**Exercices résolus de mathématiques.**

# Trigonométrie
# Calcul numérique

## TRI 48

**EXTRI480-EXTRI489**

http://matheux.ovh/Accueil.html

Jacques Collot
Jan Frans Broeckx – Nicole Berckmans
Fabienne Zoetard

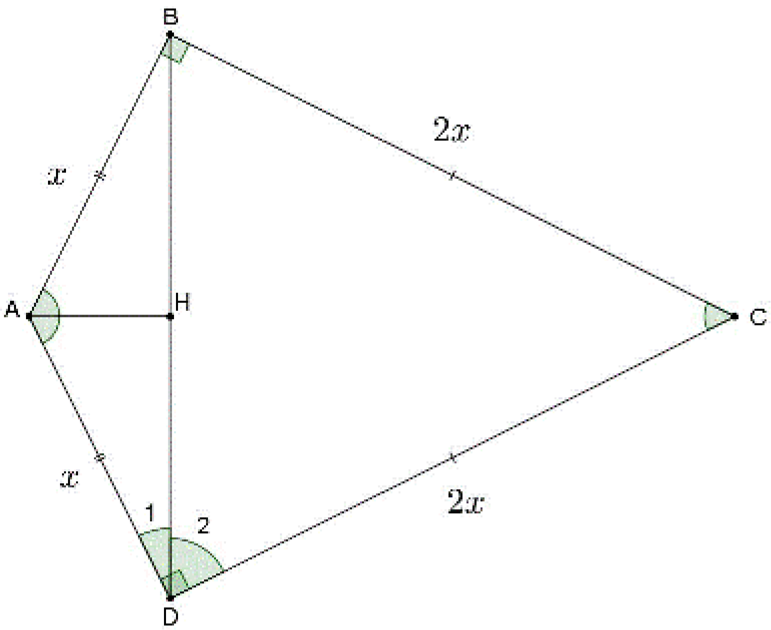
Septembre 2019

## EXTRI480 – – POLYTECH, UMons, Mons, juillet 2019.

Soit un terrain à bâtir en forme de quadrilatère $ABCD$. Le géomètre mandaté pour relever les dimensions de ce terrain a consigné sur son plan que les deux côtés de l'angle au sommet $A$ sont de même longueur, les deux côtés de l'angle $C$, opposé à l'angle $A$, sont eux aussi de même longueur valant le double de $x$.
On demande de calculer la valeur numérique de sin $C$ si les angles $B$ et $D$ aux deux autres somet sont droits. Pour résoudre cette question, il est nécessaire de représenter graphiquement le terrain (l'utilisation d'un compas est recommandée)

---

**Solution proposée par Yacin Zriwil**



On a : $\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C}+\widehat{D}=360°$, or $\widehat{B}=\widehat{D}=90° \Rightarrow \widehat{A}+\widehat{B}=180° \Rightarrow \widehat{C}=180°-\widehat{A} \Rightarrow \sin\widehat{C}=\sin\widehat{A}$

Dans le triangle $ABD$, $H$ est le pied de la perpendiculaire abaissée de $A$ sur $BD$. $H$ est aussi le milieu de $BD$ car le triangle $ABD$ est isocèle en $A \Rightarrow |DH| = x\cos\widehat{D_1} \Rightarrow |BD| = 2x\cos\widehat{D_1}$ (1).

Appliquons la relation des sinus : $\dfrac{\sin\widehat{A}}{|BD|}=\dfrac{\sin\widehat{D_1}}{x} \Rightarrow \sin\widehat{A}=\dfrac{|BD|\sin\widehat{D_1}}{x}$

Dans le triangle $BCD$, appliquons aussi la relation des sinus :

$$\frac{\sin\widehat{C}}{|BD|}=\frac{\sin\widehat{D_2}}{2x}=\frac{\sin\left(90°-\widehat{D_1}\right)}{2x}=\frac{\cos\widehat{D_1}}{2x} \Rightarrow \sin\widehat{C}=\frac{|BD|\cos\widehat{D_1}}{2x} \quad (2)$$

Or $\sin\widehat{C}=\sin\widehat{A} \Rightarrow \dfrac{|BD|\cos\widehat{D_1}}{2x}=\dfrac{|BD|\sin\widehat{D_1}}{x} \Rightarrow \dfrac{1}{2}\cos\widehat{D_1}=\sin\widehat{D_1}$ car $|BD|\neq 0$ et $x\neq 0$.

$$\Rightarrow \tan\widehat{D_1}=\frac{1}{2} \Rightarrow \cos^2\widehat{D_1}=\frac{1}{\tan^2\widehat{D_1}+1}=\frac{1}{\frac{1}{4}+1}=\frac{4}{5}$$

Mais en injectant (1) dans (2): $\sin\widehat{C}=\cos^2\widehat{D_1}=\dfrac{4}{5}$

---

Le 07 novembre 2019

## EXTRI481 – EPL, UCL, LLN, juillet 2019.
## Polytech, Umons, Mons, juillet 2019.
## FACSA, ULiège, Liège, juillet 2019.
## EPB, ULB, Bruxelles, juillet 2019.

Résoudre dans l'ensemble des réels l'équation :

$$4(\sin x+\cos x)-8\sin x\cos x=5$$

et représnter les solutions sur le cercle trigonométrique. Noter que bien que les solutions trouvées ne soient pas exprimables sous la forme d'angles remarquables, il est possible de les représenter de façon précise que le cercle trigonométrique.

Pour résoudre cette équation, il est suggéré de poser $y=\sin x+\cos x$.

---

**Solution proposée par Yacin Zriwil**

$4(\sin x+\cos x)-8\sin x\cos x=5$

On pose : $y=\sin x+\cos x\Rightarrow y^2=1+2\sin x\cos x\Rightarrow 4(y^2-1)=8\sin x\cos x$

$\Rightarrow 4y-4y^2+4-5=0\Rightarrow 4y^2-4y+1=0\Rightarrow (2y-1)^2=0\Rightarrow y=\frac{1}{2}$

On a donc : $\sin x+\cos x=\frac{1}{2}\Rightarrow \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x\right)=\frac{1}{2}$

$\Rightarrow \cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}\Rightarrow x-\frac{\pi}{4}=\pm\arccos\frac{\sqrt{2}}{4}+2k\pi$

$\Rightarrow x=\frac{\pi}{4}\pm\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}+2k\pi$

Représentation sur le CT.

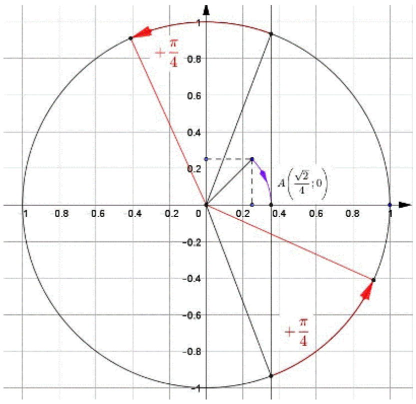
On a : $\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{4}$

Comment construirre précisément $\frac{\sqrt{2}}{4}$? Il suffit de considérer un triangle rectangle isocèle dont la longueur des côtés de l'angle droit est $\frac{1}{4}$.

Par Pythagore, on a : $x^2=\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{1}{8}\Rightarrow x=\frac{\sqrt{2}}{4}$.

Soit le point $A\left(\frac{\sqrt{2}}{4};0\right)$ dans le plan $OXY$ et donc $\|\overrightarrow{OA}\|=\frac{\sqrt{2}}{4}$.

La droite $x=\frac{\sqrt{2}}{4}$ coupe le CT en deux points qui déterminent des longueurs d'arc égale à $\pm\arccos\frac{\sqrt{2}}{4}$. Il reste à ajouter $\frac{\pi}{4}$ pour obtenir une représentation précise des solutions.




## Solution proposée par Nicole Berckmans et Martine Devillers

Méthode 1

On pose $y=\sin x+\cos x \Rightarrow y^2=1+2\sin x\cos x \Rightarrow 4y-4\left(y^2-1\right)=5 \Rightarrow 4y^2+4y+1=0$

$\Rightarrow (2y-1)^2=0 \Rightarrow y=\frac{1}{2}$

On a alors : $\cos x+\sin x=\frac{1}{2} \Rightarrow \cos x+\tan\frac{\pi}{4}\sin x=\frac{1}{2} \Rightarrow \cos x\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{4}\sin x=\frac{\sqrt{2}}{4}$

$\Rightarrow \cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{4} \Rightarrow x-\frac{\pi}{4}=\pm\arccos\frac{\sqrt{2}}{4}+2k\pi \Rightarrow x=\frac{\pi}{4}\pm\arccos\frac{\sqrt{2}}{4}+2k\pi$

Méthode 2

L'équation est symétrique. On pose $x=y+\frac{\pi}{4}$

$\Rightarrow 4\left(\sin\left(y+\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(y+\frac{\pi}{4}\right)\right)-8\sin\left(y+\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(y+\frac{\pi}{4}\right)=5$

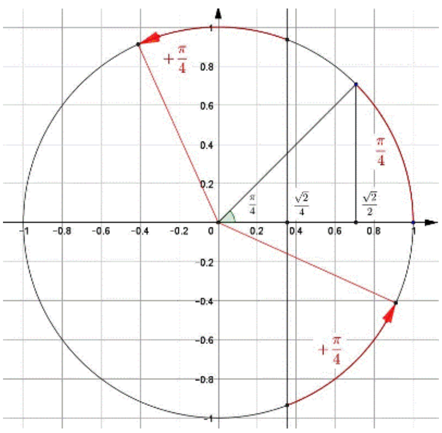
$\Rightarrow 4\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin y+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos y+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos y-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin y\right)-4\sin\left(2y+\frac{\pi}{2}\right)=5$

$\Rightarrow 4\sqrt{2}\cos y-4\cos 2y=5 \Rightarrow 4\sqrt{2}\cos y-4\left(2\cos^2 y-1\right)=5$

$\Rightarrow 8\cos^2 y-4\sqrt{2}\cos y+1=0 \Rightarrow \left(2\sqrt{2}\cos y-1\right)^2=0$

$\Rightarrow \cos y=\frac{\sqrt{2}}{4} \Rightarrow y=\pm\arccos\frac{\sqrt{2}}{4}+2k\pi \Rightarrow x=\frac{\pi}{4}\pm\arccos\frac{\sqrt{2}}{4}+2k\pi$

La construction est donnée ci-dessous.




Le 07 novembre 2019

# EXTRI482 – EPL, UCL, LLN, juillet 2019.

Donnez une solution dans la boîte forunie.

Réponse juste = 1 point. Autre réponse = 0.

1) Donnez toutes les solutions entre 0 et 2 $\pi$ de l'équation suivante.

$$\sin(\pi - 4x) = 1$$

Il y a entre 0 et 10 solutions. S'il y a plusieurs solutions donner les dans l'ordre croissant dans les boîtes.

2) Que vaut exactement $\sin 105°$ à partir des angles remarquables.

---

## Solution proposée par Nicole Berckmans et Martine Devillers.

1) $\sin(\pi - 4x) = \sin 4x = 1 \Rightarrow 4x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{8} + k\dfrac{\pi}{2}$

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{\pi}{8}$ | $\frac{5\pi}{8}$ | $\frac{9\pi}{8}$ | $\frac{13\pi}{8}$ | | | | | | |

2) <u>1er réponse</u> :

$$\sin 105° = \sin(60° + 45°) = \sin 60° \cos 45° + \sin 45° \cos 60°$$
$$= \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

<u>2ème réponse</u> :

$$\sin 105° = \sin(90 + 45°) = \cos(-15°) = \cos\frac{30°}{2}$$
$$= \sqrt{\frac{1 + \cos 30°}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}}$$

---

Le 12 novembre 2019

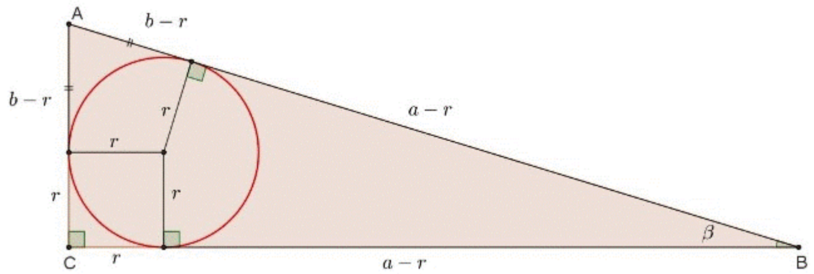
# EXTRI483 – EPL, UCL, LLN, juillet 2019.

Soit un triangle rectangle $ABC$ rectangle en $C$.

1. Calculez une expression littérale qui donne le rayon $r$ du cercle inscrit du triangle $ABC$, en fonction des longueurs $a, b, c$ de ses 3 côtés.
2. Si l'angle $B$ de ce triangle vaut $\beta = 17°$ et si le rayon $r$ de son cercle inscrit vaut 8.3 cm, calculez $a$, $b$ et $c$ avec une précision d'un millimètre.

---

## Solution proposée par Nicole Berckmans et Martine Devillers.




1) On a : $c = (a-r)+(b-r) \Rightarrow r = \dfrac{a+b-c}{2}$

$$2)\begin{cases} \sin 17° = \dfrac{b}{c} \\ \cos 17° = \dfrac{a}{c} \\ r = \dfrac{a+b-c}{2} = 8.3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = c\sin 17° \\ a = c\cos 17° \\ \dfrac{c\cos 17° + c\sin 17° - c}{2} = 8.3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow c = \frac{8.3\times 2}{\sin 17° + \cos 17° - 1} = 66.8 \text{ cm} \Rightarrow \begin{cases} a = 63.8 \text{ cm} \\ b = 19.5 \text{ cm} \end{cases}$$

---

Le 12 novembre 2019

## EXTRI484 – EPL, UCL, LLN, septembre 2019.
## Polytech, Umons, Mons, septembre 2019.
## FACSA, ULiège, Liège, septembre 2019.
## EPB, ULB, Bruxelles, septembre 2019.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ en spécifiant les conditions d'existence :

$$\frac{\cos x - \cos 3x}{\sin x} = \cos x$$

et représenter les solutions dans $(-\pi, \pi)$ sur le cercle trigonométrique.

---

**Solution proposée par Nicole Berckmans et Martine Devillers.**

CE : $\sin x \neq 0$

Par Simpson : $\cos x - \cos 3x = \sin x \cos x$

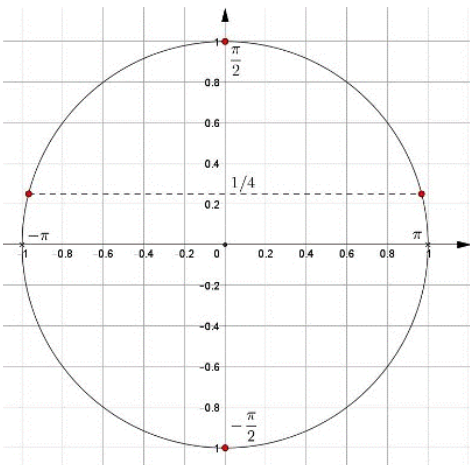
$$\Rightarrow \quad 2\sin 2x \sin x = \cos x \sin x$$

$$\Rightarrow \quad 2\sin 2x = \cos x$$

$$\Rightarrow \quad 4\sin x \cos x = \cos x$$

1) $\cos x = 0 \Rightarrow x = \pm\frac{\pi}{2}$

2) $\sin x = \frac{1}{4} \Rightarrow \begin{cases} x = \arcsin\frac{1}{4} \\ x = \pi - \arcsin\frac{1}{4} \end{cases}$




---

Le 12 novembre 2019

# EXTRI485 – EPL, UCL, LLN, septembre 2019.

Pour chaque sous-question donnez la solution dans la boit fournie. Seule la solution correcte sera évaluée, inutile de fournir votre raisonnement.
Réponse juste = 1 point; autre réponse = 0.

- Si $\tan x = a$ alors que vaut $(1+a^2).\sin^2 x$ ?

- Nous savons que $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{4}(1+\sqrt{3})$ que vaut $x$ en degré sachant que $x$ est entre 0 et 90°.

- Exprimez en $cm^2$ l'aire d'un triangle isocèle rectangle dont le côté opposé à l'angle droit est de longueur égale à 2 cm.

- Une route présentant une pente de 10% signifie que pour un déplacement horizontale de 100 m, on se déplace verticalement de 10 m. Quelle est la pente (exprimée en % et calculée à 2% près) d'une route inclinée de 15° par rapport à l'horizontale?
  Indice : $\sqrt{3} \approx 1.7$.

---

**Solution proposée par Nicole Berckmans et Martine Devillers.**

1) $(1+a^2)\sin^2 x = (1+a^2)\left(1-\dfrac{1}{1+a^2}\right) = a^2$ car $\sin^2 x = 1-\cos^2 x = 1-\dfrac{1}{1+\tan^2 x}$

2) $\sin x = \dfrac{\sqrt{2}}{4}(1+\sqrt{3}) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(\sin 30°+\sin 60°) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}.2.\sin 45°\cos 15°$

$= \sqrt{2}.\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos 15° = \cos 15° = \sin(90°-15°) = \sin 75°$

3) Soit $a$ la longueur des 2 côtés de l'angle droite : $a^2+a^2 = 2^2 \Rightarrow a^2 = 2$

Aire : $A = \dfrac{1}{2}.a.a = 1$

4) Suivant que l'on travaille avec $15° = 60°-45$ ou $15° = 45°-30°$, les résultats sont un peu différents.

- $\tan 15° = \tan(45°-30°) = \dfrac{\tan 45°-\tan 30°}{1+\tan 45°\tan 30°} = \dfrac{1-\dfrac{\sqrt{3}}{3}}{1+\dfrac{\sqrt{3}}{3}} = \dfrac{3-\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}$

  $\approx \dfrac{1.3}{4.7} \approx \dfrac{1.4}{5.0} \approx 0.28$

- $\tan 15° = \tan(60°-45°) = \dfrac{\tan 60°-\tan 45°}{1+\tan 60°\tan 45°} = \dfrac{\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{3}} = \dfrac{0.7}{2.7} \approx 0.26$

---

Le 12 novembre 2019

# EXTRI486 – EPL, UCL, LLN, septembre 2019.

Soit un haxagone régulier $H_0$ de côté $a$. On propose de construire l'hexagone régulier $H_1$ de la façon suivante : les 6 sommets de $H_1$ sont les milieux des arêtes de $H_0$ et les 6 arêtes de $H_1$ relient les milieux des arêtes communes aux sommets de $H_0$. On peut ensuite construire une suite d'hexagones réguliers $H_2, H_3, \ldots, H_n$ où $H_{j+1}$ est construit à partir de $H_1$ en utilisant la même procédure. Soit $R_i$ le rayon du cercle inscrit à $H_i$ et $A_i$ l'aire de $H_i$.

1) Faites un dessin propre et précis de $H_0$, de $H_1$ et de $H_2$. Vous pouvez vous servir de ce dessin pour répondre aux sous-questions 2) et 3).

2) Trouvez le plus petit $n$ possible qui vérifie $3R_n < R_0$.

3) TRouvez le plus petit $n$ possible qui vérifie $3A_n < A_0$

---

## Solution proposée par Nicole Berckmans et Martine Devillers.

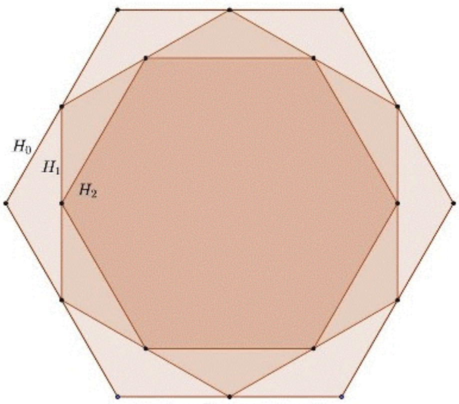



Figure 1

2) Figure 2 : $\tan 60° = \sqrt{3} = \dfrac{R_0}{a/2} \Rightarrow R_0 = a\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

Figure 3 : $\cos 30° = \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{R_1}{R_0} \Rightarrow R_1 = \dfrac{\sqrt{3}}{2} R_0 = a\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$

Or $3R_n < R_0 \Rightarrow 3a\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1} < a\dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^n < \dfrac{1}{3} \Rightarrow \boxed{n=8}$

3) $A_1 = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 A_0 \Rightarrow A_n = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^{2n} A_0$

Or $3A_n = 3\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^{2n} A_0 < A_0 \Rightarrow \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^{2n} < \dfrac{1}{3} \Rightarrow \boxed{n=4}$

---

Le 12 novembre 2019

## EXTRI487 – EPB, ULB, Bruxelles, juillet 2019.

Calculer, en justifiant chaque étape,

$$\sin\left(\arctan\frac{1}{3}+\arctan\frac{1}{4}\right)$$

Pour rappel, arctan désigne la fonction arc tangente.

---

Démontrons d'abord les formules : $\sin\arctan\alpha=\dfrac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}}$ et $\cos\arctan\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}}$

$$\sin\arctan\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+\cot^2\arctan\alpha}}=\frac{\tan\arctan\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\arctan\alpha}}=\frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}}$$

$$\cos\arctan\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\arctan\alpha}}=\frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}}$$

Appliquons ces formules :

$$\sin\left(\arctan\frac{1}{3}\arctan\frac{1}{4}\right)=\sin\arctan\frac{1}{3}\cos\arctan\frac{1}{3}+\cos\arctan\frac{1}{3}.\sin\arctan\frac{1}{4}$$

$$=\frac{\frac{1}{3}}{\sqrt{1+\frac{1}{9}}}.\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{16}}}+\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{9}}}.\frac{\frac{1}{4}}{\sqrt{1+\frac{1}{16}}}=\frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}{\frac{\sqrt{10\times17}}{3\times4}}=\boxed{\frac{7}{\sqrt{170}}}$$

---

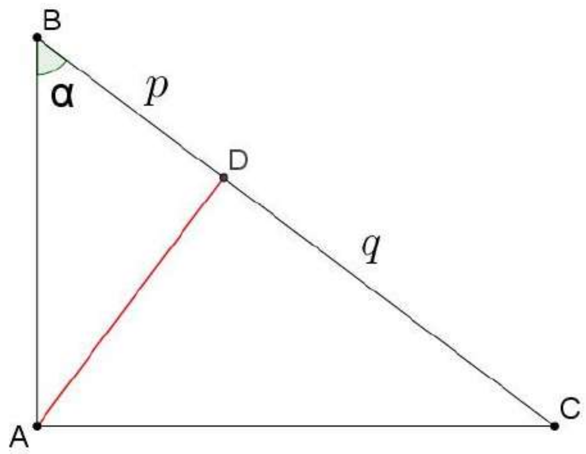
22 novembre 2019

## EXTRI488 – EPB, ULB, Bruxelles, juillet 2019.

Soit un triangle $ABC$, rectangle en $A$, et soit $D$ le point d'intersection de la droite $BC$ avec lla hauteur issue de $A$. On pose $p = \|\overrightarrow{BD}\|$, $q = \|\overrightarrow{CD}\|$ et $\alpha = \widehat{ABC}$. Montrer que

$$\sin^2 \alpha = \frac{q}{p+q}$$

---




Triangle $BDA$ : $\overline{AB} = \dfrac{p}{\cos \alpha}$

Triangle $ABC$ : $\overline{AB} = (p+q).\cos \alpha$

On en déduit : $\dfrac{p}{\cos \alpha} = (p+q).\cos \alpha \Rightarrow \cos^2 \alpha = \dfrac{p}{p+q}$

$\Rightarrow \sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = 1 - \dfrac{p}{p+q} \Rightarrow \boxed{\sin^2 \alpha = \dfrac{q}{p+q}}$

---

22 novembre 2019

## EXTRI489 – EPB, ULB, Bruxelles, septembre 2019.

Sachant que

$$\sin\frac{\pi}{10}\sin\frac{4\pi}{10}=\frac{1}{4}$$

Calculer $\sin\frac{\pi}{10}$

---

Méthode 1

Démontrons d'abord la formule : $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$.

$$\begin{aligned}\sin 3\alpha &= \sin(2\alpha+\alpha) = \sin 2\alpha\cos\alpha + \cos 2\alpha\sin\alpha = 2\sin\alpha\cos^2\alpha + \left(1-2\sin^2\alpha\right)\sin\alpha \\ &= 2\sin\alpha\cos^2\alpha + \sin\alpha - 2\sin^3\alpha = 2\sin\alpha\left(1-\sin^2\alpha\right) + \sin\alpha - 2\sin^3\alpha \\ &= 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha.\end{aligned}$$

Appliquons la formule en posant $\alpha = \frac{\pi}{10}$

$$\sin\alpha.\sin 3\alpha = \frac{1}{4} \Rightarrow 3\sin^2\alpha - 4\sin^4\alpha = \frac{1}{4} \Rightarrow 16\sin^4\alpha - 12\sin^2 + 1 = 0$$

Cette équation bicarrée a pour solutions $\sin^2\alpha = \frac{6\pm 2\sqrt{5}}{16} = \frac{5\pm 2\sqrt{5}+1}{16} = \frac{\left(\sqrt{5}\pm 1\right)^2}{16}$

$\Rightarrow \sin\alpha = \pm\frac{\sqrt{5}\pm 1}{4}$. Les racines négatives sont éliminées car $\sin\frac{\pi}{10} > 0$.

Il reste $\frac{\sqrt{5}+1}{4} \simeq 0.81$ qui doit aussi être éliminée car $\sin\frac{\pi}{10} < \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \simeq 0.71$.

Il reste finalement : $\boxed{\sin\frac{\pi}{10} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}}$

Méthode 2

Appliquons Simpson inverse :

$$\sin\frac{\pi}{10}.\sin\frac{3\pi}{10}=\frac{1}{4}\Rightarrow -\frac{1}{2}\left(\cos\frac{4\pi}{10}-\cos\frac{2\pi}{10}\right)=\frac{1}{4}\Rightarrow -2\cos\frac{2\pi}{5}+2\cos\frac{\pi}{5}-1=0$$

$\Rightarrow$ $$-2\left(2\cos^2\frac{\pi}{5}-1\right)+2\cos\frac{\pi}{5}-1=0\Rightarrow 4\cos^2\frac{\pi}{5}-2\cos\frac{\pi}{5}-1=0$$

$\Rightarrow$ $\cos\frac{\pi}{5}=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$ (on garde seulement la racine positive).

Dès lors, il reste à appliquer la formule $\sin\alpha=\sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{2}}$

$\Rightarrow$ $$\sin\frac{\pi}{10}=\sqrt{\frac{1-\frac{1+\sqrt{5}}{4}}{2}}=\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{8}}=\sqrt{\frac{6-2\sqrt{5}}{16}}=\frac{\sqrt{5-2\sqrt{5}+1}}{4}=\boxed{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$$