Exercices résolus de mathématiques.

Trigonométrie
Calcul numérique

TRI 46

EXTRI460-EXTRI469

http://matheux.ovh/Accueil.html

Jacques Collot
Jan Frans Broeckx – Nicole Berckmans
Fabienne Zoetard

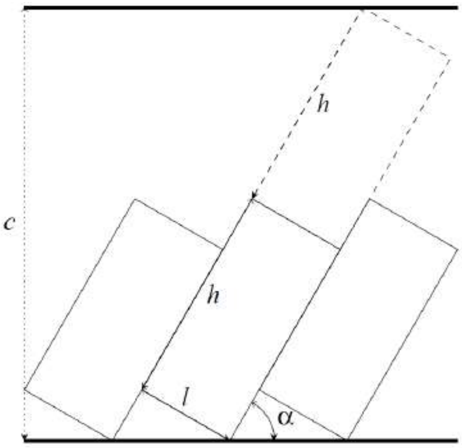
Septembre 2017

EXTRI460 – FACSA, ULiège, Liège, septembre 2017

On désire installer des emplacements de stationnement de voitures dan une rue de largeur c. Chaque emplacement doit posséder une largeur l de 2.3 m, une profondeur h de 5 m et doit comprendre un surface de dégagement au moins égale à la surface de l'emplacement de stationnement pour permettre la sortie du véhicule. La situation est représentée à la figure ci-dessous où l représente la largeur de l'emplacement, h sa profondeur et α l'angle d'inclinaison de l'emplacement avec le bord de la route. La surface de dégagement est représentée en pointillé.

(a) Calculer la largeur maximale c de la route permettant d'installer les emplacements de stationnement si l'angle d'inclinaison α est de 60°.

(b) Calculer la valeur maximale de l'angle d'inclinaison α permettant d'installation des emplacements de stationnement si la largeur de la route c vaut 8.7 m.



---

a. Il est immédiat que :

$$c = l\cos\alpha + 2h\sin\alpha = 2.3\cos 60° + 2\times 5\times\sin 60° = \boxed{9.81\text{ m}}$$

b. Il faut déterminer l'angle α tel que

$$c = l\cos\alpha + 2h\sin\alpha \Rightarrow 8.7 = 2.3\cos\alpha + 10\sin\alpha \Rightarrow 0.87 = 0.23\cos\alpha + \sin\alpha$$

Pour résoudre cette équation, posons $\tan\gamma = 0.23 \Rightarrow \gamma = 12.953° \Rightarrow \cos\gamma = 0.9746$

L'équation devient :

$$\cos\alpha\tan\gamma + \sin\alpha = 0.87 \Rightarrow \cos\alpha.\frac{\sin\gamma}{\cos\gamma} + \sin\alpha = 0.87$$

$$\Rightarrow \quad \cos\alpha\sin\gamma + \sin\alpha\cos\gamma = 0.87\cos\gamma \Rightarrow \sin(\alpha+\gamma) = 0.87\times 0.9746 = 0.84786$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} \alpha+\gamma = 57.980° & \Rightarrow \alpha = 57.980° - 12.953° = \boxed{45.027°} \\ \alpha+\gamma = 180° - 57.98° & \Rightarrow \alpha = 180° - 57.98° - 12.953° = 109.0.67° > 90° \text{ à rejeter.} \end{cases}$$

---

10 septembre 2018

EXTRI461 – FACSA, ULiège, Liège, juillet 2018.
EPB, ULB, Bruxelles, juillet 2018.
EPL, UCL, LLN, juillet 2018.
POLYTECH, UMons, Mons, juillet 2018.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation homogène

$$\sin^3 x + 2\cos^3 x = 3\sin^2 x\cos x$$

et représenter les solutions sur le cercle trigonométrique. Les solutions trouvées ne sont pas toutes exprimables sous la forme d'angles remarquables. Il n'empêche qu'il est possible de les représenter de façon précise que le cercle trigonométrique sacahnt que $\sqrt{3} \simeq 1.732$

Solution proposée par Nicole Berckmans

C'est une équation homogène de degré 3. On divise par $\cos^3 x$ car il n'y a pas de mise en évidence possible.

$$\tan^3 x + 2 - 3\tan^2 x = 0$$

On pose $t = \tan x \Rightarrow t^3 - 3t^2 + 2 = 0$

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 1 & -3 & 0 & 2 \\ \hline 1 & & 1 & -2 & -2 \\ \hline & 1 & -2 & -2 & 0 \end{array} \Rightarrow (t-1)\left(t^2 - 2t - 2\right) = 0$$

Le deuxième facteur a pour racines : $t = 1 \pm \sqrt{3}$

<u>Conclusions</u>

- $t = 1 \Rightarrow \tan x = 1 \Rightarrow \boxed{x = 45° + k.180°}$
- $t = 1 - \sqrt{3} \Rightarrow \tan x = 1 - \sqrt{3} \Rightarrow \boxed{x = \arctan\left(1 - \sqrt{3}\right) + k.180°}$
- $t = 1 + \sqrt{3} \Rightarrow \tan x = 1 + \sqrt{3} \Rightarrow \boxed{x = \arctan\left(1 + \sqrt{3}\right) + k.180°}$

La représentation sur le cercle trigonométrique est donnée plus loin.

Nous reprenons la solution proposée par l'université : Prof. P. Dewallef et Prof. Q. Louveaux :
https://www.facsa.uliege.be/cms/c_3232092/fr/facsa-questions-des-editions-precedentes

Nous sommes en présence d'une équation trigonométrique homogène d'ordre 3. La technique la plus efficace pour résoudre ce genre d'équation est de diviser les deux membres de l'équation par $\cos^3 x$. On vérifie évidemment que $\cos x = 0$ n'est pas solution de l'équation On a donc :

$$\tan^3 x - 3\tan^2 x + 2 = 0.$$

On transforme l'équation trigonométrique en une équation algébrique. On pose $y = \tan x$ et on écrit :

$$y^3 - 3y^2 + 2 = 0.$$

On trouve finalement :

$$(y-1)(y^2 - 2y - 2) = 0.$$

dont les solutions sont

$$y_{1,2,3} = \begin{cases} 1 \\ 1+\sqrt{3} \\ 1-\sqrt{3} \end{cases}.$$

Les solutions de l'équation trigonométrique sont donc :

$$S = \left\{\frac{\pi}{4} + k\pi\right\} \cup \left\{\arctan(1+\sqrt{3}) + k\pi\right\} \cup \left\{\arctan(1-\sqrt{3}) + k\pi\right\}, k \in \mathbb{Z}.$$

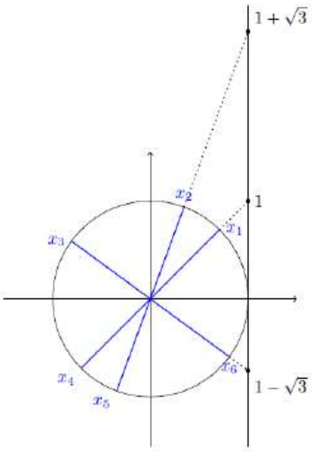


FIGURE 1 – Les 6 solutions $x_1, \ldots, x_6$ de l'équation sur le cercle trigonométrique

Solution B

On peut aussi diviser l'équation de départ par $\sin^3 x$ et vérifier que $\sin x = 0$ n'est pas solution. On obtient

$$2\cot^3 x - 3\cot^2 x + 1 = 0.$$

En posant $y = \cot x$, on a

$$2y^3 - 3y + 1 = 0$$

qui a comme solutions

$$y_{1,2,3} = \begin{cases} 1 \\ \frac{\sqrt{3}-1}{2} \\ \frac{-\sqrt{3}-1}{2} \end{cases}.$$

qui sont les inverses des solutions en tangente $(1/(1+\sqrt{3}) = 1/2(\sqrt{3}-1))$.

Solution C

Si on pose

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad \text{et} \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}$$

on trouve

$$(2t)^3 + 2(1-t^2)^3 = 3(2t)^2(1-t^2)$$

ou encore

$$-2t^6 + 18t^4 + 8t^3 - 18t^2 + 2 = 0.$$

qui donne les 6 solutions sur le cercle.

EXTRI462 – FACSA, ULiège, Liège, juillet 2018.

Si A, B et C sont les mesures des angles d'un triangle quelconque non dégénéré, montrer que :

$$\sin^2 A + \sin^2 B + \cos^2 C = 1 + 2\sin A \sin B \cos C$$

Nous reprenons la solution proposée par l'université : Prof. P. Dewallef et Prof. Q. Louveaux :
https://www.facsa.uliege.be/cms/c_3232092/fr/facsa-questions-des-editions-precedentes

Solution

Utilisons tout d'abord la formule de Carnot $\cos 2a = 1 - 2\sin^2 a$ sur les deux premiers termes du membre de gauche :

$$\begin{aligned}
&\sin^2 A + \sin^2 B + \cos^2 C = 1 + 2\sin A \sin B \cos C \\
&\Leftrightarrow \frac{1}{2} - \frac{\cos 2A}{2} + \frac{1}{2} - \frac{\cos 2B}{2} + \cos^2 C = 1 + 2\sin A \sin B \cos C \\
&\Leftrightarrow 1 - \frac{\cos 2A + \cos 2B}{2} + \cos^2 C = 1 + 2\sin A \sin B \cos C
\end{aligned}$$

En faisant usage de la formule de factorisation $\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$ et en notant que $\pi = A + B + C$, il vient :

$$\begin{aligned}
&1 - \frac{\cos 2A + \cos 2B}{2} + \cos^2 C = 1 + 2\sin A \sin B \cos C \\
&\Leftrightarrow 1 - \cos(A+B)\cos(A-B) + \cos^2(A+B) = 1 + 2\sin A \sin B \cos C \\
&\Leftrightarrow -\cos(A+B)\left[\cos(A-B) - \cos(A+B)\right] = 2\sin A \sin B \cos C \\
&\Leftrightarrow -\cos(A+B)\left[-2\sin\frac{A-B+A+B}{2}\ \sin\frac{A-B-A-B}{2}\right] = 2\sin A \sin B \cos C \\
&\Leftrightarrow -\cos(\pi - C)\left[-2\sin\frac{2A}{2}\ \sin\frac{-2B}{2}\right] = 2\sin A \sin B \cos C \\
&\Leftrightarrow 2\cos C \sin A\ \sin B = 2\sin A \sin B \cos C
\end{aligned}$$

Ce qui démontre l'identité.

---

10 septembre 2018

EXTRI463 – FACSA, ULiège, Liège, juillet 2018.

Dans le cas d'un quadrilatère quelconque plan, la connaissance de la longueur des quatre côtés et d'un diagonale suffit pour déterminer sa surface.

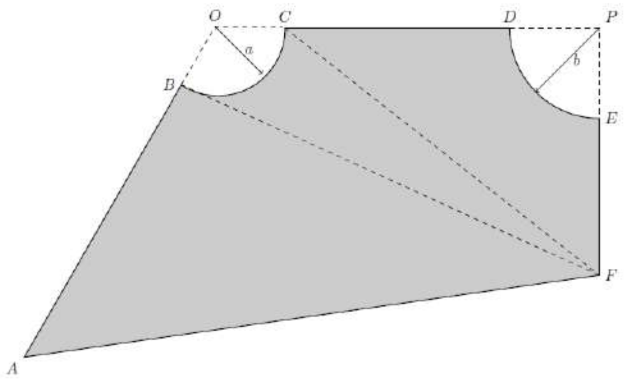
Cependant, on désire ici carreler une pièce $ABCDEF$ dont la forme est celle représentée par la zone grisée de la figure ci-dessous. Les courbes BC et DE sont des arcs de cercle de centre O et P et de rayon a et b respectivement. Les segments rectilignes AB, CD, EF et AF mesurent respectivement 7 m, 5 m, 3.5 m et 12.64 m. Les deux segments BF et CF mesurent 10.11 m et 8.90 m.

De plus l'angles $\widehat{CPF}$ est droit. On demande

a. Déterminer le rayon b de l'arc DE

b. Déterminer le rayon a de l'arc BC.

c. Calculer l'aire intérieur de la pièce représentée par la surface grisée $ABCDEF$.



Nous reprenons la solution proposée par l'université : Prof. P. Dewallef et Prof. Q. Louveaux :
https://www.facsa.uliege.be/cms/c_3232092/fr/facsa-questions-des-editions-precedentes

Solution

(a) On travaille dans le triangle rectangle CPF. Si on y exprime le théorème de Pythagore , il vient

$$(|CD|+b)^2+(|EF|+b)^2=|CF|^2.\boxed{\text{A}}$$

En développant l'équation et en remplaçant par les valeurs connues, on a

$$\begin{aligned} b^2+10b+25+b^2+7b+12.25 &= 79.21 \\ 2b^2+17b-41.96 &= 0.\boxed{\text{B}} \end{aligned}$$

On calcule le discriminant $\Delta = 17^2+8\cdot 41.96 = 624.68$.
On a donc les deux solutions

$$b=\frac{-17\pm\sqrt{624.68}}{4}\approx 1.9984\ m,\boxed{\text{C}}$$

la solution négative étant à rejeter. $\boxed{\text{D}}$

(b) On calcule d'abord l'angle $\alpha := \widehat{BAF}$ en utilisant Pythagore généralisé (Al-Kashi). On a

$$|BF|^2=|AB|^2+|AF|^2-2\cdot|AB||AF|\cos\alpha\boxed{\text{E}}$$

On a donc

$$\cos\alpha=\frac{|AB|^2+|AF|^2-|BF|^2}{2\cdot|AB||AF|}\approx 0.6022,$$

ce qui nous donne une valeur de l'angle $\widehat{BAF}$ de 0.9246 radians ou 52.98 degrés.

Pour trouver a, on calcule la diagonale $|OF|$ de deux façons, à savoir, d'une part dans le triangle rectangle OPF, et d'autre part dans le triangle OAF. Dans le triangle OPF, on a

$$|OF|^2=(a+|CP|)^2+|PF|^2. \tag{1}$$

Dans le triangle OAF, on a

$$|OF|^2=(|AB|+a)^2+|AF|^2-2\cdot(|AB|+a)|AF|\cos\alpha \tag{2}$$

. En égalisant (1) et (2), on obtient

$$(a+|CP|)^2+|PF|^2=(|AB|+a)^2+|AF|^2-2\cdot(|AB|+a)|AF|\cos\alpha\boxed{\text{F}}$$

qui, en développant (les a^2 se simplifient), devient

$$a(2\cdot|AB|-2\cdot|AF|\cos\alpha-2\cdot|CP|)=|PF|^2-|AF|^2+2\cdot|AB||AF|\cos\alpha.$$

En remplaçant par les valeurs connues, on trouve

$$a\approx 1.5099\ m.\boxed{\text{G}}$$

(c) Il nous reste à calculer les aires des triangles OAF et OPF, les additionner et soustraire les aires des sections circulaires COB et DPE.

Nous calculons tout d'abord l'aire du triangle rectangle OPF qui vaut

$$\frac{1}{2}(a+b+|CD|)(b+|EF|) \approx 23.391\ m^2.$$

Le triangle OAF est quelconque et son aire se calcule comme

$$\frac{1}{2}(|AB|+a)|AF|\sin\alpha \approx 42.939\ m^2$$

Pour les sections circulaires, il convient de calculer leurs angles. On sait que $\widehat{DPE}$ vaut 90 degrés. L'aire de la section circulaire vaut donc

$$\frac{\pi b^2}{4} \approx 3.137\ m^2.$$

La valeur de l'angle $\widehat{BOC}$ peut être décomposé en la somme de l'angle $\widehat{BOF}$ et $\widehat{DOF}$. L'angle $\widehat{BOF}$ peut être calculé en appliquant la règle des sinus dans le triangle AOF. On a

$$\sin\widehat{BOF} = |AF|\frac{\sin\alpha}{|OF|},$$

où $|OF|$ peut être calculé grâce à Pythagore,

$$|OF| = \sqrt{(a+b+|CD|)^2+(b+|EF|)^2} \approx 10.13\ m.$$

Dès lors $\sin\widehat{BOF} \approx 0.9962$ c'est-à-dire que $\widehat{BOF}$ mesure 84.98 degrés.
Par ailleurs, l'angle $\widehat{DOF}$ se trouve grâce au triangle rectangle POF,

$$\sin\widehat{POF} = \frac{b+|EF|}{|OF|} \approx 0.5428,$$

soit 32.87 degrés. L'aire de la section circulaire vaut donc

$$\pi a^2\frac{84.98+32.87}{360} \approx 2.344\ m^2.$$

Nous obtenons donc finalement que l'aire de la pièce vaut approximativement

$$23.391+42.939-2.344-3.137 \approx 60.85\ m^2.$$

EXTRI464 – FACSA, ULiège, Liège, septembre 2018.
EPB, ULB, Bruxelles, septembre 2018.
EPL, UCL, LLN, septembre 2018.
POLYTECH, UMons, Mons, septembre 2018.

Résoudre l'équation trigonométrique suivante :

$$\sin x - 2\sin 3x + \sin 5x = -\cos 2x + \cos 4x$$

et représenter les solutions appartenant à l'intervalle $[-\pi, +\pi[$ sur le cercle trigonométrique.

Nous reprenons la solution proposée par l'université : Prof. P. Dewallef et Prof. Q. Louveaux :
https://www.facsa.uliege.be/cms/c_3232092/fr/facsa-questions-des-editions-precedentes

Solution

En appliquant les formules de Simpson à $\sin(x) + \sin(5x)$ dans le membre de gauche et à tout le membre de droite, l'équation devient

$$2\sin(3x)\cos(2x) - 2\sin(3x) = -2\sin(3x)\sin x. \quad \boxed{\text{A}} \qquad (1)$$

En ramenant le membre de droite à gauche et en mettant $2\sin(3x)$ en évidence, (1) se réécrit

$$2\sin(3x)(\cos(2x) - 1 + \sin x) = 0. \quad \boxed{\text{B}} \qquad (2)$$

En utilisant la formule de Carnot $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2 x$, l'équation devient

$$\begin{aligned} 2\sin(3x)(1 - 2\sin^2 x - 1 + \sin x) &= 0 \\ 2\sin(3x)\sin(x)(1 - 2\sin x) &= 0. \quad \boxed{\text{C}} \qquad (3) \end{aligned}$$

Chaque facteur de (3) nous donne un ensemble de solutions. Nous avons donc

- $\sin(3x) = 0$ donnant $3x = k\pi$ soit $x = \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$, $\boxed{\text{D}}$
- $\sin x = 0$ donnant $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$, $\boxed{\text{E}}$
- $1 - \sin(2x) = 0$ soit $\sin x = \frac{1}{2}$ donnant $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ou $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$. $\boxed{\text{F}}$

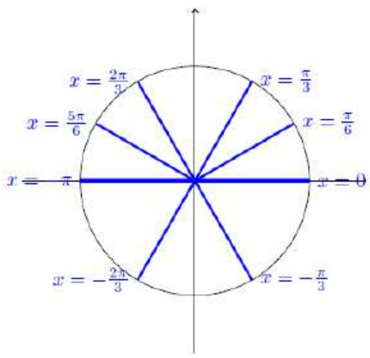


FIGURE 1 – Représentation des solutions sur le cercle trigonométrique

---

10 septembre 2018

EXTRI465 – FACSA, ULiège, Liège, septembre 2018.

Montrer que si A, B, C sont trois angles strictement positifs tels que $A+B+C=\dfrac{\pi}{2}$ alors

$$\tan A \tan B + \tan B \tan C + \tan A \tan C = 1$$

Nous reprenons la solution proposée par l'université : Prof. P. Dewallef et Prof. Q. Louveaux : **https://www.facsa.uliege.be/cms/c_3232092/fr/facsa-questions-des-editions-precedentes**

Solution

On commence par remplacer les fonctions $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$. On observe que, comme les angles sont strictement positifs, aucun de ceux-ci n'est égal à $\frac{\pi}{2}$ radians et, dès lors, toutes les fonctions tangentes sont définies. On peut donc réécrire l'équation comme

$$\frac{\sin A \sin B}{\cos A \cos B} + \frac{\sin B \sin C}{\cos B \cos C} + \frac{\sin A \sin C}{\cos A \cos C} = 1. \tag{4}$$

En mettant tout au même dénominateur, (4) peut s'écrire de manière équivalente comme

$$\frac{\sin A \sin B \cos C + \cos A \sin B \sin C + \sin A \cos B \sin C}{\cos A \cos B \cos C} = 1. \tag{5}$$

Comme tous les $\cos x \neq 0$ (x représentant A, B ou C) par hypothèse, on peut réécrire (5) de manière équivalente comme

$$\sin A \sin B \cos C + \cos A \sin B \sin C + \sin A \cos B \sin C - \cos A \cos B \cos C = 0. \tag{6}$$

Comme $A + B + C = \frac{\pi}{2}$, on en déduit que $\cos C = \sin(A+B)$ et $\sin C = \cos(A+B)$. En remplaçant dans (6), on obtient donc les formes équivalentes

$$\sin A \sin B \sin(A+B) + \cos A \sin B \cos(A+B) + \\ \sin A \cos B \cos(A+B) - \cos A \cos B \sin(A+B) = 0$$

et

$$\cos(A+B)(\cos A \sin B + \sin A \cos B) + \sin(A+B)(\sin A \sin B - \cos A \cos B) = 0. \tag{7}$$

On observe que $\cos A \sin B + \sin A \cos B = \sin(A+B)$ et que $\sin A \sin B - \cos A \cos B = -\cos(A+B)$. Dès lors, (7) s'écrit de manière équivalente comme

$$\cos(A+B)\sin(A+B) - \sin(A+B)\cos(A+B) = 0. \tag{8}$$

L'équation (8) étant toujours vérifiée et comme toutes les opérations effectuées ont maintenu les équivalences entre les expressions, on en déduit que l'égalité à prouver est bien toujours vérifiée.

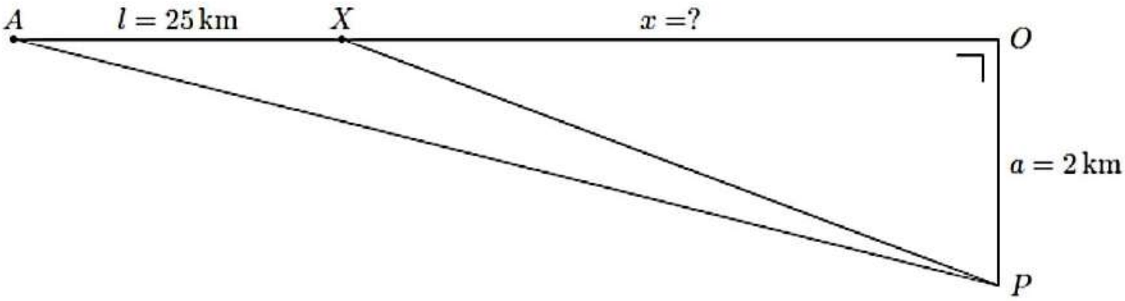
---

10 septembre 2018

EXTRI466 – FACSA, ULiège, Liège, septembre 2018

Un observateur situé en O dans un desert parfaitement plan est aligné avec deux éléments remarquables A et X séparés entre eux par une distance de $l = 25$ km. Cet observateur cherche à déterminer la distance qui le sépare du point X en se déplaçant en P d'une distance $a = 2$ km dans une direction dans la direction perpendiculaire à l'axe AXO.

De ce point de vue, il mesure l'angle $\widehat{XPA} = 1°6'0''$. Les angles seront calculés à la seconde près et les distances avec 5 chiffres significatifs.



a. Déterminer l'angle PAO.

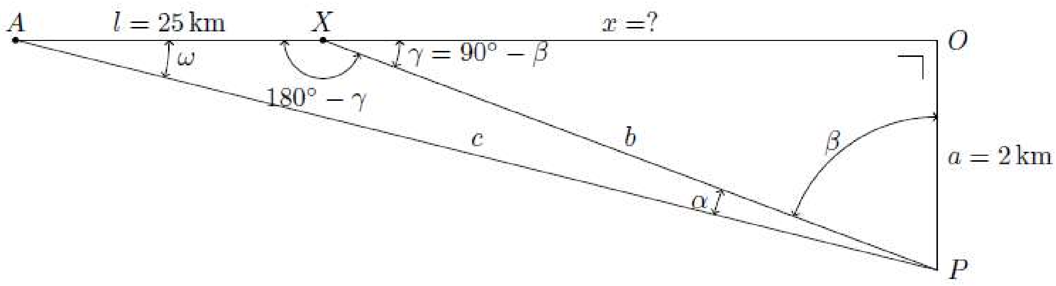
b. Calculer la distance x entre les points O et X.

c. Calculer la distance $\overline{PA}$.

Nous reprenons la solution proposée par l'université : Prof. P. Dewallef et Prof. Q. Louveaux : **https://www.facsa.uliege.be/cms/c_3232092/fr/facsa-questions-des-editions-precedentes**

Solution

a Pour des raisons de facilité, définissons les angles α, β, γ et ω comme sur la figure ci-dessous :



Dans le triangle AXP quelconque, la règle des sinus nous donne :

$$\frac{l}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\omega} = \frac{c}{\sin(180° - \gamma)} \rightarrow \sin\omega = \frac{b\sin\alpha}{l} \quad \boxed{\text{A}}$$

Ensuite, dans le triangle rectangle XOP :

$$\sin\gamma = \frac{a}{b} \;\rightarrow\; b = \frac{a}{\sin\gamma} \quad \boxed{\text{B}}$$

En substituant cette valeur de b dans l'expression précédente, il vient :

$$\sin\omega = \frac{a\sin\alpha}{l\sin\gamma} \quad \boxed{\text{C}}$$

En notant que la somme des angles intérieurs du triangle AXP vaut $180°$, il vient $\omega + 180° - \gamma + \alpha = 180° \;\rightarrow\; \gamma = \omega + \alpha$, nous obtenons l'équation suivante où seule la valeur de l'angle ω est inconnue :

$$\sin\omega = \frac{a\sin\alpha}{l\sin(\omega+\alpha)} \;\Leftrightarrow\; \sin\omega\sin(\omega+\alpha) = \frac{a\sin\alpha}{l} \quad \boxed{\text{D}}$$

Cette équation est résolue en utilisant la relation $2\sin a\sin b = \cos(a-b) - \cos(a+b)$ ce qui donne :

$$\frac{1}{2}\left(\cos(\omega+\alpha-\omega) - \cos(\omega+\alpha+\omega)\right) = \frac{a\sin\alpha}{l} \;\Leftrightarrow\; \cos(2\omega+\alpha) = \cos\alpha - \frac{2a\sin\alpha}{l} \quad \boxed{\text{E}}$$

Ce qui donne :

$$2\omega + \alpha = \pm 4.6248° + k360°$$

Ne retenant que la solution positive inférieure à $360°$, nous obtenons $\omega = 1.7624° = 1°45'44''$ $\boxed{\text{F}}$.

b Sachant que dans le triangle rectangle XOP :

$$\tan\gamma = \tan(\omega+\alpha) = \frac{a}{x} \;\rightarrow\; x = \frac{a}{\tan(\omega+\alpha)} = 40.000\,\text{km} \quad \boxed{\text{G}}$$

c En repartant de la relation des sinus dans le triangle AXP, nous avons :

$$c = \frac{l\sin(180° - \gamma)}{\sin\alpha} = \frac{l\sin(\omega+\alpha)}{\sin\alpha} = 65.031\,\text{km} \quad \boxed{\text{H}}$$

EXTRI467 – FACSA, ULiège, Liège, septembre 2018.

Démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$ et $\forall \theta \in \mathbb{R}$ tel que $\sin\theta \neq 0$, on a

$$\sin\theta + \sin 3\theta + \sin 5\theta + ... + \sin(2n+1)\theta = \frac{\sin^2(n+1)\theta}{\sin\theta}$$

---

1) Pour $n = 1$, on a sachant que $\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$

$$\sin\theta + \sin 3\theta = 4\sin\theta - 4\sin^3\theta = 4\sin\theta\left(1-\sin^2\theta\right) = \frac{4\sin^2\theta\cos^2\theta}{\sin\theta} = \frac{\sin^2 2\theta}{\sin\theta}$$

2) Supposons que la relation soit vraie pour n, et démontrons qu'elle est vraie pour $n+1$.

Pour n : $\quad \sin\theta + \sin 3\theta + \sin 5\theta + ... + \sin(2n+1)\theta = \dfrac{\sin^2(n+1)\theta}{\sin\theta}$

Pour $n+1$: $\sin\theta + \sin 3\theta + \sin 5\theta + ... + \sin(2n+1)\theta + \sin(2n+3)\theta = \dfrac{\sin^2(n+2)\theta}{\sin\theta}$

Autrement dit, il faut démontrer que :

$$\frac{\sin^2(n+1)\theta}{\sin\theta} + \sin(2n+3)\theta = \frac{\sin^2(n+2)\theta}{\sin\theta}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\sin^2(n+2)\theta}{\sin\theta} - \frac{\sin^2(n+1)\theta}{\sin\theta} = \sin(2n+3)\theta$$

$$\Rightarrow \quad \sin^2(n+2)\theta - \sin^2(n+1)\theta = \sin(2n+3)\theta.\sin\theta$$

$$\Rightarrow \quad \left(\sin(n+2)\theta + \sin(n+1)\theta\right)\left(\sin(n+2) - \sin(n+1)\right) = \sin(2n+3)\theta.\sin\theta$$

Utilisons Simpson :

$$\Rightarrow \quad 2\sin\frac{2n+3}{2}\cos\frac{\theta}{2}.2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{2n+3}{2} = \sin(2n+3)\theta.\sin\theta$$

$$\Rightarrow \quad 2\sin\frac{2n+3}{2}\cos\frac{2n+3}{2}.2\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2} = \sin(2n+3)\theta.\sin\theta$$

$$\Rightarrow \quad \sin(2n+3)\theta.\sin\theta = \sin(2n+3)\theta.\sin\theta \qquad \textit{CQFD}$$

---

15 septembre 2018

EXTRI468 – FACSA, ULiège, Liège, juillet 2017.

Soit $ABCDE$ un pentagone régulier convexe. Notons α, l'amplitude de l'angle ABC et β l'amplitude de l'angle ACE. Calculer

$$\sin\frac{\alpha}{2}.\sin\frac{\beta}{2}$$

$\alpha = 108°$ car $ABCDE$ est un pentagone régulier.

$\beta = \frac{\alpha}{3} = 36°$. En effet, le polynôme est inscriptible dans un cercle de centre O. (Voir figure)

Les angles DCE, ECA, ACB sont égaux car ce sont des angles inscrits qui interceptent des arc égaux (car sous-tendus par des cordes égales) et l'angle $\widehat{DCB} = 108°$

$$\sin\frac{\alpha}{2}.\sin\frac{\beta}{2} = \sin\frac{108°}{2}\sin\frac{36°}{2} = \sin 54°.\sin 18°$$

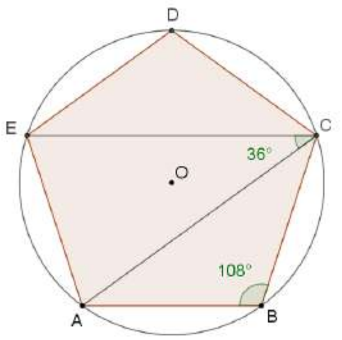
Utilisons la relation : $\sin 2a = 2\sin a.\cos a \Rightarrow \sin a = \frac{\sin 2a}{2\cos a}$.

On obtient : $\frac{\sin 108°}{2\cos 54°}.\frac{\sin 36°}{2\cos 18°}$

Or $\sin 108° = \cos 18°$ car $108°$ et $54°$ sont des angles anticomplémentaires.

$\sin 36° = \cos 54°$ car $36°$ et $54°$ sont des angles complémentaires.

Finalement, on a : $\boxed{\sin\frac{\alpha}{2}.\sin\frac{\beta}{2} = \frac{1}{4}}$



---

15 septembre 2018

EXTRI469 – EPB, ULB, Bruxelles, Septembre 2018.

Soit la relation

$$\cot\theta - \cot 2^n\theta = \operatorname{cosec} 2\theta + \operatorname{cosec} 4\theta + ... + \operatorname{cosec} 2^n\theta$$

où $\cot\theta = 1/\tan\theta, \operatorname{cosec}\theta = 1/\sin\theta$ et $\theta \in \mathbb{R}$ est tel que $\sin 2^n\theta \neq 0$.

Démontrer cette relation pour

(i) $n = 1$

(ii) $n = k+1$ (où k est un naturel non nul quelconque), en supposant qu'elle est vraie pour $n = k$.

(i) Pour $n = 1$:

$$\cot\theta - \cot 2\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} - \frac{\cos 2\theta}{\sin\theta} = \frac{\cos\theta\sin 2\theta - \cos 2\theta\sin\theta}{\sin\theta\sin 2\theta} = \frac{\sin(2\theta-\theta)}{\sin\theta\sin 2\theta}$$

$$= \frac{\sin\theta}{\sin\theta\sin 2\theta} = \frac{1}{\sin 2\theta} = \operatorname{cosec} 2\theta$$

(ii) Pour $n = k+1$:

$$n = k \quad : \cot\theta - \cot 2^k\theta = \operatorname{cosec} 2\theta + \operatorname{cosec} 4\theta + ... + \operatorname{cosec} 2^k\theta \qquad (1)$$

$$n = k+1 : \cot\theta - \cot 2^{k+1}\theta = \operatorname{cosec} 2\theta + \operatorname{cosec} 4\theta + ... + \operatorname{cosec} 2^n\theta + \operatorname{cosec} 2^{k+1}\theta \qquad (2)$$

Il suffit donc de démontrer que :

$$(2)-(1) : \cot 2^k\theta - \cot 2^{k+1}\theta = \operatorname{cosec} 2^{k+1}\theta$$

En effet :

$$\cot 2^k\theta - \cot 2^{k+1}\theta = \frac{\cos 2^k\theta}{\sin 2^k\theta} - \frac{\cos 2^{k+1}\theta}{\sin 2^{k+1}\theta} = \frac{\cos 2^k\theta.\sin 2^{k+1}\theta - \sin 2^k\theta.\cos 2^{k+1}\theta}{\sin 2^k\theta.\sin 2^{k+1}\theta}$$

$$= \frac{\sin\left(2^{k+1}\theta - 2^k\theta\right)}{\sin 2^k\theta.\sin 2^{k+1}\theta} = \frac{\sin\left[2^k\theta.(2-1)\right]}{\sin 2^k\theta.\sin 2^{k+1}\theta} = \frac{1}{\sin 2^{k+1}\theta}$$

$$= \operatorname{cosec} 2^{k+1}\theta$$

---

23 septembre 2018.