Exercices résolus de mathématiques.

Trigonométrie
Calcul numérique

TRI 49

EXTRI490-EXTRI499

http://matheux.ovh/Accueil.html

Jacques Collot
Jan Frans Broeckx – Nicole Berckmans
Fabienne Zoetard

Septembre 2019

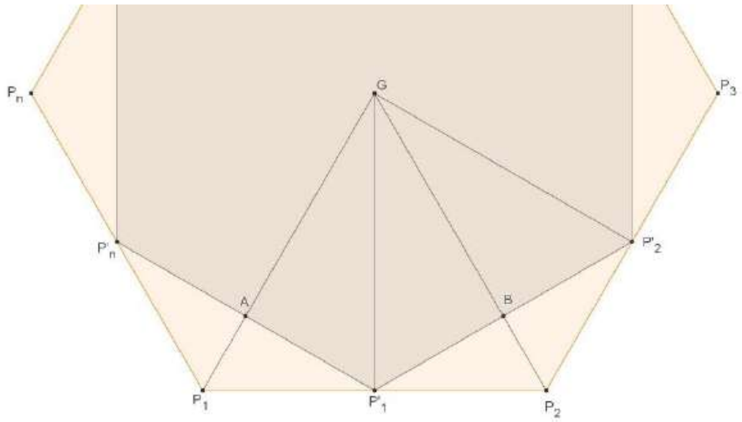
EXTRI490 – – EPB, ULB, Bruxelles, septembre 2019.

Soit $P_1, P_2, ..., P_n$ les sommets d'un polygone régulier convexe à n côtés $(\text{où } n \geq 3)$. Notons A_e l'aire de ce polygone et a la longueur d'un de ses côtés. Définissons les points $P_1^{'}, P_2^{'}, ..., P_n^{'}$ comme les milieux des côtés $P_1P_2, P_2P_3, ..., P_{n-1}P_n$, respectivement et notons A_i l'aire du polygone régulier à n côtés $P_1^{'}, P_2^{'}, ..., P_n^{'}$.

a) Calculer A_e et A_i.

b) Calculer

$$\lim_{n\to\infty} \frac{A_i}{A_e}$$



a) Triangle P_1GP_2 : $\widehat{P_1GP_2} = \dfrac{2\pi}{n}$; $\quad \widehat{P_1GP_1^{'}} = \dfrac{\pi}{n}$; $\quad \overline{GP_1^{'}} = \dfrac{a}{2}\cot\dfrac{\pi}{n}$; $\quad \Rightarrow \boxed{A_e = \dfrac{na^2}{4}\cot\dfrac{\pi}{n}}$

Triangle $P_1^{'}GB$: $\overline{GB} = \overline{GP_1^{'}}.\cos\dfrac{\pi}{n} = \dfrac{a}{2}\cot\dfrac{\pi}{n}.\cos\dfrac{\pi}{n}$; $\quad \overline{P_1^{'}B} = \overline{GP_1^{'}}.\sin\dfrac{\pi}{n} = \dfrac{a}{2}\cot\dfrac{\pi}{n}.\sin\dfrac{\pi}{n}$

$$\Rightarrow \quad A_i = n.\frac{\overline{GB}.\overline{P_1^{'}P_2^{'}}}{2} = n.\overline{GB}.\overline{P_1^{'}B} \quad \Rightarrow \quad \boxed{A_i = \frac{na^2}{4}.\sin\frac{\pi}{n}.\cos\frac{\pi}{n}.\cot^2\frac{\pi}{n}}$$

b) Par conséquent :

$$\frac{A_i}{A_e} = \frac{\dfrac{na^2}{4}.\sin\dfrac{\pi}{n}.\cos\dfrac{\pi}{n}.\cot^2\dfrac{\pi}{n}}{\dfrac{na^2}{4}\cot\dfrac{\pi}{n}} = \sin\frac{\pi}{n}.\cos\frac{\pi}{n}.\cot\frac{\pi}{n} = \cos^2\frac{\pi}{n}$$

Finalement : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{A_i}{A_e} = \lim\limits_{n\to+\infty} \cos^2\dfrac{\pi}{n} = \cos 0 = \boxed{1}$

Ce qui était prévisible.

---

22 novembre 2019

EXTRI491 – FACSA, ULiège, Liège, juillet 2019.

Deux poulies de rayons respectifs 5 cm et 8 cm sont disposées à 15 cm de distance centre à centre. Calculer la longueur L de la courroie autour de ces poulies.
La courroie est representee en gras sur la figure 2 et les points A, B, C et D representent les points de tangence de cette courroie avec les poulies.

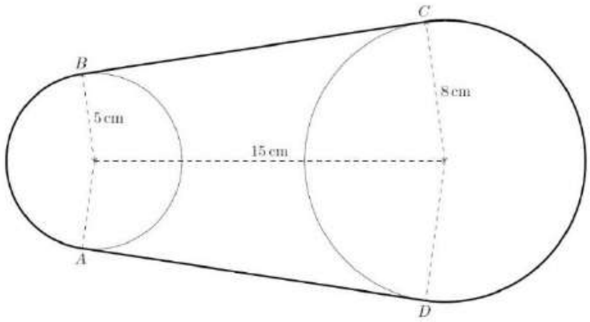


FIGURE 2 – Le système à deux poulies

Nous reprenons la solution proposée par l'université : Prof. P. Dewallef et Prof. Q. Louveaux :

On appelle O le centre de la poulie de rayon 5 cm. On appelle P le centre de la poulie de rayon 8 cm. Observons que, par définition de la tangence, les angles $\widehat{OBC}$ et $\widehat{PCB}$ sont de 90°.

Partant de O, on trace la parallèle à BC, qui intersecte le segment de droite PC en E (voir Figure). Observons que $OBCE$ est donc un rectangle et le triangle OEP un triangle rectangle. On en déduit que $\overline{CE}$ vaut 5 cm et $\overline{EP}$ vaut 3 cm. Dans le triangle rectangle OEP, on peut donc calculer

$$\begin{aligned}\overline{OE} &= \sqrt{\overline{OP}^2 - \overline{EP}^2} \\ &= \sqrt{15^2 - 3^2} \approx 14.7 \text{ cm.}\end{aligned}$$

On remarque que la figure est parfaitement symétrique selon l'axe OP. Dès lors, $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{OE} \approx 14.7$ cm.

Il nous reste à calculer les longueurs des arcs $\widehat{BA}$ et $\widehat{CD}$. Pour ce faire, on doit calculer les angles $\widehat{BOA}$ et $\widehat{DPC}$. L'angle $\widehat{EOP}$ peut se calculer dans le triangle rectangle. On a $\sin(\widehat{EOP}) = \frac{\overline{EP}}{\overline{OP}} = \frac{3}{15}$. Donc $\widehat{EOP} \approx 11.54°$. Par symétrie de la figure, l'angle permettant de déterminer l'arc de cercle vaut

$$\widehat{BOA} = 360° - 2 \cdot (90° + \widehat{EOP}) \approx 156.93°.$$

On peut donc calculer

$$\widehat{BA} = 2\pi r \frac{\widehat{BOA}}{360} = 10\pi \frac{156.93}{360} \approx 13.7 \text{ cm.}$$

Pour l'autre arc, on calcule l'angle $\widehat{EPO}$ qui est le complémentaire de $\widehat{EOP}$ donc $\widehat{EPO} = 90° - 11.54° \approx 78.46°$. L'angle qui intercepte l'arc de cercle vaut

donc $360° - 2 \cdot 78.46° \approx 203.08°$ L'arc de cercle recherché vaut donc

$$\widehat{CD} = 2\pi \cdot 8 \cdot \frac{203.08}{360} \approx 28.4\text{cm}.$$

Le périmètre total s'obtient donc comme la somme des deux arcs de cercle, de $\overline{BC}$ et de $\overline{AD}$, c'est-à-dire $14.7 + 14.7 + 13.7 + 28.4 \approx 71.5$ cm.

Le 07 novembre 2019

EXTRI492 FACSA, ULiège, Liège, septembre 2019.

Lors d'un match de football, un coup franc doit être tiré du point A situé à 10 mètres à droite du poteau du gardien et à 20 mètres dans la profondeur du terrain (voir Figure). On suppose que le gardien occupe une largeur de 1 mètre sur sa ligne de but, entre les points B et C et que le tir s'effectuera en ligne droite en négligeant la présence d'autres joueurs sur le terrain. Déterminer la distance $x = \overline{DC}$ où doit se placer le gardien afin de couper 2 degrés de l'angle de tir de l'attaquant, c'est-à-dire, afin que l'angle $\widehat{BAC}$ vale 2 degrés.

Nous reprenons la solution proposée par l'université : Prof. P. Dewallef et Prof. Q. Louveaux :

On note α l'angle $\widehat{CAD}$ et x la longueur recherchée $\overline{DC}$.
Dans le triangle ACD, on peut exprimer la tangente d'α comme $\tan(\alpha) = \frac{x}{20}$.
Dans le triangle ABD, on peut exprimer la tangente de l'angle $\widehat{BAD}$ comme $\tan(\alpha + 2°) = \frac{x+1}{20}$, en utilisant le fait que l'angle $\widehat{BAC}$ vaut 2° et que la distance $\overline{BC} = 1\ m$.
On peut ensuite utiliser la formule d'addition des tangentes sur la dernière expression et écrire

$$\tan(\alpha + 2°) = \frac{\tan\alpha + \tan 2°}{1 - \tan\alpha \tan 2°}. \tag{2}$$

En remplaçant $\tan\alpha = \frac{x}{20}$ dans (2), et, afin de soulager la notation, $\tan 2°$ par t, on obtient

$$\frac{\frac{x}{20} + t}{1 - t\frac{x}{20}} = \frac{x+1}{20}$$

$$\frac{x + 20t}{20 - tx} = \frac{x+1}{20}. \tag{3}$$

Remarquons au passage que x doit être différent de $\frac{20}{\tan 2^\circ}$ pour que l'expression ait du sens, ce qui correspond à un angle α de 88°. En simplifiant (3), on obtient successivement

$$20x + 400t = (20 - tx)(x + 1)$$
$$20x + 400t = 20x + 20 - tx^2 - tx,$$

ce qui, après simplification, donne l'équation du second degré

$$tx^2 + tx + 400t - 20 = 0.$$

On calcule le discriminant $\Delta = t^2 - 4t(400t - 20) = -1599t^2 + 80t$, ce qui, en remplaçant $t = \tan 2^\circ \approx 0.0349$ nous donne $\Delta \approx 0.8437$. On obtient donc les deux solutions

$$x = \frac{-t \pm \sqrt{\Delta}}{2t},$$

soit 12.652 et -13.652. La deuxième solution est à rejeter car elle signifierait que le gardien est en dehors de son goal. On obtient donc finalement $x \approx 12.652\ m$.

Le 12 novembre 2019

EXTRI493 – Polytech, UMons, Mons, septembre 2015.

Résoudre l'équation trigonométrique suivante :

$$\sqrt{3}\sin(3x) - \cos(3x) = \sqrt{3}$$

Représenter les solutions sur le cercle trigonométrique.

Nous reprenons la solution proposée par l'université https://web.umons.ac.be/app/uploads/sites/6/2020/02/Trigonometrie_2014-2017_siteweb_2020.pdf.

Si les deux membres de l'équation sont divisés par 2, des valeurs remarquables de sin(x) et cos(x) apparaissent.

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\sin(3x) - \frac{1}{2}\cos(3x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin(3x) - \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos(3x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Or,

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) \rightarrow \sin(a)\sin(b) - \cos(a)\cos(b) = -\cos(a+b)$$

Donc, il vient :

$$\cos\left(\frac{\pi}{3} + 3x\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Premier ensemble de solutions :

$$\frac{\pi}{3} + 3x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \rightarrow \boxed{x = \frac{3\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3}}$$

Second ensemble de solutions :

$$\frac{\pi}{3} + 3x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \rightarrow \boxed{x = \frac{5\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3}}$$

Le 1 mars 2020

EXTRI494 – Polytech, UMons, Mons, septembre 2015.

Vérifier l'identité suivante :

$$\left(\frac{1}{\sin(x)}-\cot(x)\right)^2=\frac{1-\cos(x)}{1+\cos(x)}$$

Nous reprenons la solution proposée par l'université https://web.umons.ac.be/app/uploads/sites/6/2020/02/Trigonometrie_2014-2017_siteweb_2020.pdf.

En développant le carré du terme de gauche :

$$=\frac{1}{\sin^2(x)}+\cot^2(x)-2\frac{1}{\sin(x)}\cot(x)$$

$$=\frac{1}{\sin^2(x)}[1-2\cos(x)+\cos^2(x)]$$

$$=\frac{(1-\cos(x))^2}{\sin^2(x)}$$

$$=\frac{(1-\cos(x))^2}{1-\cos^2(x)}=\frac{1-\cos(x)}{1+\cos(x)}$$

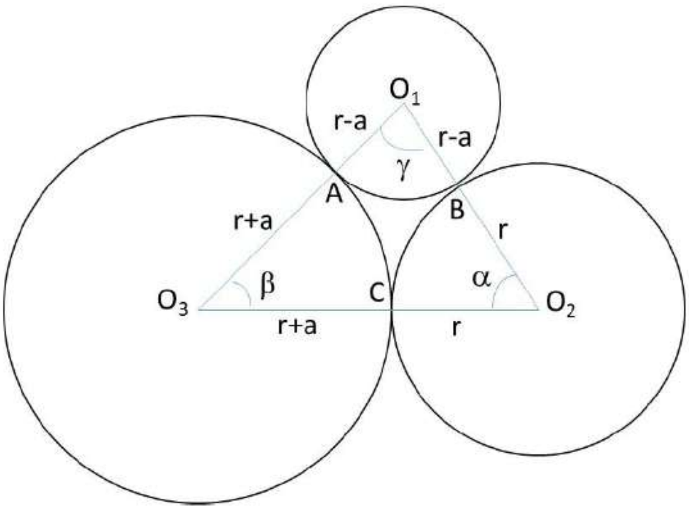
cqfd

Le 1 mars 2020

EXTRI495 – Polytech, UMons, Mons, septembre 2015.

Trois boîtes de conserves de forme parfaitement cylindrique sont rangées verticalement de manière compacte sur une étagère plane.
Les rayons de ces boîtes, tangentes deux à deux, sont en progression arithmétique de raison *a*.
De plus, un des angles du triangle formé par les centres des bases de ces trois boîtes vaut 120°.
Déterminer la valeur numérique du rapport entre la raison a et le rayon de la boîte dont la base est de dimension intermédiaire.

Nous reprenons la solution proposée par l'université https://web.umons.ac.be/app/uploads/sites/6/2020/02/Trigonometrie_2014-2017_siteweb_2020.pdf.



Par construction : $O_1A = (r - a)$, $O_2B = r$ et $O_3C = (r + a)$.

Dès lors, le triangle $O_1O_2O_3$ a pour côtés : $O_1O_2 = (2r - a)$, $O_2O_3 = (2r + a)$ et $O_3O_1 = 2r$.

La loi des sinus indique que l'angle de 120° (= γ) se situe face au côté le plus long du triangle $O_1O_2O_3$.

Le triangle $O_1O_2O_3$ est quelconque. Donc, en utilisant $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$ avec les notations de cet exercice, il vient :
$(2r + a)^2 = (2r)^2 + (2r - a)^2 - 2(2r)(2r - a)\cos\gamma$

En remplaçant $\cos\gamma = \cos 120° = -0,5$, l'équation se réduit à 8r = 10a, et donc : $\boxed{\frac{a}{r} = 0.8}$

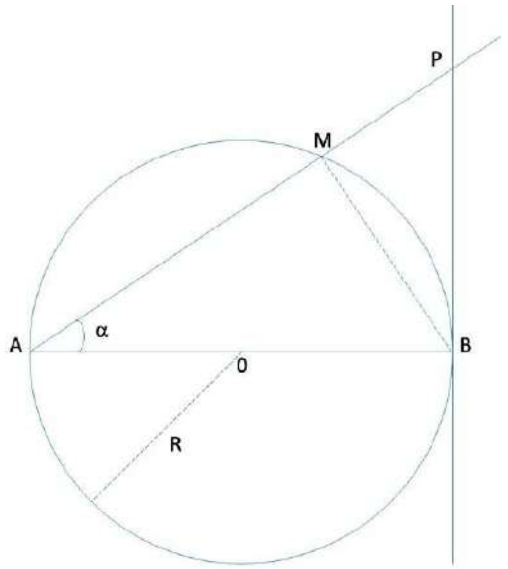
Le 1 mars 2020

EXTRI496 – Polytech, UMons, Mons, septembre 2016.

Soient le cercle de centre O et de rayon R, un diamètre AB de ce cercle et la tangente au point B de ce cercle. Par le point A, on mène une sécante coupant le cercle au point M et la tangente au point P, de telle sorte que $(2\,AM + MP) = k$.

Discuter de la valeur de l'angle $\alpha = \widehat{BAM}$ en fonction des valeurs relatives de k et R.

Nous reprenons la solution proposée par l'université
https://web.umons.ac.be/app/uploads/sites/6/2020/02/Trigonometrie_2014-2017_siteweb_2020.pdf.



La condition s'écrit également : 2 AM + MP = 2 AM + (AP - AM) = AM + AP = k (1)

Dans le triangle AMB rectangle en M : $\cos\alpha = \frac{AM}{2R} \rightarrow AM = 2R\cos\alpha$

Dans le triangle APB rectangle en B : $\cos\alpha = \frac{2R}{AP} \rightarrow AP = \frac{2R}{\cos\alpha}$

En remplaçant AM et AP dans (1) : $2R\cos\alpha + \frac{2R}{\cos\alpha} = k$ (2)

Cette équation du second ordre en l'inconnue cos α possède deux solutions :

$$\cos\alpha_1 = \frac{k}{4R} + \frac{\sqrt{k^2 - 16R^2}}{4R} \quad \text{et} \quad \cos\alpha_2 = \frac{k}{4R} - \frac{\sqrt{k^2 - 16R^2}}{4R}$$

Les expressions possibles de l'angle sont donc :

$$\alpha_1 = \cos^{-1}\left(\frac{k}{4R} + \frac{\sqrt{k^2 - 16R^2}}{4R}\right) \quad \text{et} \quad \alpha_2 = \cos^{-1}\left(\frac{k}{4R} - \frac{\sqrt{k^2 - 16R^2}}{4R}\right)$$

Discussion

Deux conditions doivent être respectées pour qu'une solution existe : les racines de l'équation du second ordre (2) doivent être réelles et comprises entre -1 et +1.

Donc :

1. $\sqrt{k^2 - 16R^2} \geq 0 \rightarrow \left(\frac{k}{R}\right)^2 \geq 16 \rightarrow \boxed{\frac{k}{R} \geq 4}\ ou\ \frac{k}{R} \leq -4$
   La seconde condition ne respecte pas la nature du problème (k et R sont des longueurs et sont donc des valeurs positives) et est à retirer.
2. $-1 \leq \cos\alpha_1 = \frac{k}{4R} + \frac{\sqrt{k^2-16R^2}}{4R} \leq +1$
   Puisque k/R est toujours plus grand ou égal à 4 (cf. point 1 de la discussion), le premier terme de l'expression de cos α_1 est toujours plus grand ou égal à l'unité, ce qui rend la solution α_1 à ce problème impossible.
3. $-1 \leq \cos\alpha_2 = \frac{k}{4R} - \frac{\sqrt{k^2-16R^2}}{4R} \leq +1$
   On vérifie d'abord que $\frac{k}{4R} - \frac{\sqrt{k^2-16R^2}}{4R} \leq +1$. La résolution de cette inéquation mène à l'inégalité $\frac{k}{R} \geq 4$, toujours vérifiée étant donné le point 1 de cette discussion.
   On vérifie ensuite que $-1 \leq \frac{k}{4R} - \frac{\sqrt{k^2-16R^2}}{4R}$. La résolution de cette inéquation mène à l'inégalité $\frac{k}{R} \geq -4$, également toujours vérifiée étant donné le point 1 de cette discussion.

Conclusion : seule la solution α_2 est admissible, pour autant que $\frac{k}{R} \geq 4$

Le 1 mars 2020

EXTRI497 – Polytech, UMons, Mons, juillet 2016.

Démontrer que si la relation ci-après est satisfaite, alors le triangle *ABC* est rectangle :

$$1+\cos B=\sin A+\sin C$$

Nous reprenons la solution proposée par l'université https://web.umons.ac.be/app/uploads/sites/6/2020/02/Trigonometrie_2014-2017_siteweb_2020.pdf.

En utilisant les formules trigonométriques donnant cos(2a) et sin p+sin q, on peut écrire :

$$\cos\left(2\cdot\frac{B}{2}\right)=2\cos^2\left(\frac{B}{2}\right)-1 \quad \text{et} \quad \sin A+\sin C=2\sin\left(\frac{A+C}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{A-C}{2}\right)$$

Ainsi, la relation de départ devient :

$$\cos^2\left(\frac{B}{2}\right)=\sin\left(\frac{A+C}{2}\right)\cos\left(\frac{A-C}{2}\right)$$

et, comme dans tout triangle ABC : $A+B+C=180°$

$$\begin{aligned}\cos^2\left(\frac{B}{2}\right) &= \sin\left(90°-\frac{B}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{A-C}{2}\right)\\ &= \cos\left(\frac{B}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{A-C}{2}\right)\end{aligned}$$

ou encore, en simplifiant :

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{B}{2}\right)=\cos\left(\frac{A-C}{2}\right) \quad &\rightarrow \quad B=A-C \quad \text{ou} \quad B=-(A-C)\\ &\rightarrow \quad A=\underbrace{B+C}_{180°-A} \quad \text{ou} \quad C=\underbrace{A+B}_{180°-C}\\ &\rightarrow \quad A=90° \quad \text{ou} \quad C=90°\end{aligned}$$

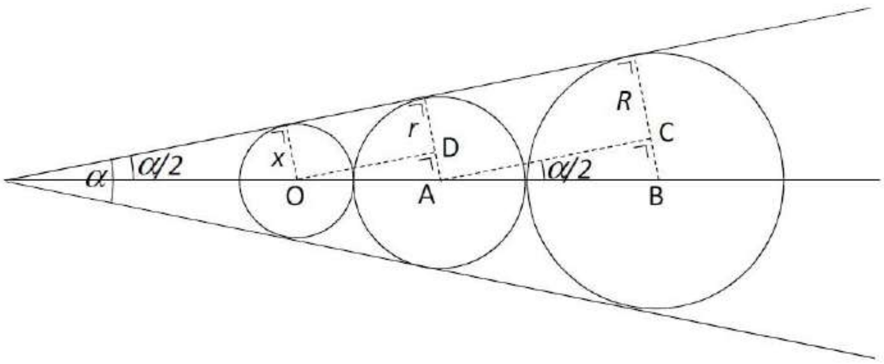
Le triangle ABC est donc rectangle en A ou en C.

Le 1 mars 2020

EXTRI498 – Polytech, UMons, Mons, juillet 2016.

Soit deux cercles tangents entre eux et de rayons différents, ainsi que les deux droites tangentes de manière commune à ces deux cercles. Exprimer l'angle α que forment ces deux droites en fonction des rayons respectifs r et R des deux cercles.
Soit un troisième cercle, tangent au plus petit des deux cercles précédents et également tangent aux deux droites précédentes. Exprimer le rayon x de ce troisième cercle en fonction des rayons respectifs r et R des deux premiers cercles.
Calculer la valeur numérique de l'angle α ainsi que celle du rayon x si $r = 4$ cm et $R = 12$ cm.

Nous reprenons la solution proposée par l'université https://web.umons.ac.be/app/uploads/sites/6/2020/02/Trigonometrie_2014-2017_siteweb_2020.pdf.



Dans le triangle ABC, rectangle en C : $\boxed{\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{BC}{AB} = \frac{R-r}{R+r}}$ (1)

ce qui correspond à la première relation demandée.

De la même manière, dans le triangle OAD, rectangle en D : $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{AD}{OA} = \frac{r-x}{r+x}$ (2)

En égalant membre à membre les expressions (1) et (2), il vient :

$$\frac{R-r}{R+r} = \frac{r-x}{r+x}$$

$$R\cdot(r+x) - r\cdot(r+x) = R\cdot(r-x) + r\cdot(r-x)$$

$$2x \cdot R = 2\,r^2 \quad \rightarrow \quad \boxed{x = \frac{r^2}{R}} \tag{2}$$

Avec les valeurs numériques *r = 4 cm* et *R = 12 cm*, on obtient :

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{12-4}{12+4} = \frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad \frac{\alpha}{2} = 30°$$

$$\rightarrow \quad \boxed{\alpha = 60°}$$

et

$$x = \frac{4^2}{12} = \frac{4}{3} \quad \rightarrow \quad \boxed{x = 1{,}33\ cm}$$

Le 1 mars 2020

EXTRI499 – Polytech, UMons, Mons, juillet 2017.

Démontrer que le triangle ABC est équilatéral si les conditions suivantes sont remplies :

$$\frac{b^3+c^3}{b+c}=a^2 \quad \text{et} \quad \sin(B)\sin(C)=\frac{3}{4}$$

Nous reprenons la solution proposée par l'université https://web.umons.ac.be/app/uploads/sites/6/2020/02/Trigonometrie_2014-2017_siteweb_2020.pdf.

En utilisant l'identité remarquable de degré 3 :

$b^3 + c^3 = (b + c)(b^2 + c^2 - bc)$

la première condition peut également s'écrire :

$b^2 + c^2 - bc = a^2$

D'autre part, on a dans tout triangle ABC :

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

Par conséquent : $b^2 + c^2 - bc = b^2 + c^2 - 2bc\cos A \quad \rightarrow \quad \cos A = \frac{1}{2}$

$\rightarrow \quad A = 60°$ (1)

et comme : $A + B + C = 180° \quad \rightarrow \quad B + C = 120°$

Considérons à présent la deuxième condition. En développant le membre de gauche, il vient :

$$\sin B \sin C = \frac{1}{2}\Big(\cos(B - C) - \cos\underbrace{(B + C)}_{120°}\Big)$$

$$= \frac{1}{2}\cos(B - C) + \frac{1}{4}$$

Dès lors : $\frac{1}{2}\cos(B - C) + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \quad \rightarrow \quad \cos(B - C) = 1$

$\rightarrow \quad B - C = 0°$

$\rightarrow \quad B = C$

Et puisque : $B + C = 120° \quad \rightarrow \quad B = C = 60°$ (2)

Le triangle ABC est donc bien équilatéral puisque, selon (1) et (2), tous les angles valent 60°.

Le 1 mars 2020