**Exercices résolus de mathématiques.**

# Trigonométrie Calcul numérique

# TRI 43

**EXTRI430-EXTRI439**

http://www.matheux.c.la

Jacques Collot
Jan Frans Broeckx – Nicole Berckmans
Fabienne Zoetard

Octobre 2016

# EXTRI430 – EPL, UCL, LLN, septembre 2016.

Cochez chaque fois l'unique affirmation vraie parmi les possibilités.

Réponse juste = 1 point ; autre réponse = 0.

- Un triangle ABC est rectangle quand ses angles vérifient la relation suivante :

  $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 2$ ❑

  $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 2$ ❑

  $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2$ ❑

- Dans l'intervalle $0 < x < \pi$, l'équation $\sin\left(x - \frac{\pi}{7}\right) = \sin x - \sin\frac{\pi}{7}$ admet exactement :

  0 solutions ❑ 1 solution ❑ 2 solutions ❑ 3 solutions ❑

- L'expression $\dfrac{\tan^2 32° \sin^2 32°}{\cot 58° + \cos 58°}$ est égale à

  $\sin 32° + \cos 58°$ ❑ $\tan 32° - \cos 58°$ ❑ $\tan 58° + \sin 32°$ ❑

- Dans un triangle ABC non dégénéré (les trois sommets ne sont pas alignés), si

  $\dfrac{1}{2\sin A} = \left(\dfrac{\sin B + \sin C}{\cos C + \cos B}\right)^{-1}$, alors

  $A = 60°$ ❑ $A = 45°$ ❑ $A = 30°$ ❑ A est indéterminé ❑

- On considère la hauteur AH d'un triangle ABC rectangle en A. La quantité $BH.HC - AH^2$ est

  strictement positive ❑ strictement négative ❑ égale à zéro ❑

## Solution proposée par Nicole Berckmans

$(1)$ Essayons deux situations :

$$A=90°, B=45°, C=45° \qquad A=90°, B=30°, C=60°$$

$$\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C \overset{?}{=} 2 \qquad 0+1+1=2 \quad \text{OK} \qquad 0+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\neq 2 \quad \cancel{\text{OK}}$$

$$\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C \overset{?}{=} 2 \qquad 0+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\neq 2 \quad \cancel{\text{OK}} \qquad /$$

$$\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C \overset{?}{=} =2 \qquad 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=2 \quad \text{OK} \qquad 1+\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=2 \quad \text{OK}$$

$\Rightarrow$ L'unique réponse est la $3^{\text{ème.}}$

$$(2)\ \sin\left(x-\frac{\pi}{7}\right)=\sin x-\sin\frac{\pi}{7} \Rightarrow 2\sin\frac{x-\frac{\pi}{7}}{2}\cos\frac{x-\frac{\pi}{7}}{2}=2\cos\frac{x+\frac{\pi}{7}}{2}\sin\frac{x-\frac{\pi}{7}}{2}$$

$$(a)\ \sin\frac{x-\frac{\pi}{7}}{2}=0 \Rightarrow \frac{x-\frac{\pi}{7}}{2}=k\pi \Rightarrow x=\frac{\pi}{7}+2k\pi \Rightarrow x=\frac{\pi}{7}\in\left]0,\pi\right[$$

$$(b)\ \cos\frac{x-\frac{\pi}{7}}{2}=\cos\frac{x+\frac{\pi}{7}}{2}$$

$$(b1)\quad \frac{x-\frac{\pi}{7}}{2}=\frac{x+\frac{\pi}{7}}{2}+2k\pi \qquad \text{à rejeter}$$

$$(b2)\quad \frac{x-\frac{\pi}{7}}{2}=-\frac{x+\frac{\pi}{7}}{2}+2k\pi \Rightarrow x=2k\pi\notin\left]0,\pi\right[$$

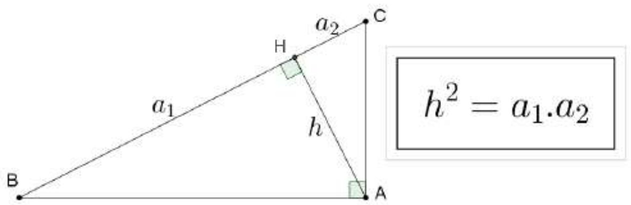
Conclusion : une seule solution

$(3)$ Posons $\alpha=32°$ et $90°-\alpha=58°$ $\left(\text{Rappel : } \sin 32°=\cos 58°\right)$

Développons en utilisant : $\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

$$\frac{\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}\sin^2\alpha}{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\sin\alpha}=\frac{\sin^4\alpha}{\sin\alpha\cos^2\alpha\left(\frac{1}{\cos\alpha}+1\right)}=\frac{\sin^3\alpha}{\cos\alpha(+\cos\alpha)}=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}.\frac{\sin^2\alpha}{1+\cos\alpha}$$

$$=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}.\frac{1-\cos^2\alpha}{1+\cos\alpha}=\tan\alpha(1-\cos\alpha)=\tan\alpha-\sin\alpha=\tan 32°-\cos 58°$$



**Solution proposée par Jan Frans Broeckx**

---

Un triangle ABC est rectangle quand ses angles vérifient la relation $\mathbf{\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2}$.

En effet, supposons que le triangle soit rectangle en A. Alors $\sin A = 1$, donc $\sin^2 A = 1$, et également $B + C = \frac{\pi}{2}$, donc :

$$\sin(B + C) = 1 = \sin B \cos C + \cos B \sin C = \sin B \cos\left(\frac{\pi}{2} - B\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - C\right) \sin C = \sin^2 B + \sin^2 C$$

---

Dans l'intervalle $0 < x < \pi$, l'équation $\sin\left(x - \frac{\pi}{7}\right) = \sin x - \sin\frac{\pi}{7}$ admet exactement **1 solution** (pour $x = \frac{\pi}{7}$).

---

$$\begin{aligned}\frac{\tan^2 32°.\sin^2 32°}{\cot 58° + \cos 58°} &= \frac{\sin^4 32°}{\cos^2 32°(\tan 32° + \cos 58°)} = \frac{\sin^4 32°(\tan 32° - \cos 58°)}{\cos^2 32°(\tan^2 32° - \cos^2 58°)} \\ &= \frac{\sin^4 32°}{\cos^2 32°(\tan^2 32° - \sin^2 32°)}(\tan 32° - \cos 58°) \\ &= \frac{\sin^4 32°}{\cos^2 32° \dfrac{(\sin^2 32° - \sin^2 32°.\cos^2 32°)}{\cos^2 32°}}(\tan 32° - \cos 58°) \\ &= \frac{\sin^2 32°}{1 - \cos^2 32°}(\tan 32° - \cos 58°) \;=\; \mathbf{\tan 32° - \cos 58°}\end{aligned}$$

---

$\dfrac{1}{2\sin A} = \left(\dfrac{\sin B + \sin C}{\cos C + \cos B}\right)^{-1}$, alors $\mathbf{A = 60°}$.

En effet, avec $0 < A, B, C < \pi$ :

$$2\sin A = \frac{\sin B + \sin C}{\cos B + \cos C} \iff 4\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2} = \frac{2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}}{2\cos\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}} = \frac{\sin\frac{B+C}{2}}{\cos\frac{B+C}{2}} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}\right)} = \frac{\cos\frac{A}{2}}{\sin\frac{A}{2}}$$

$$\cos\frac{A}{2} \neq 0\ (A < \pi) \quad \iff \quad \sin^2\frac{A}{2} = \frac{1}{4} \quad \iff \quad \sin\frac{A}{2} = \frac{1}{2} \quad \iff \quad \frac{A}{2} = 30° \quad \iff \quad A = 60°$$

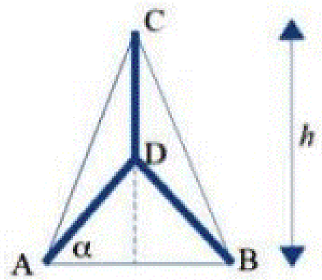
---

On considère la hauteur AH d'un triangle ABC rectangle en A. La quantité $BH.HC - AH^2$ est **égale à zéro** parce-que, dans tout triangle rectangle, la hauteur relative à l'hypoténuse est moyenne proportionnelle entre les segments qu'elle détermine sur l'hypoténuse.

---

30 janvier 2016

# EXTRI431 – EPL, UCL, LLN, septembre 2016.




On considère trois villes A, B et C. On suppose que la distance AC entre A et C est égale à la distance BC entre B et C. On désire concevoir un réseau routier qui relie ces trois villes.

Il est possible de montrer que, sous certaines conditions, la meilleure solution consiste à définir un point D sur la hauteur issue de C et de créer 3 routes AD, BD et CD.

Pour simplifier les calculs, on suppose que la longueur AB = 2 km.

- Calculez la longueur totale *d* du réseau routier en fonction de l'angle BAD appelé α et de *h* la hauteur du triangle issue de C.
- Calculez la position du point D (c'est-à-dire le valeur de α) qui minimise la longueur totale du réseau.
- Calculez la longueur *d* pour *h* = 8 km à un mètre près.
- Faites un dessin à l'échelle du réseau optimal dans le cas où *h* = 200 m. Est-ce la solution optimale ? Si non, quel est le meilleur réseau dans ce cas et pourquoi la formule développée plus haut pour calculer *d* est-elle inadaptée dans ce cas ?

---

**Solution proposée par Nicole Berckmans**

$$T = \text{ le trajet } = 2AD + DC = 2.\frac{1}{\cos\alpha} + [h - \tan\alpha] = \frac{2-\sin\alpha}{\cos\alpha} + h$$

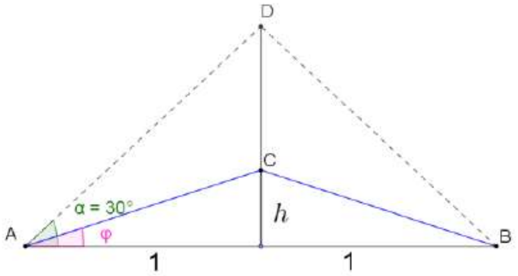
$$\frac{dT}{d\alpha} = \ldots = \frac{2\sin\alpha - 1}{\cos^2\alpha}$$

| $\alpha$ | $0°$ | | $30°$ | | $90°$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{dT}{d\alpha}$ | $(-1)$ | $-$ | $0$ | $+$ | $\left[\frac{1}{0^+}\right]$ |
| | | $\searrow$ | min | $\nearrow$ | |

$$T = \text{ le trajet } = \frac{2-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} + 8 = \sqrt{3} + 8 = 9732 \text{ m}$$

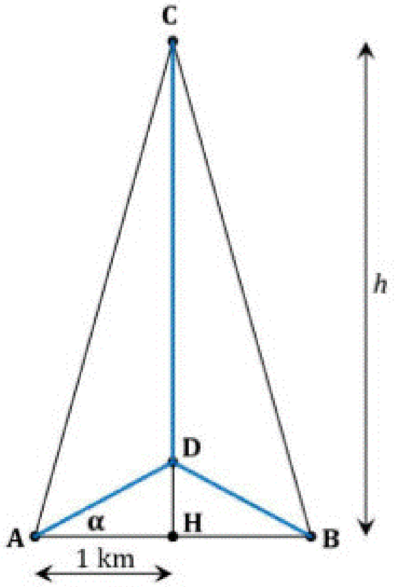
Si $\varphi = CAB < 30°$ alors le trajet minimum est : $AC + CB$.

$$\tan\varphi = \frac{h}{1} < \tan 30° = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ donc si } h < \frac{\sqrt{3}}{3}$$



## Solution proposée par Jan Frans Broeckx

Dans cet exercice, toutes les longueurs sont exprimées en km. Pour que le réseau routier soit tel que suggéré, il faut que l'angle $\alpha$ soit tel que le point D se trouve à l'intérieur du triangle ABC. La condition est que $\overline{\mathrm{DH}} \leq h$ ou encore que




$$\boxed{\tan \alpha \leq h}$$

Sous cette condition, la longueur totale du réseau routier est

$$d(\alpha) \quad = \quad \overline{\mathrm{AD}} + \overline{\mathrm{CD}} + \overline{\mathrm{BD}} \quad = \quad \frac{1}{\cos \alpha} + (h - \tan \alpha) + \frac{1}{\cos \alpha}$$

et donc :

$$\boxed{d(\alpha) = h + \frac{2 - \sin \alpha}{\cos \alpha}}$$

Pour que cette longueur soit minimale, il faut que $d'(\alpha) = 0$ :

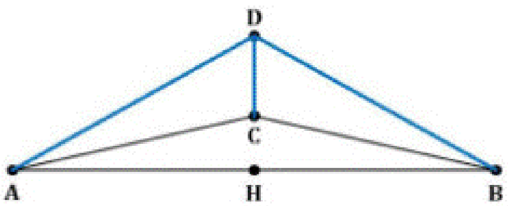
$$d'(\alpha) = \frac{2 \sin \alpha - 1}{\cos^2 \alpha} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sin \alpha = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\alpha = 30°}$$

**Réseau pour $\boldsymbol{h} = 8$ km**

La formule donne, avec $h = 8$ et $\alpha = 30°$ : $d = 8 + \sqrt{8} = 9{,}732$ km .

**Réseau pour $\boldsymbol{h} = 200$ m $= 0,2$ km**

Avec $\alpha = 30°$, le réseau est comme montré en bleu ci-contre. Sa longueur totale n'est *pas* donné par la formule trouvée (parce-que $h < \tan 30° \cong 0{,}577$). Elle est égale à




$d = \overline{\mathrm{AD}} + \overline{\mathrm{CD}} + \overline{\mathrm{BD}} = \frac{2}{\sqrt{3}} + \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - 0{,}2\right) + \frac{2}{\sqrt{3}} = 2{,}787$ km.

Le meilleur réseau dans ce cas-ci est celui où D est confondu avec C et où il n'y a que deux routes AC et BC. Sa longueur totale est de $= 2\sqrt{1^2 + 0{,}2^2} = 2{,}040$ km .

1 novembre 16

# EXTRI432 – FACSA, ULG, Liège, juillet 2015.

Vérifier l'identité suivante

$$\frac{2}{\cos a} = \tan\left(45° - \frac{\alpha}{2}\right) + \cot\left(45° - \frac{\alpha}{2}\right)$$

---

**Solution proposée par Jan Frans Broeckx**

**Notation :** Nous utiliserons dans la suite *tan* et *cot* au lieu de *tg* et *cotg*.

**CE :** ① $\cos\alpha \neq 0 \quad\Leftrightarrow\quad \alpha \neq 90° + k.180°$

② $45° - \frac{\alpha}{2} \neq 90° + k.180° \quad\Leftrightarrow\quad \frac{\alpha}{2} \neq -45° - k.180° \quad\Leftrightarrow\quad \alpha \neq -90° + k.360°$

③ $45° - \frac{\alpha}{2} \neq k.180° \quad\Leftrightarrow\quad \frac{\alpha}{2} \neq 45° - k.180° \quad\Leftrightarrow\quad \alpha \neq 90° + k.360°$

$\Rightarrow \boxed{\alpha \neq 90° + k.180° \quad (k \in \mathbb{Z})}$

$$\begin{aligned}
\tan\left(45° - \frac{\alpha}{2}\right) + \cot\left(45° - \frac{\alpha}{2}\right) &= \frac{\tan 45° - \tan\frac{\alpha}{2}}{1 + \tan 45° \tan\frac{\alpha}{2}} + \frac{1 + \tan 45° \tan\frac{\alpha}{2}}{\tan 45° - \tan\frac{\alpha}{2}} \\
&= \frac{1 - \tan\frac{\alpha}{2}}{1 + \tan\frac{\alpha}{2}} + \frac{1 + \tan\frac{\alpha}{2}}{1 - \tan\frac{\alpha}{2}} \\
&= \frac{\left(1 - \tan\frac{\alpha}{2}\right)^2 + \left(1 + \tan\frac{\alpha}{2}\right)^2}{1 - \tan^2\frac{\alpha}{2}} \\
&= 2.\frac{1 + \tan^2\frac{\alpha}{2}}{1 - \tan^2\frac{\alpha}{2}} \\
&= \frac{2}{\cos\alpha}
\end{aligned}$$

---

## EXTRI433 - FACSA, ULG, Liège, juillet 2015.

Résoudre l'équation suivante et représenter les solutions entre 0 et $2\pi$ sur le cercle trigonométrique

$$4\sin^3 x + 2\sin^2 x - 2\sin x = 1$$

---

**Solution proposée par Jean-François Egueur**

$$4\sin^3 x + 2\sin^2 x - 2\sin x = 1$$

$$\Leftrightarrow 2\sin^2 x(2\sin x + 1) - 2\sin x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (2\sin x + 1)(2\sin^2 x - 1) = 0$$

1er cas : $2\sin x + 1 = 0 \Rightarrow 2\sin x = -1 \Rightarrow \sin x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \sin x = \sin\frac{7\pi}{6}$

$$\begin{cases} x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \\ x = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi \end{cases} \qquad k \in \mathbb{Z}$$

2éme cas : $2\sin^2 x - 1 = 0 \Rightarrow (\sqrt{2}\sin x - 1)(\sqrt{2}\sin x + 1) = 0$

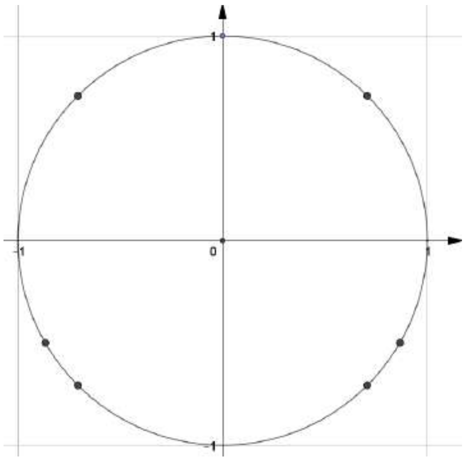
$a)$ $\sqrt{2}\sin x - 1 = 0 \Rightarrow \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin\frac{\pi}{4}$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \end{cases} \qquad k \in \mathbb{Z}$$

$b)$ $\sqrt{2}\sin x + 1 = 0 \Rightarrow \sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2} = \sin\frac{5\pi}{4}$

$$\begin{cases} x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi \\ x = \frac{7\pi}{4} + 2k\pi \end{cases} \qquad k \in \mathbb{Z}$$

$$S : \left\{ \frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{3\pi}{4} + 2k\pi, \frac{7\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5\pi}{4} + 2k\pi, \frac{7\pi}{4} + 2k\pi, \frac{11\pi}{6} + 2k\pi \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\}$$



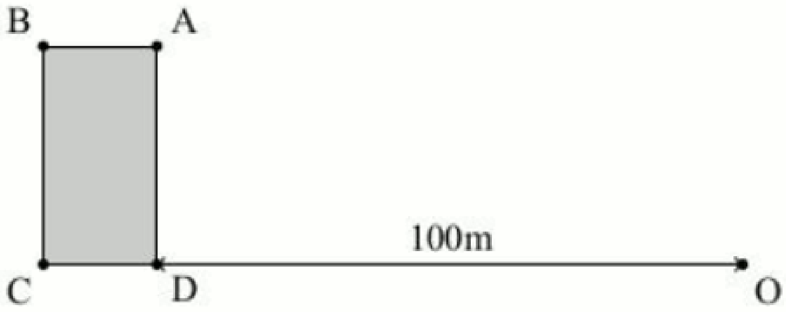

25 octobre 2016. Modifié le 30 janvier 2018 (Jean-François Egueur.

# EXTRI434 - FACSA, ULG, Liège, juillet 2015.

Un observateur situé en O se trouve à une distance de 100 m d'un bâtiment ABCD de forme rectangulaire dont la base CD mesure 20 m. Il mesure l'angle $\widehat{AOB}$ qui vaut 2°.

Calculer la hauteur AD du bâtiment ainsi que l'aire du triangle AOB, sachant que la hauteur du bâtiment ne peut dépasser 300 m.

Les calculs seront effectués avec 4 chiffres significatifs.

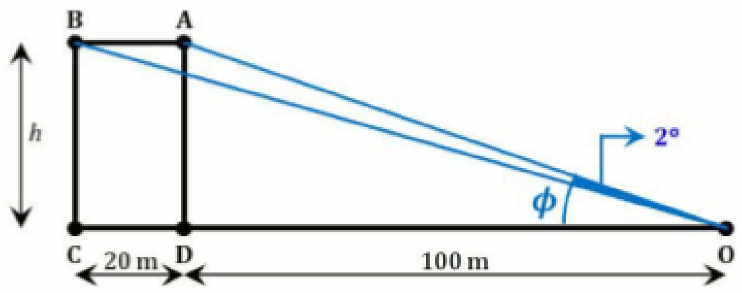



---

**Solution proposée par Jan Frans Broeckx**

En se référant à la figure ci-contre, appelons :

$$h = \overline{AD} = \overline{BC}$$
$$\phi = \widehat{BOC}$$




On a que :

$$\frac{h}{120} = \tan\phi$$
$$\frac{h}{100} = \tan(\phi + 2°)$$

Appelons encore :

$$c = \tan 2° \cong 0{,}034921$$

Alors :

$$\frac{h}{100} = \tan(\phi + 2°) = \frac{\tan\phi + \tan 2°}{1 - \tan\phi \,.\tan 2°} = \frac{\frac{h}{120} + c}{1 - c.\frac{h}{120}} = \frac{h + 120.c}{120 - c.h}$$

En faisant le produit des extrêmes et en réarrangeant, on trouve l'équation suivante du second degré :

$$\boxed{c.\,h^2 - 20\,h + 12000\,c = 0}$$

dont les solutions se calculent comme suit :

$$\Delta \quad = \quad 400 - 48000.\,c^2 \quad = \quad 400(1 - 120.\,c^2)$$
$$\sqrt{\Delta} \quad = \quad 20\sqrt{1 - 120.\,c^2} \quad \cong \quad 18{,}4788$$
$$h_{1,2} = \frac{1}{2c}\left(20 \pm \sqrt{\Delta}\right) = \begin{cases} h_1 = 550{,}9 \text{ m} & \text{(à rejeter puisque supérieur à 300 m)} \\ h_2 = 21{,}78 \text{ m} \end{cases}$$

La hauteur du bâtiment est donc de $\boldsymbol{h} \cong \mathbf{21{,}78\ m}$.

Pour l'aire du triangle AOB on a alors que :

$$\mathrm{A_{AOB}} = \frac{1}{2}\,\overline{\mathrm{AO}}.\,\overline{\mathrm{BO}}.\sin 2° = \frac{1}{2}\,\sqrt{100^2 + \mathrm{h}^2}.\sqrt{120^2 + \mathrm{h}^2}.\sin 2° \quad \cong \mathbf{217{,}8}\ \boldsymbol{m^2}.$$

25 octobre 2016

# EXTRI435 – FACSA, ULG, Liège, septembre 2015.

**Résoudre l'équation suivante**

$$\cos nx + \cos(n-2)x = \cos x$$

**Tracer les solutions entre 0 et $2\pi$ sur le cercle trigonométrique dans le cas particulier où $n = 5$.**

---

**Solution proposée par Jan Frans Broeckx**

Nous supposons que dans l'énoncé, le paramètre $n$ représente un entier, et comme le cosinus est une fonction paire, nous supposons $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$.

**a) Solution générale**

Par une des formules de Simpson, l'équation se transforme alors comme suit :

$$\begin{aligned} \cos nx + \cos(n-2)x = \cos x &\Leftrightarrow 2\cos(n-1)x\cos x = \cos \\ &\Leftrightarrow \cos x\,.(2\cos(n-1)x - 1) = 0 \end{aligned}$$

Les solutions de cette dernière équation sont :

1) $\cos x = 0$

$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

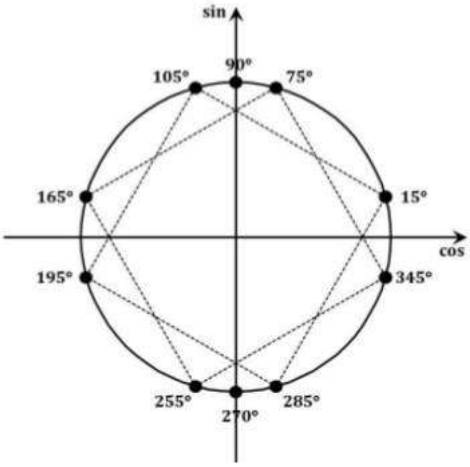
Si $n = 1$, ce sont les seules solutions de l'équation. Sinon, il existe une deuxième famille de solutions :

2) $\cos(n-1)x = \frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow \quad (n-1)x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm\frac{\pi}{3(n-1)} + k\frac{2\pi}{3(n-1)} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

**b) Dans le cas particulier où $n = 5$**

$$\begin{aligned} S &= \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \,\middle\|\, k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{+\frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{2} \,\middle\|\, k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{2} \,\middle\|\, k \in \mathbb{Z}\right\} \\ &= \{90° + k\,180° \| k \in \mathbb{Z}\} \cup \{15° + k\,90° \| k \in \mathbb{Z}\} \cup \{-15° + k\,90° \| k \in \mathbb{Z}\} \end{aligned}$$



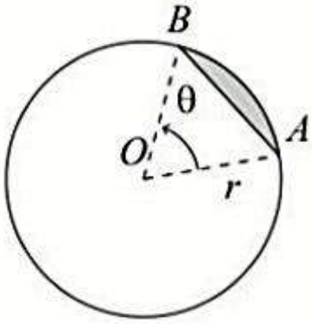

---

25 octobre 2016

## EXTRI436 – FACSA, ULG, Liège, septembre 2015.

Soit la surface S (surface grisée sur la figure ci-contre) délimitée par la corde AB et l'arc de cercle qu'elle intercepte.

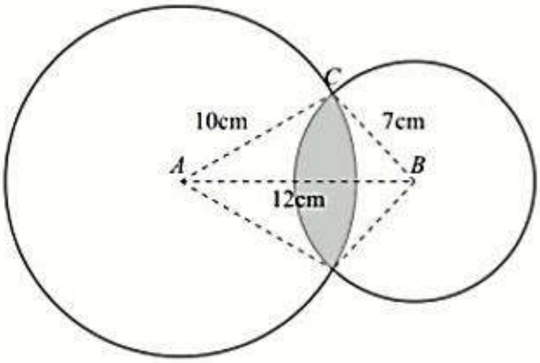
$r$ désigne le rayon du cercle, et $\theta$ représente l'angle d'ouverture de l'arc intercepté exprimé en radians.




a) Démontrer que l'aire de cette surface vaut

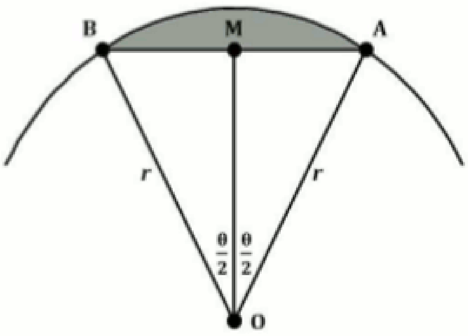
$$S = \frac{1}{2} r^2 (\theta - \sin\theta)$$

b) Sur base de la formule donnée au point précédent, calculer la surface de l'intersection de deux cercles respectivement de rayons 10 cm et 7 cm dont les centres A et B sont distants de 12 cm (voir la figure ci-dessous).




**Solution proposée par Jan Frans Broeckx**

**a) Calcul de la surface S**




$$
\begin{aligned}
S &= (\text{aire secteur circulaire OAB}) - (\text{aire triangle OAB}) \\
&= \frac{\theta}{2\pi}\,(\text{aire cercle rayon } r) - 2\,(\text{aire triangle OAM}) \\
&= \frac{\theta}{2\pi}\,(\pi r^2) - 2\,\left(\tfrac{1}{2}\overline{\text{MA}}.\overline{\text{OM}}\right) \\
&= \frac{1}{2}\theta r^2 - \left(r.\sin\frac{\theta}{2}\right)\left(r.\cos\frac{\theta}{2}\right) \\
&= \frac{1}{2}\theta r^2 - \frac{1}{2}r^2\sin\theta \\
S &= \frac{1}{2}r^2(\theta - \sin\theta) \qquad (*)
\end{aligned}
$$

**b) Surface de l'intersection des deux cercles**

En se référent à la deuxième figure de l'énoncé, on voit que la surface S de l'intersection du cercle $\mathcal{C}_1(A; r_1)$ avec le cercle $\mathcal{C}_2(B; r_2)$ est la somme de surfaces données par l'expression $(*)$ du point précédent :

$$S = S_1 + S_2 = \frac{1}{2}r_1{}^2(\theta_1 - \sin\theta_1) + \frac{1}{2}r_2{}^2(\theta_2 - \sin\theta_2) \qquad (**)$$

avec $r_1 = 10\text{ cm}$ et $\dfrac{\theta_1}{2} = \widehat{CAB}$

$r_2 = 7\text{ cm}$ et $\dfrac{\theta_2}{2} = \widehat{CBA}$

De la règle aux cosinus (théorème d'Al Kashi) on trouve :

$$\theta_1 = 2.\widehat{CAB} = 2\arccos\left(\frac{\overline{AC}^2 + \overline{AB}^2 - \overline{BC}^2}{2.\overline{AC}.\overline{AB}}\right) = 2\arccos\left(\frac{10^2 + 12^2 - 7^2}{2.10.12}\right) = 1{,}2447\text{ rad}$$

$$\theta_2 = 2.\widehat{CBA} = 2\arccos\left(\frac{\overline{BC}^2 + \overline{BA}^2 - \overline{AC}^2}{2.\overline{BC}.\overline{BA}}\right) = 2\arccos\left(\frac{7^2 + 12^2 - 10^2}{2.7.12}\right) = 1{,}9683\text{ rad}$$

En remplaçant ces valeurs dans la formule $(**)$ nous trouvons :

$\mathbf{S} = S_1 + S_2 = 14{,}871\text{ cm}^2 + 25{,}634\text{ cm}^2 = \mathbf{40,505\ cm^2}$

# EXTRI437 – FACSA, ULG, Liège, juillet 2016.

**Si A, B et C désignent les angles d'un triangle et $a$, $b$ et $c$ les longueurs des côtés opposés à ces angles, montrez que**

$$\frac{a-b}{c}=\frac{\sin\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{C}{2}}$$

---

## Solution proposée par Jan Frans Broeckx

Dans un triangle non dégénéré, $c \neq 0$ et $\cos\frac{C}{2} \neq 0$ puisque $0 < C < \pi$. Il n'y a donc pas de conditions d'existence pour cette relation.

De la règle aux sinus,

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2r \qquad (r = \text{rayon du cercle circonscrit})$$

on tire successivement :

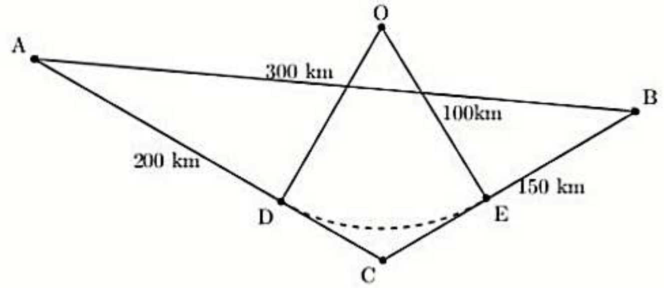
$$\begin{aligned}
\frac{a-b}{c} &= \frac{2r(\sin A-\sin B)}{2r\sin C} = \frac{\sin A-\sin B}{\sin C}\\
&= \frac{2\sin\frac{A-B}{2}\cos\frac{A+B}{2}}{2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}} = \frac{\sin\frac{A-B}{2}\cos\frac{(\pi-C)}{2}}{\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}} \qquad (A+B+C=\pi)\\
&= \frac{\sin\frac{A-B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}} = \frac{\sin\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{C}{2}} \qquad \left(\sin\frac{C}{2}\neq 0 \text{ puisque } C\neq 0\right)
\end{aligned}$$

---

10 janvier 2017

# EXTRI438 – FACSA, ULG, Liège, juillet 2016.

Deux lignes de chemin de fer relient en ligne droite les villes A et B distantes de 300 km par l'intermédiaire d'une ville C. Les villes A et B se trouvent respectivement à une distance de 200 km et 150 km de la ville C. Pour diminuer le temps de trajet entre les villes A et B, on désire éviter par la ville C et raccorder les deux lignes de chemin de fer par une courbe en arc de cercle de 100 km de rayon tangente aux droites AC et CB au points D et E, comme représenté sur la figure ci-dessous.




Quelle est la longueur de la nouvelle ligne à construire (arc DE) ? Quelle sera la distance (ADEB) à parcourir pour rejoindre les villes A et B par cette nouvelle ligne ? Calculer la surface DCE du terrain situé entre l'ancienne ligne et la nouvelle ligne.

---

### Solution proposée par Jan Frans Broeckx

**a) Longueur de l'arc DE**

De la règle aux cosinus (théorème d'Al Kashi) dans le triangle ABC on tire :

$$\cos \hat{C} = \frac{\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 - \overline{AB}^2}{2\,\overline{AC}\,\overline{BC}} = \frac{200^2 + 150^2 - 300^2}{2.200.150} = -\frac{275}{600} \cong -0{,}45833 \qquad \Rightarrow \qquad \hat{C} = 117{,}28°$$

Dans le quadrilatère ODCE, les angles $\hat{D}$ et $\hat{E}$ sont droits, et donc $\hat{O}$ est le supplémentaire de $\hat{C}$ :

$$\hat{O} \equiv \widehat{DOE} = 180° - 117{,}28° = 62{,}72°$$

et la longueur de l'arc DE est égal au produit du rayon du cercle par l'angle $\hat{O}$ en radians :

$$\text{longueur arc DE} = 100\,.62{,}72\,.\frac{\pi}{180} = \mathbf{109{,}47\ km}$$

**b) Distance totale ADEB selon la nouvelle ligne**

Les triangles OCD et OCE sont isométriques, parce-qu'ils sont tous les deux rectangles, ils ont l'hypoténuse en commun, et deux côtés rectangles $\overline{OD}$ et $\overline{OE}$ égaux. Par conséquent :

$$\widehat{COD} = \widehat{COE} = \frac{1}{2}\widehat{DOE} = \frac{1}{2}.\,62{,}72° = 31{,}36°\ \text{, et}$$

$$\overline{DC} = \overline{EC} = \overline{OD}.\tan\widehat{COD} = 100.\tan 31{,}36° = 60{,}94\ \text{km}$$

On trouve donc pour la distance totale ADEB selon la nouvelle ligne la valeur de

$$(200 - 60{,}94) + 109{,}47 + (150 - 60{,}94) = \mathbf{337{,}59\ km}$$

**c) Aire de la surface DCE entre l'ancienne ligne et la nouvelle**

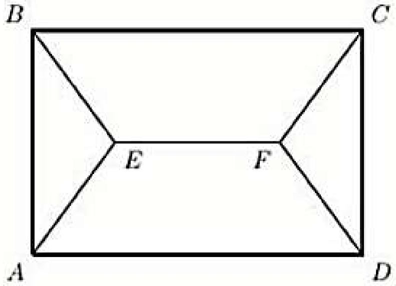
$$\begin{aligned}
\text{Aire DCE} &= \text{(aire quadrilatère ODCE)} - \text{(aire secteur circulaire ODE)} \\
&= 2\ \text{(aire triangle rectangle ODC)} - \frac{62{,}72}{360}\ \text{(aire cercle de rayon 100 km)} \\
&= 2\left(\frac{1}{2}\,\overline{OD}\,\overline{OC}\right) - \frac{62{,}72}{360}\,(\pi\,100^2) \\
&= 6694\ \text{km}^2 - 5473\ \text{km}^2 = \mathbf{621\ km^2}
\end{aligned}$$

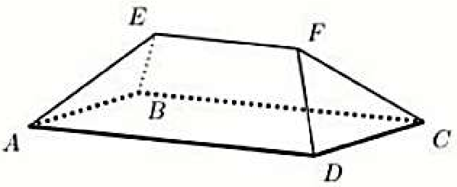
---

10 janvier 2017

# EXTRI439 – FACSA, ULG, Liège, septembre 2016.

**On souhaite couvrir la toiture à quatre pans représentée en vue de haut et en perspective sur la figure suivante. La base de la toiture est rectangulaire, de côtés AB = 8 m et BC = 12 m. La toiture est symétrique, c'est-à-dire que les pans ABE et CDF sont isométriques, de même que les pans BCFE et ADFE. En mesurant les arêtes principales de la toiture, on obtient AE = 6 m, EF = 6 m et FD = 6 m.**




**(a) Calculer la surface totale de la toiture à couvrir.**

**(b) Calculer la hauteur de l'arête EF par rapport à la base rectangulaire.**

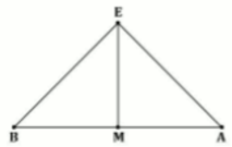
**(c) On souhaite poser des panneaux photovoltaïques sur la toiture. Pour ce faire, une inclinaison entre 30° et 40° est souhaitée. Déterminer quel pan de la toiture est le plus approprié pour acceuillir les panneaux.**

---

## Solution proposée par Jan Frans Broeckx

**a) Superficie totale de la toiture**

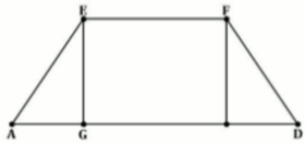
Les pans triangulaires :




$$\left.\begin{array}{l}\overline{AM} = 4 \text{ m} \\ \overline{AE} = 6 \text{ m}\end{array}\right\} \Rightarrow \overline{ME} = \sqrt{6^2 - 4^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5} \text{ m}$$

$$\mathcal{A}_{ABE} = \mathcal{A}_{CDF} = \frac{1}{2}\,\overline{AB}\,\overline{ME} = \frac{1}{2}.8.2\sqrt{5} = 8\sqrt{5} \text{ m}^2$$

Les pans trapézoïdaux :




$$\left.\begin{array}{l}\overline{AG} = 3 \text{ m} \\ \overline{AE} = 6 \text{ m}\end{array}\right\} \Rightarrow \overline{GE} = \sqrt{6^2 - 3^2} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3} \text{ m}$$

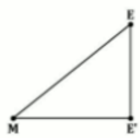
$$\mathcal{A}_{ADFE} = \mathcal{A}_{BCFE} = \frac{1}{2}\,(\overline{AD} + \overline{EF})\,\overline{GE} = \frac{1}{2}.18.3\sqrt{3} = 27\sqrt{3} \text{ m}^2$$

La superficie totale :

$$\mathcal{A}_{Totale} = 2\mathcal{A}_{ABE} + 2\mathcal{A}_{ADFE} = \left(16\sqrt{5} + 54\sqrt{3}\right) \text{m}^2 \cong \mathbf{129{,}3\ m^2}$$

**b) Hauteur de l'arête centrale par rapport à la base**

Soit E' la projection orthogonale de E sur la base ABCD, et soit toujours M le milieu de AB. Alors :




$$\left.\begin{array}{l}\overline{ME'} = \overline{AG} = 3 \text{ m} \\ \overline{ME} = 2\sqrt{5} \text{ m}\end{array}\right\} \Rightarrow h = \overline{EE'} = \sqrt{20 - 9} = \mathbf{\sqrt{11}\ m} \cong \mathbf{3{,}317\ m}$$

**c) Inclinaison des pans du toit par rapport à l'horizontale**

Inclinaison $\alpha$ des pans triangulaires :

$$\alpha = \arctan\frac{h}{\overline{ME'}} = \arctan\frac{\sqrt{11}}{3} \cong 47{,}9°$$

Inclinaison $\beta$ des pans trapézoïdaux :

$$\beta = \arctan\frac{h}{\overline{GE'}} = \arctan\frac{\sqrt{11}}{5} \cong 39{,}7°$$

Etant donné que l'inclinaison souhaitée est entre 30° et 40°, les pans trapézoïdaux conviennent les mieux à l'installation des panneaux solaires.

---

10 janvier 2017