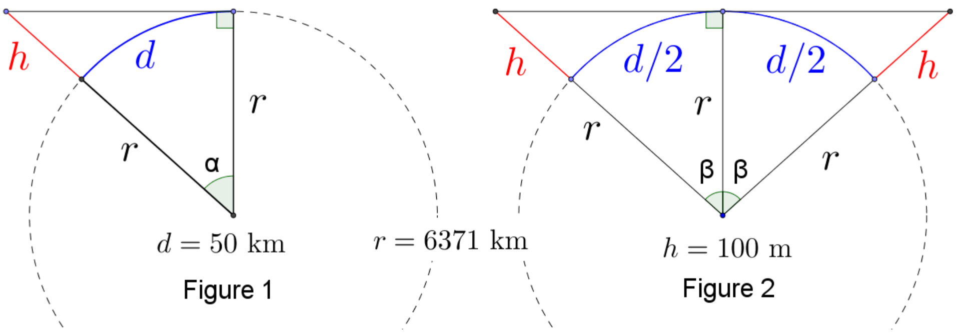


Figure 1

Figure 2

(1) Figure 1

$$d = \alpha r \Rightarrow \alpha = \frac{d}{r} = 0.0078 \text{ radian}$$

$$\cos\alpha = \frac{r}{h+r} = \frac{6371}{h+6371} \Rightarrow h = 6371\frac{1-\cos\alpha}{\cos\alpha} = 0.1962 \text{ km } = 196 \text{ m}$$

(2) Figure 2

$$\beta == \frac{d/2}{r}$$

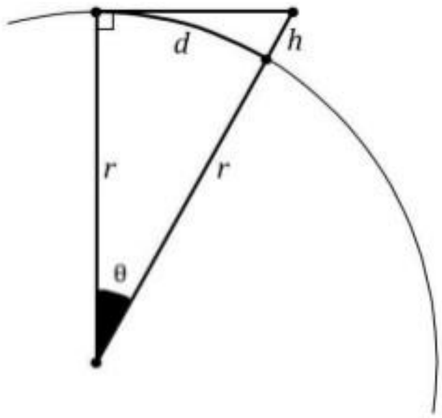
$$\cos\beta = \frac{r}{r+h} = \frac{6371}{6371.1}$$

$$d = \arccos\beta = 71.3914 \text{ km } = 71391 \text{ m}$$

Solution proposée par Jan Frans Broeckx

1) Premier cas.

Comme le montre la figure ci-contre :



$d = r.\theta \quad \Leftrightarrow \quad \theta = \frac{d}{r}$

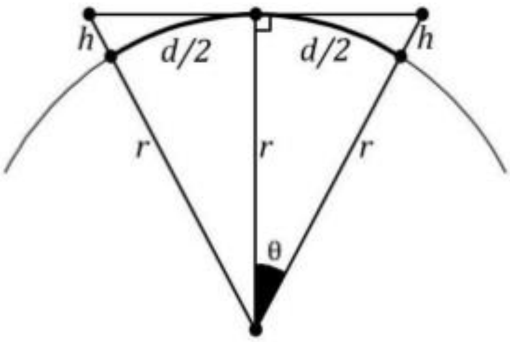
$\cos\theta = \frac{r}{r+h} \quad \Leftrightarrow \quad r + h = \frac{r}{\cos\theta}$

et donc :

$$\boxed{h = r.\left(\frac{1}{\cos\frac{d}{r}} - 1\right)}$$

Avec $r = 6371$ km et $d = 50$ km, on trouve $\boldsymbol{h} = \mathbf{196\ m}$.

2) Deuxième cas.



$d = 2.r.\theta \quad$ et $\quad \cos\theta = \frac{r}{r+h}$

Donc :

$$\boxed{d = 2.r.\arccos\left(\frac{r}{r+h}\right)}$$

Avec $r = 6371$ km et $h = 100$ m, on trouve

$\boldsymbol{d} = \mathbf{71{,}4\ km}$.

30 octobre 16