Exercices résolus de mathématiques.

Trigonométrie
Calcul numérique

TRI 47

EXTRI470-EXTRI479

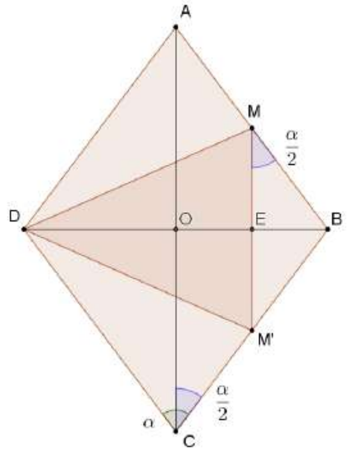
http://matheux.ovh/Accueil.html

Jacques Collot
Jan Frans Broeckx – Nicole Berckmans
Fabienne Zoetard

Septembre 2018

EXTRI470 – EPB, ULB, Bruxelles, septembre 2018.

Soit un losange $ABCD$ dont le côté est de longueur x. Notons M le milieu du segment $[AB]$, M' le milieu du segment $[BC]$ et α l'amplitude de l'angle BCD.
Exprimer l'aire et le périmètre du triangle $MM'D$ en fonction de x et α.



On a (voir figure) :

$$\overline{ME} = \frac{x}{2}.\cos\frac{\alpha}{2} \Rightarrow \overline{MM'} = x\cos\frac{\alpha}{2}$$

$$\overline{EB} = \frac{x}{2}.\sin\frac{\alpha}{2}$$

$$\overline{DB} = 2\overline{OB} = 2x\sin\frac{\alpha}{2} \Rightarrow \overline{DE} = \overline{DB} - \overline{EB} = \left(2x - \frac{x}{2}\right)\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{3}{2}x\sin\frac{\alpha}{2}$$

$$\overline{DM} = \sqrt{\overline{DE}^2 + \overline{ME}^2} = \sqrt{\frac{9}{4}x^2\sin^2\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{4}x^2\cos^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{x}{2}\sqrt{9\sin^2\frac{\alpha}{2} + \cos^2\frac{\alpha}{2}}$$

$$= \frac{x}{2}\sqrt{8\sin^2\frac{\alpha}{2} + 1} = \frac{x}{2}\sqrt{8\frac{1-\cos\alpha}{2} + 1} = \frac{x}{2}\sqrt{5 - 4\cos\alpha}$$

On en déduit l'aire A et le périmètre p.

$$A = \frac{\overline{DE}.\overline{MM'}}{2} = \frac{3}{4}x\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = \boxed{\frac{3}{8}x\sin\alpha}$$

$$p = 2\overline{DM} + \overline{MM'} = x\sqrt{5 - 4\cos\alpha} + x\cos\frac{\alpha}{2} = \boxed{x\left(\sqrt{5 - 4\cos\alpha} + \cos\frac{\alpha}{2}\right)}$$

---

10 septembre 2018

EXTRI471 – POLYTECH, UMons, Mons, juillet 2018.

Démontrer l'identité trigonométrique suivante.

$$\frac{(\sin(x)+\cos(x))^2-1}{\tan(x)}=\cos(2x)+1$$

Nous reprenons la solution proposée par Fabienne Zoetard

$$\frac{(\sin x+\cos x)^2-1}{\tan x}\stackrel{?}{=}\cos 2x+1$$

$$\Rightarrow \quad \sin^2 x+\cos^2 x+2\sin\cos x-1\stackrel{?}{=}\left(2\cos^2 x-1+1\right).\tan x$$

$$\Rightarrow \quad 2\sin\cos x\stackrel{?}{=}\frac{2\cos^2 x.\sin x}{\cos x}$$

$$\Rightarrow \quad 2\sin\cos x\stackrel{?}{=}2\sin\cos x$$

4 octobre 2018

EXTRI472 – POLYTECH, UMons, Mons, juillet 2018.

Dans un triangle quelconque, déterminer les angles A, B et C des sommets de telle sorte que les conditions suivantes soient vérifiées.

$$A = 3B \quad \text{et} \quad a = 2b$$

et b désignent les longueurs des côtés respectivement oppposé aux angles A et B.

Nous reprenons la solution proposée par Fabienne Zoetard

Appliquons la formule des sinus :

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} \Rightarrow \frac{2b}{\sin 3B} = \frac{b}{\sin B} \Rightarrow 2\sin B = \sin 3B$$

Résolvons cette dernière équation :

$$2\sin B = \sin(2B + B) = \sin 2B \cos B + \cos 2B \sin B$$

$$\Rightarrow \quad 2\sin B - \underbrace{\sin 2B}_{2\sin B\cos B} \cos B - \cos 2B \sin B = 0$$

$$\Rightarrow \quad \sin B\left(2 - 2\cos^2 B - \cos 2B\right) = 0$$

1er cas : $\sin B = 0 \Rightarrow B = k\pi$ Triangle impossible.

2ème cas : $2 - 2\cos^2 B - \cos 2B = 0$

$$\Rightarrow 2 - 2\cos^2 B - 2\cos^2 B + 1 = 0$$

$$\Rightarrow 4\cos^2 B = 3 \Rightarrow \cos B = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

- $\cos B = +\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \begin{cases} B = \frac{\pi}{6} \\ B = -\frac{\pi}{6} \end{cases}$ Ce qui géométriquement est le même angle

$$\Rightarrow A = \frac{\pi}{2}; C = \frac{\pi}{3}$$

- $\cos B = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \begin{cases} B = \frac{5\pi}{6} \\ B = -\frac{5\pi}{6} \end{cases} \Rightarrow A = \frac{5\pi}{2}$ Triangle impossible

Conclusion : $\boxed{A = \frac{\pi}{2};\, B = \frac{\pi}{6};\, C = \frac{\pi}{3}}$

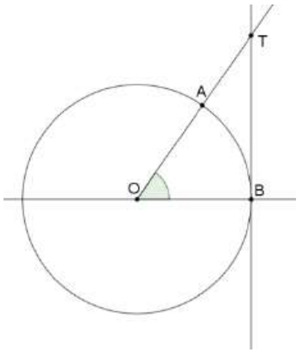
---

4 octobre 2018

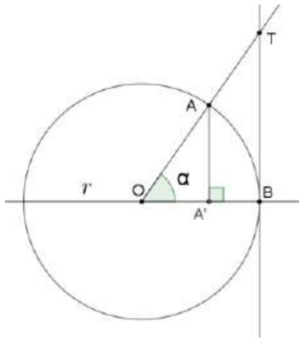
EXTRI473 – POLYTECH, UMons, Mons, juillet 2018.

Soit le ercle de centre O montré sur la figure ci-dessous. En comparant les aires des triangles AOB et OTB, ce dernier étant rectangle en B, à celle du secteur circulaire OAB dont l'angle est noté α, montrer que :

$$\sin(\alpha) < \alpha < \tan(\alpha) \qquad \forall \in \left]0 \frac{\pi}{2}\right[\qquad (\text{en radians})$$



Nous reprenons la solution proposée par Fabienne Zoetard



L'aire d'un secteur circulaire de rayon r et d'angle α (rad) est donnée par $\frac{r^2}{2}\alpha$.

On a successivement :

$$\text{aire } \Delta OAB < \text{ aire secteur circulaire } OAB < \text{ aire } \Delta OBT$$

$$\frac{1}{2}.|OB|.|AA'| < \frac{1}{2}r^2\alpha < \frac{1}{2}|OB|.|BT|$$

$$\frac{1}{2}.r.r.\sin\alpha < \frac{1}{2}r^2\alpha < \frac{1}{2}.r.r\tan\alpha$$

On divise par $\frac{r^2}{2}$

$\Rightarrow \qquad \boxed{\sin\alpha < \alpha < \tan\alpha}$

4 octobre 2018

EXTRI474 – EPL, UCL, LLN, juillet 2018.

Cochez chaque fois l'unique affirmation vraie parmi les possibilités.

Réponse juste $=1$ point; autre réponse $=0$

(a) Dans l'intervalle $0 < x < 2\pi$, l'équation $1-3\tan x = \cos 2x$ admet exactement est égale à

☐ 0 solution ☐ 1 solution ☐ 2 solutions ☐ 3 solutions

(b) Dans le triangle ABC, $C = 60°$ et $a = 2b$. Quelle est la longueur du rayon du cercle circonscrit à ce triangle?

☐ a ☐ $\sqrt{3}\,\dfrac{a}{2}$ ☐ $\dfrac{a}{\sqrt{3}}$ ☐ $\dfrac{a}{2}$ ☐ autre valeur

(c) L'expression $\cos\dfrac{\pi}{9}\cos\dfrac{2\pi}{9}\cos\dfrac{4\pi}{9}$ est égale à :

☐ $-\dfrac{1}{8}$ ☐ $\dfrac{1}{4}$ ☐ $\dfrac{1}{8}$ ☐ $\dfrac{1}{16}$ ☐ autre valeur

(d) Les tangentes communes extérieures à deux cercles tangents extérieurement forment un angle de 60°. Le rapport des rayons des cercles (le rayon du plus frand cercle divisé par celui du plus petit) vaut :

☐ $\sqrt{3}$ ☐ $\dfrac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$ ☐ 2 ☐ $\dfrac{\sqrt{3}+2}{\sqrt{3}}$ ☐ 3

(e) L'expression $-1-\sin^2 5u - \sin^2 2u$ est identiquement égale à :

☐ $2\cos 3u \sin 7u$ ☐ $\cos 3u - 1$ ☐ $-\cos 5u \sin 2u$ ☐ $\cos 7u \cos 3u$ ☐ 0

Solution proposée par Nicole Berckmans

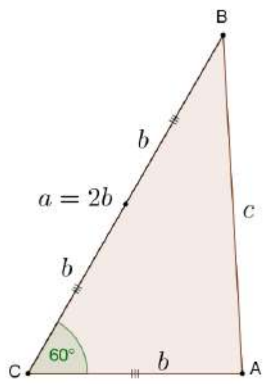


Figure 1

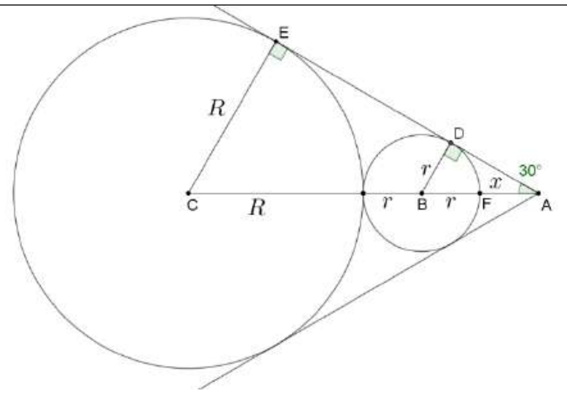


Figure 2

(a) CE : $\cos x \neq 0 \Rightarrow x \neq \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}$

$$1-\cos 2x - 3\tan x = 0 \Rightarrow 2\sin^2 x - \frac{3\sin x}{\cos x} = 0 \Rightarrow \sin x\left(2\sin x - \frac{3}{\cos x}\right) = 0$$

(1) $\sin x = 0 \Rightarrow \boxed{x=\pi}$ car $0 < x < 2\pi$

(2) $2\sin x - \dfrac{3}{\cos x} = 0 \Rightarrow 2\sin x \cos x = 3 \Rightarrow \sin 2x = 3$ Impossible

(b) Voir figure 1.

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos 60° = a^2 + \frac{a^2}{4} - 2.a.\frac{a}{2}.\frac{1}{2} = \frac{3a^2}{4}$$

or $b^2 = \dfrac{a^2}{4} \Rightarrow b^2 + c^2 = a^2 \Rightarrow$ le triangle rectangle en A.

Le rayon du cercle inscrit est alors $\overline{BC} = a = 2R \Rightarrow \boxed{R = \dfrac{a}{2}}$

(c) $\cos 20°.\cos 40°.\cos 80° = \dfrac{1}{2}(\cos 60° + \cos 20°)\cos 80° = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2} + \cos 20°\right)\cos 80°$

$$= \frac{1}{4}\cos 80° + \frac{1}{2}.\frac{1}{2}(\cos 100° + \cos 60°) = \underbrace{\frac{1}{4}\cos 80° + \frac{1}{4}\cos 100°}_{=0} + \frac{1}{8} = \boxed{\frac{1}{8}}$$

Ou bien : $\cos 20°.\cos 40°.\cos 80° = \dfrac{\cancel{\sin 40°}}{2\sin 20°}.\dfrac{\cancel{\sin 80°}}{2\cancel{\sin 40°}}.\dfrac{\sin 160°}{2\cancel{\sin 80°}} = \dfrac{1}{8}.\dfrac{\sin 160°}{\sin 20°} = \boxed{\dfrac{1}{8}}$

car $\sin 160° = \sin 20°$ (angles supplémentaires)

(d) Voir figure 2. $x = \overline{AF}$.

$$\left.\begin{array}{l} \Delta ABD : \sin 30° = \dfrac{r}{x+r} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow x = r \\ \Delta ACE : \ \sin 30° = \dfrac{R}{R+2r+x} = \dfrac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{R}{R+3r} = \frac{1}{2} \Rightarrow R + 3r = 2R \Rightarrow \boxed{\frac{R}{r} = 3}$$

(e) Pour $u = 0$, l'expression vaut 1, donc la seule solution possible est la quatrième.

Ou bien $1 - \sin^2 5u - \sin^2 2u = 1 - \dfrac{1}{2}(1-\cos 10u) - \dfrac{1}{2}(1-\cos 4u) = \dfrac{1}{2}(\cos 10u + \cos 4u)$

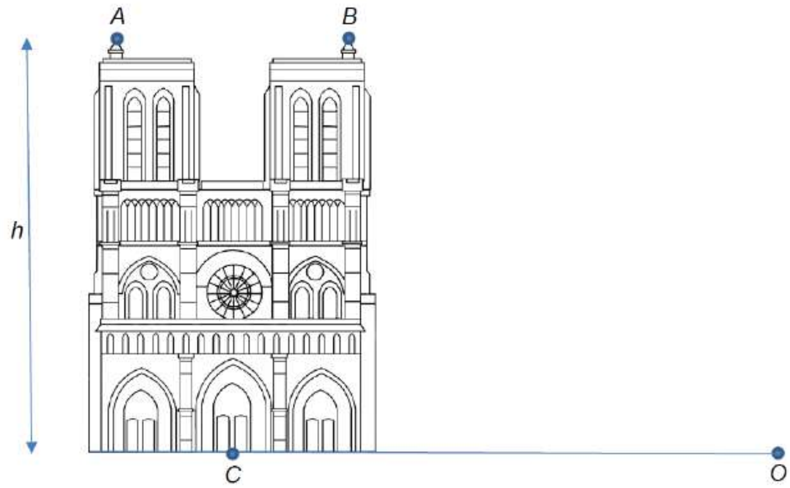
$$= \frac{1}{2}.2\cos 7u \cos 3u = \boxed{\cos 7u.\cos 3u}$$

EXTRI475 – EPL, UCL, LLN, juillet 2018.

Une observatrice O attablée a la terrasse du Café Panis sur les quais de la Seine voit deux gargouilles A et B sur le toit de la cathédrale Notre-Dame de Paris sous un angle BOA égal a 8.105° (elle dispose d'un instrument vraiment précis).

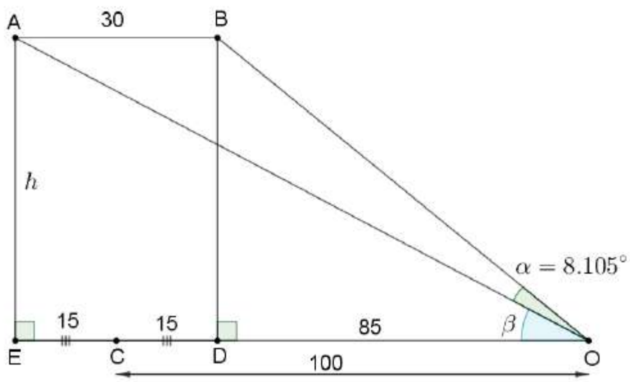
Calculez la hauteur h de la tour de la cathédrale sachant que la distance $\overline{AB}$ est de 30m et que l'observatrice O a mis exactement deux minutes à la vitesse de 3 km/h pour parcourir la distance $\overline{CO}$.

Note : aucune tour d'église ne dépasse 100m à Paris.



Note : ce problème a engendré une certaine polémique, car beaucoup d'étudiants ont considéré le problème comme impossible, car le point A est caché par la tour B lorsque l'on regarde de O. Le problème devient alors un problème en 3D pour lequel il manque des informations. L'énoncé manque donc de clarté.

Solution proposée par Marc Decoux



A, B, C et O sont supposés dans le même plan.

$$(1)\ \overline{CO} = v.t = \frac{3000}{60} \times 2 = 100 \text{ m} \Rightarrow \begin{cases} \overline{EO} = 115 \text{ m} \\ \overline{DO} = 85 \text{ m} \end{cases}$$

$$(2)\ \Delta BDO : h = \overline{DO}.\tan(\alpha + \beta) = \overline{DO}.\frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta} \quad (1*)$$

$$\Delta AEO : \ h = \overline{EO}.\tan\beta \Rightarrow \tan\beta = \frac{h}{\overline{\overline{EO}}} \qquad (2*)$$

$$(3)\ \text{De } (1*) \text{ et } (2*) : h = \overline{DO}.\frac{\tan\alpha + \frac{h}{\overline{\overline{EO}}}}{1 - \tan\alpha \frac{h}{\overline{\overline{EO}}}}$$

$$\Rightarrow \quad h\left(1 - \tan\alpha \frac{h}{\overline{\overline{EO}}}\right) = \overline{DO}.\left(\tan\alpha + \frac{h}{\overline{\overline{EO}}}\right)$$

$$\Rightarrow \quad h\left(\overline{EO} - \tan\alpha.h\right) = \overline{DO}.\left(\overline{EO}.\tan\alpha + h\right)$$

$$\Rightarrow \quad \tan\alpha.h^2 + \left(\overline{DO} - \overline{EO}\right).h + \overline{DO}.\overline{EO}.\tan\alpha = 0$$

$$\Rightarrow \quad h^2 + \frac{\overline{DO} - \overline{EO}}{\tan\alpha} h + \overline{DO}.\overline{EO} = 0$$

$$\Rightarrow \quad h^2 + \frac{85 - 115}{\tan 8.105°} h + 85 \times 115 = 0$$

$$\Rightarrow \quad h^2 - 210.6592\, h + 9775 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{h = 69.007 \simeq 69.01 \text{ m}} \qquad \text{car } h \in [0, 100]$$

20 novembre 2018

EXTRI476 – EPL, UCL, LLN, septembre 2018.

Cochez chaque fois l'unique affirmation vraie parmi les possibilités.

Réponse juste $=1$ point; autre réponse $=0$

(a) On considère un losange circonscrit à un cercle de rayon R. Sachant qu'un des angles du losange est 2α, l'aire de ce losange est :

☐ $\dfrac{R^2}{\tan 2\alpha}$ ☐ $\dfrac{4R^2}{\sin 2\alpha}$ ☐ $\dfrac{R^2}{\cos\alpha\sin\alpha}$ ☐ $\dfrac{R^2\tan\alpha}{2}$

(b) Dans le triangle quelconque ABC, l'expression $ab\cos C - ac\cos B$ est égale à

☐ $\sqrt{a^2-b^2}$ ☐ c^2+b^2 ☐ b^2-c^2 ☐ b^2-2c^2

(NB. On désigne les angles du triangle ABC par les lettres A, B et C ; les longueurs des côtés BC, CA et AB sont désignées respectivement par les lettres a, b et c)

(c) Que peut-on affirmer au sujet d'un arc de cercle d'angle α $(0<\alpha<\pi/2)$ et de rayon unitaire, dont la longueur de la corde est égale au cosinus de l'angle ?

☐ $\sin\alpha=\cos\alpha$ ☐ $\sin\alpha=\tan\dfrac{\alpha}{2}$ ☐ $\sin\alpha=\cos\dfrac{\alpha}{2}$ ☐ $\tan\alpha=\cos\dfrac{\alpha}{2}$

(d) Si $\cot\alpha=1+\sqrt{2}$, $\sec\alpha$ vaut

☐ $\pm\sqrt{\dfrac{4+2\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}}}$ ☐ $\dfrac{3+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}$ ☐ $\sqrt{\dfrac{2+2\sqrt{2}}{2-2\sqrt{2}}}$ ☐ $\sqrt{\dfrac{2+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}}$

(e) Dans l'intervalle $[-\pi,\pi]$, l'équation $\sin^2 x+\sin^2 a=1$ (avec $0<a<\pi/2$) admet toujours :

☐ exactement 2 solutions ☐ exactement 3 solutions
☐ exactement 4 solutions ☐ aucune solution

Solution proposée par Nicole Berckmans

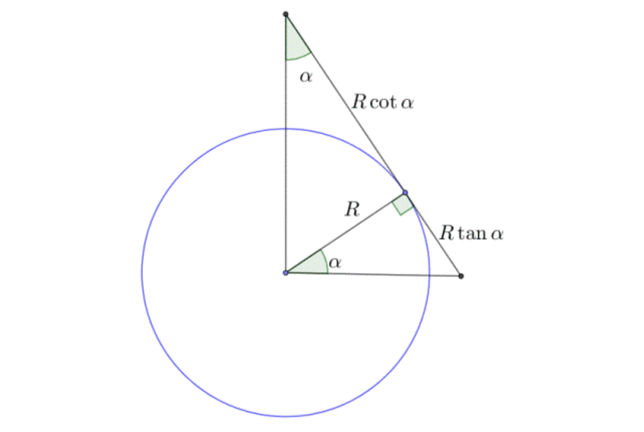


Figure 1

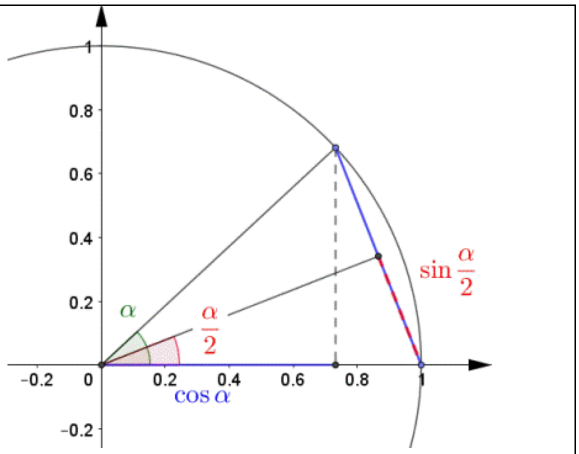


Figure 2

(a) Voir figure 1.

$$\text{Aire : } A = 4.\frac{1}{2}.R\left(R\tan\alpha + R\cot\alpha\right) = 2R^2\frac{1+\tan^2\alpha}{\tan\alpha} = 2R^2\frac{\dfrac{1}{\cos^2\alpha}}{\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}} = \frac{2R^2}{\sin\alpha\cos\alpha} = \boxed{\frac{4R^2}{\sin 2\alpha}}$$

(b) $\left.\begin{array}{l} c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma \\ b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta \end{array}\right\} \Rightarrow c^2 - b^2 = b^2 - c^2 - 2\left(ab\cos\gamma - ac\cos\beta\right)$

$$\Rightarrow ab\cos\gamma - ac\cos\beta = \boxed{b^2 - c^2}$$

(c) Voir figure 2.

$$2\sin\frac{\alpha}{2} = \cos\alpha \Rightarrow \frac{\sin\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \Rightarrow \cos\frac{\alpha}{2} = \tan\alpha$$

(d) Rappel : $\sec\alpha = \dfrac{1}{\cos\alpha}$, $\operatorname{cosec}\alpha = \dfrac{1}{\sin\alpha}$

On a $1+\tan^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow 1 + \dfrac{1}{\cot^2\alpha} = \sec^2\alpha$

$$\Rightarrow \sec^2\alpha = 1 + \frac{1}{\left(1+\sqrt{2}\right)^2} = \frac{\left(1+\sqrt{2}\right)^2 + 1}{\left(1+\sqrt{2}\right)^2} = \frac{4+2\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}} \Rightarrow \boxed{\sec\alpha = \pm\sqrt{\frac{4+2\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}}}}$$

(e) $\sin^2 x + \sin^2 a = 1 \quad 0 < a < \pi/2$

$$\Rightarrow \sin^2 x = \cos^2 a \Rightarrow \begin{cases} \sin x = \cos a & \text{admet 2 solutions dans } [-\pi, \pi] \\ \sin x = -\cos a & \text{admet 2 solutions dans } [-\pi, \pi] \end{cases}$$

Conclusion : $\boxed{\text{4 solutions}}$

EXTRI477 – EPL, UCL, LLN, septembre 2018.

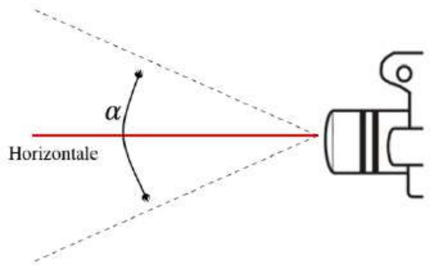
L'angle de champ α d'un appareil photo est l'angle que va pouvoir capter son objectif (voir Figure). Un photographe décide de prendre une photo d'une statue de 4 m hauteur posée sur le sol. L'objectif de l'appareil photo se situe à 1.8 m du sol. L'angle de champ de cet appareil est de 57 degrés.

(1) Dans un premier temps, notre photographe tient son appareil photo horizontalement (comme sur la Figure). Quelle est la distance minimale d_1 à laquelle le photographe doit se trouver par rapport à la statue pour pouvoir la photographier sur toute sa hauteur ?

(2) Pour obtenir le meilleur résultat possible, notre photographe voudrait que statue remplisse exactement le champ de son appareil photo. Pour ce faire, il lui est possible d'incliner l'appareil photo d'un angle β par rapport a l'horizontale. Trouvez l'inclinaison β pour obtenir une photo ou la statue occupe l'entièreté du champ. Dans ce cas, à quelle distance d_2 se situe le photographe par rapport à la statue ?

On vous demande d'exprimer vos résultats finaux en degrés, minutes et secondes quand il s'agit d'angles. Vos résultats doivent être précis au millimètre près quand il s'agit de distances et à la seconde d'arc près quand il s'agit d'angles.

Faites un dessin clair pour chacune de ces deux situations.



Solution proposée par Nicole Berckmans

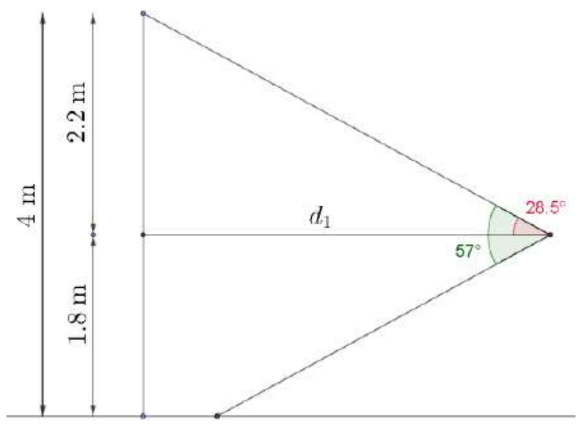


Figure 1

(1) Figure 1 : $\tan 28,5° = \dfrac{2.2}{d_1} \Rightarrow d_1 = \dfrac{2.2}{\tan 28,5°} = 4.052 \text{ m}$

$$(2) \text{ Figure 2 : } \left.\begin{array}{l} \tan\gamma = \dfrac{2.2}{d_2} \\ \tan(57°-\gamma) = \dfrac{1.8}{d_1} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\tan\gamma}{\tan(57°-\gamma)} = \frac{2.2}{1.8} = \frac{11}{9} \Rightarrow \quad \frac{\tan\gamma}{\dfrac{\tan 57° - \tan\gamma}{1+\tan 57°\tan\gamma}} = \frac{11}{9}$$

On pose $y = \tan\gamma \Rightarrow 9y(1+y\tan 57) = 11(\tan 57° - y) \Rightarrow 9\tan 57°.y^2 + 20y - 11\tan 57° = 0$

$\Rightarrow\ y = 0.5986 \Rightarrow \gamma = 30.9054°$

L'angle d'inclinaison β est alors : $\beta = \gamma - 27.5° = 2.4054° = \boxed{2°24'20''}$

et $d_2 = \dfrac{2.2}{\tan 30.9054°} = \boxed{3.675 \text{ m}}$

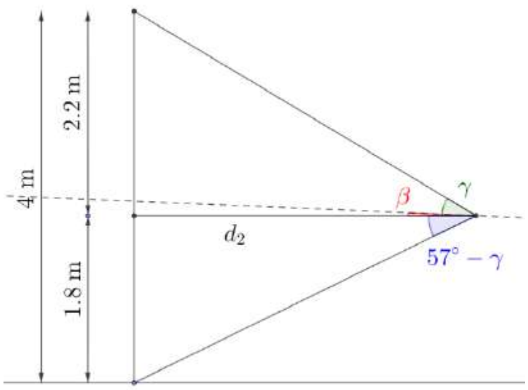


Figure 2

22 novembre 2018

EXTRI478 – POLYTECH, UMons, Mons, juillet 2019.

Démontrer l'identité trigonométrique suivante :

$$\sin(8a) = 8\sin(a)\cos(a)\left(1-\sin^2(a)\right)\left(1-8\sin^2(a)\cos^2(a)\right)$$

Solution proposée par Yacin Zriwil

$\sin(8a) = 2\sin(4a)\cos(4a) = 4\sin(2a)\cos(2a)\cos(4a) = 8\sin(a)\cos(a)\cos(2a)\cos(4a)$

Or $\cos(2a) = 1-2\sin^2(a)$ (Carnot)

Et $\cos(4a) = 1-2\sin^2(2a) = 1-8\sin^2(a)\cos^2(a)$

On a bien : $\sin(8a) = 8\sin(a)\cos(a)\left(1-\sin^2(a)\right)\left(1-8\sin^2(a)\cos^2(a)\right)$

Le 07 novembre 2019

EXTRI479 – POLYTECH, UMons, Mons, juillet 2019.

Sachant que x, y et z sont des nombres compris entre 0 et $\pi/2$, tels que

$$\tan(x) = \frac{1}{2}, \quad \tan(y) = \frac{1}{5}, \quad \tan(z) = \frac{1}{8}$$

démontrer que :

$$x + y + z = \frac{\pi}{4}$$

Solution proposée par Yacin Zriwil

Rappel : $\tan(a+b) = \dfrac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$

Calculons $\tan(x+y+z) = \dfrac{\tan(x+y) + \tan z}{1 - \tan(x+y)\tan z}$ avec $\tan(x+y) = \dfrac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y} = \dfrac{7}{9}$

On a donc : $\tan(x+y+z) = \dfrac{\frac{7}{9} + \frac{1}{8}}{1 - \frac{7}{9}.\frac{1}{8}} = 1 \Leftrightarrow x+y+z = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$

Or $\tan x = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x = \arctan\left(\dfrac{1}{2}\right) + k\pi$ mais comme $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$, on a $x = \arctan\left(\dfrac{1}{2}\right)$

$\Rightarrow 0 < \arctan\left(\dfrac{1}{2}\right) < \arctan\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) \Rightarrow 0 < x < \dfrac{\pi}{6}.$

On fait le même raisonnement pour y et z.

On a donc $\left.\begin{array}{l} 0 < x < \frac{\pi}{6} \\ 0 < y < \frac{\pi}{6} \\ 0 < z < \frac{\pi}{6} \end{array}\right\} \Rightarrow 0 < x+y+z < \dfrac{3\pi}{6} = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow x+y+z = \dfrac{\pi}{4}$

Le 07 novembre 2019