Exercices résolus de mathématiques.

Trigonométrie
Calcul numérique

TRI 5

EXTRI050 – EXTRI059

http://www.matheux.be.tf

Jacques Collot

1 avril 03

EXTRI050 – POLYTECH, UMONS, Mons, questions-types 2000-2001.
POLYTECH, UMONS, Mons, septembre 2016

Démontrer que l'expression est indépendante de *a*.

$$E = \frac{2\sin 3a}{4\sin a \sin(60+a)\sin(60-a)}$$

$$\begin{aligned}\sin 3a = \sin(2a+a) &= \sin 2a \cos a + \cos 2a \sin a \\ &= 2\sin a \cos^2 a + (\cos^2 a - \sin^2 a)\sin a \\ &= 2\sin a\,(4\cos^2 a - 1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin(60+a)\sin(60-a) &= \frac{1}{2}\cos(60+a-60+a) - \frac{1}{2}\cos(60+a+60-a) \\ &= \frac{1}{2}\cos 2a - \frac{1}{2}\cos 120 \\ &= \frac{1}{2}\cos 2a + \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{4}\left[4\cos^2 a - 1\right]\end{aligned}$$

$$E = \frac{2\sin a\,(4\cos^2 a - 1)}{4\sin a\,\frac{1}{4}\left[4\cos^2 a - 1\right]} = 2$$

EXTRI051 – Mons, questions-types 2000-2001.

Si les angles d'un triangle vérifient la relation.

$$2\tan B = \tan A + \tan C$$

Montrer que

$$2\cos B = \cos(A - C)$$

$$B = \pi - (A + C) \quad \rightarrow \quad \sin(A + C) = \sin B$$

$$\tan A + \tan C = \frac{\sin B}{\cos A \cos C} = 2\tan B = 2\frac{\sin B}{\cos B}$$

$$\rightarrow \quad \cos B = 2\cos A \cos C \qquad (1)$$

$$\text{or } \cos B = -\cos(A + C) = -\cos A \cos C + \sin A \sin C \qquad (2)$$

De (1) et (2) : $\sin A \sin C = 3\cos A \cos C$

Donc

$\cos B = 2\cos A \cos C$ multiplions par 2 $\rightarrow$

$$\begin{aligned}2\cos B &= 4\cos A \cos C \\ &= \cos A \cos C + 3\cos A \cos C \\ &= \cos A \cos C + \sin A \sin C \\ &= \sin(A - C)\end{aligned}$$

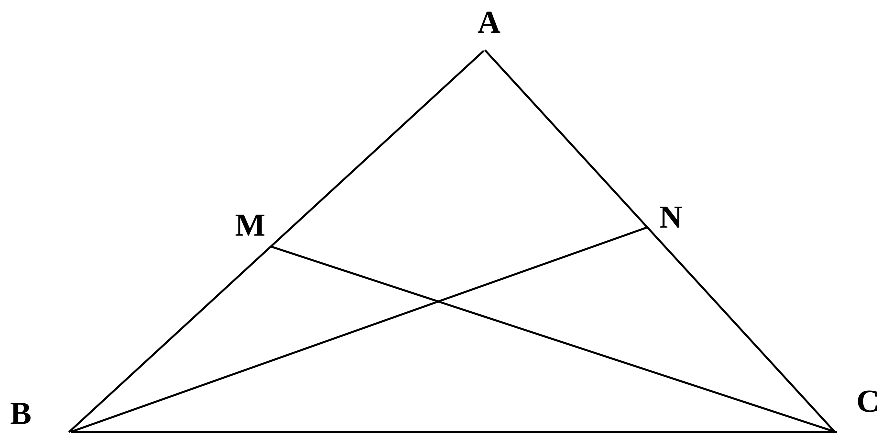
EXTRI052 – Mons, questions-types 2000-2001.
Louvain, juillet 2003

Dans un triangle rectangle, on donne l'hypoténuse a et le produit k² des bissectrices intérieures des angles B et C.

a) Démontrer que

$$\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=\frac{k^2}{4a^2}$$

b) Calculer B et C si a = 3 m ; $k^2 = 5\ m^2$



$a)\quad b = a\sin B = 2a\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}$

$c = a\sin C = 2a\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$

$bc = 4a^2\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$

$= 4a^2\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\frac{b}{MC}\frac{c}{BN}$

or $\quad MC.BN = k^2 \quad\rightarrow\quad \sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} = \frac{k^2}{4a^2}$

$b)\quad \sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} = \frac{k^2}{4a^2} = \frac{5}{4\times 9} = 0.1389$

or $\; B + C = \frac{\pi}{2} \quad\rightarrow\quad \frac{C}{2} = \frac{\pi}{4} - \frac{B}{2}$

$\rightarrow\quad \sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} = \sin\frac{B}{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{B}{2}\right) = \sin\frac{B}{2}\left[\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{B}{2} - \cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{B}{2}\right]$

$\rightarrow\quad \sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2} - \sin^2\frac{B}{2} = 0.1389\times\frac{2}{\sqrt{2}} = 0.1964$

$\frac{1}{2}\sin B - \frac{1}{2}(1-\cos B) = 0.1964$

$\sin B + \cos B = 1.3928$

C'est une équation de type $a\sin x + b\cos x = c$

donc $\quad \tan\psi = 1 \quad\rightarrow\quad \psi = 45 \quad\rightarrow\quad \frac{1}{\cos 45}\cos(B - 45) = 1.3928$

$\rightarrow\quad B = 54.97° \quad$ et $\quad C = 35.03°$

EXTRI053 – Mons, questions-types 2000-2001.

Dans un triangle ABC, on constate que la longueur du côté AB vaut deux fois la longueur du côté AC.

a) Démontrer que cette propriété est possible pour toute valeur de l'angle A.
b) Résoudre le triangle si BC = 5 m et A = 50°

$a)\quad CB^2 = AC^2 + AB^2 - 2AB \,.\, AC \cos A$

$$= AC^2 + 4AB^2 - 4\, AC^2 \cos A$$

$$= AC^2 \left(5 - 4 \cos A\right)$$

$$CB = AC\sqrt{5 - 4\cos A}$$

Comme $\cos A$ est compris entre -1 et 1, le radicand de la racine est toujours positive

Il y donc toujours une solution pour *CB*, quelque soit la valeur de *A*

$b)\quad 5 = AC\sqrt{5-4\cos 50} \quad \rightarrow \quad AC = 3.21 \quad \text{et} \quad AB \; = 6.24$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} \quad \rightarrow \quad \sin B = \frac{b}{a}\sin A = \frac{3.21}{5}\sin 50$$

$$\rightarrow \quad B = 29.44° \quad \text{et} \quad C = 100.56°$$

Modifié le 31 mars 2011 (Fabienne Zoetard)

EXTRI054 – FACSA, ULG, Liège, juillet 2001.
Polytech, Umons, Mons, septembre 2013

Enoncé de FACSA

Vérifier les identités suivantes.

$$\tan\left(45°-\frac{a}{2}\right)=\frac{1-\sin a}{\cos a}=\frac{\cos a}{1+\sin a}$$

Enoncé de POLYTECH

Vérifier les identités suivantes.

$$\tan\left(45°-\frac{a}{2}\right)=\frac{1-\sin a}{\cos a}$$

Vérifions d'abord

$$\tan\left(45°-\frac{a}{2}\right)=\frac{1-\sin a}{\cos a}\Rightarrow\frac{\tan 45°-\tan\frac{a}{2}}{1+\tan 45°\tan\frac{a}{2}}=\frac{1-2\sin\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2}}{\cos^2\frac{a}{2}-\sin^2\frac{a}{2}}$$

$$\Rightarrow\frac{1-\tan\frac{a}{2}}{1+\tan\frac{a}{2}}=\frac{\frac{1}{\cos^2\frac{a}{2}}-2\tan\frac{a}{2}}{1-\tan^2\frac{a}{2}}\Rightarrow\frac{1-\tan\frac{a}{2}}{1+\tan\frac{a}{2}}=\frac{\tan^2\frac{a}{2}+1-2\tan\frac{a}{2}}{1-\tan^2\frac{a}{2}}$$

$$\Rightarrow\frac{1-\tan\frac{a}{2}}{1+\tan\frac{a}{2}}=\frac{\left(\tan\frac{a}{2}-1\right)^2}{1-\tan^2\frac{a}{2}}\Rightarrow\frac{1-\tan\frac{a}{2}}{1+\tan\frac{a}{2}}=\frac{1-\tan\frac{a}{2}}{1+\tan\frac{a}{2}}\qquad \textit{CQFD}$$

Pour la deuxième égalité, on a :

$$\cos^2 a+\sin^2 a=1\ \Rightarrow\ 1-\sin^2 a=\cos^2 a\Rightarrow\ (1-\sin a)(1+\sin a)=\cos^2 a$$

$$\Rightarrow\frac{1-\sin a}{\cos a}=\frac{\cos a}{1+\sin a}\qquad \textit{CQFD}$$

Solution proposée par Fabienne Zoetard

$$\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{a}{2}\right)=\frac{1-\tan\frac{a}{2}}{1+\tan\frac{a}{2}}=\frac{1-\dfrac{\sin\frac{a}{2}}{\cos\frac{a}{2}}}{1+\dfrac{\sin\frac{a}{2}}{\cos\frac{a}{2}}}=\frac{\cos\frac{a}{2}-\sin\frac{a}{2}}{\cos\frac{a}{2}+\sin\frac{a}{2}}=\frac{\cos\frac{a}{2}-\sin\frac{a}{2}}{\cos\frac{a}{2}+\sin\frac{a}{2}}\cdot\frac{\cos\frac{a}{2}-\sin\frac{a}{2}}{\cos\frac{a}{2}-\sin\frac{a}{2}}$$

$$=\frac{\cos^2\frac{a}{2}-2\sin\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2}+\sin^2\frac{a}{2}}{\cos^2\frac{a}{2}-\sin^2\frac{a}{2}}=\frac{1-\sin a}{\cos a}$$

Solution proposée par Robert Moulan

La deuxième égalité est immédiate.

D'autre part :

$$m_1 = \frac{\tan 45° - \tan\frac{a}{2}}{1+\tan 45° \tan\frac{a}{2}} = \frac{1-\tan\frac{a}{2}}{1+\tan\frac{a}{2}} = \frac{\cos\frac{a}{2}-\sin\frac{a}{2}}{\cos\frac{a}{2}+\sin\frac{a}{2}} = \frac{\cos\frac{a}{2}-\sin\frac{a}{2}}{\cos\frac{a}{2}+\sin\frac{a}{2}}.\frac{\cos\frac{a}{2}+\sin\frac{a}{2}}{\cos\frac{a}{2}+\sin\frac{a}{2}}$$

$$= \frac{\cos^2\frac{a}{2}-\sin^2\frac{a}{2}}{1+2\sin\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2}} = \frac{\cos a}{1+\sin a} = m_3$$

Ou encore avec $t = \tan\frac{a}{2}$

$$m_1 = \frac{1-t}{1+t}$$

$$m_3 = \frac{\frac{1-t^2}{1+t^2}}{1+\frac{2t}{1+t^2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2+2t} = \frac{(1-t)(1+t)}{(1+t)^2} = \frac{1-t}{1+t} = m_1$$

Modifié le 21 octobre 2013 (Fabienne Zoetard). Modifié le 2 février 2018 (Robert Moulan)

EXTRI055 – FACSA, ULG, Liège, juillet 2001.

Soient

$$m^2 = \cos^2\beta + \sin^2\alpha \sin^2\beta \qquad (1)$$
$$n^2 = \cos^2\alpha \qquad (2)$$
$$p^2 = \sin^2\beta + \sin^2\alpha \cos^2\beta \qquad (3)$$

et les équations

$$4m^2 = n^2 = p^2 \qquad (4)$$

On demande de calculer les valeurs des angles α et β et de les représenter sur le cercle trigonométrique

---

De (1) et (3) :

$$m^2 - p^2 = \cos^2\beta - \sin^2\beta + \sin^2\alpha\left(\sin^2\beta - \cos^2\beta\right)$$
$$= \left(\cos^2\beta - \sin^2\beta\right)\left(1 - \sin^2\alpha\right)$$
$$= \left(2\cos^2\beta - 1\right)\cos^2\alpha = \left(2\cos^2\beta - 1\right)n^2$$

$$\Rightarrow \cos^2\beta = \frac{m^2 - p^2}{n^2} + 1 = \frac{m^2 - p^2 + n^2}{n^2}$$

Or $p^2 = n^2 = 4m^2 \Rightarrow \cos^2\beta = \dfrac{m^2}{2n^2} = \dfrac{m^2}{8m^2} = \dfrac{1}{8} \rightarrow \sin^2\beta = \dfrac{7}{8}$

Les équations deviennent :

$$m^2 = \frac{1}{8} + \frac{7}{8}\sin^2\alpha \qquad (4)$$
$$4m^2 = \cos^2\alpha \qquad (5)$$
$$4m^2 = \frac{7}{8} + \frac{1}{8}\sin^2\alpha \qquad (6)$$

$$\text{de } (4) \text{ et } (6) \Rightarrow \frac{1}{4} = \frac{\frac{1}{8} + \frac{7}{8}\sin^2\alpha}{\frac{7}{8} + \frac{1}{8}\sin^2\alpha} = \frac{1 + 7\sin^2\alpha}{7 + \sin^2\alpha}$$

$$\Rightarrow 7 + \sin^2\alpha = 4 + 28\sin^2\alpha \Rightarrow \sin^2\alpha = \frac{1}{9} \Rightarrow \cos^2\alpha = \frac{8}{9}$$

1) $\cos^2\beta = \dfrac{1}{8}$ et $\sin^2\beta = \dfrac{7}{8} \Rightarrow \cos\beta = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ et $\sin\beta = \pm\dfrac{\sqrt{14}}{4}$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} \beta = 69.2952 + k\,180 \\ \beta = 110.7048 + k\,180 \end{array}}$$

2) $\sin^2\alpha = \dfrac{1}{9}$ et $\cos^2\alpha = \dfrac{8}{9} \Rightarrow \sin\alpha = \pm\dfrac{1}{3} \Rightarrow \cos\alpha = \pm\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} \alpha = 19.4712 + k\,180 \\ \alpha = 160.5288 + k\,180 \end{array}}$$

Le lecteur représentera les solutions sur le cercle trigonométrique.

Solution proposée par Robert Moulan

$(4) \rightarrow 4\cos^2\beta + 4\sin^2\alpha.\sin^2\beta = \cos^2\alpha = \sin^2\beta + \sin^2\alpha.\cos^2\beta$

Choisissons de ne garder que $\sin^2\beta$ et $\cos^2\alpha$.

$4 - 4\sin^2\beta + 4\left(1-\cos^2\alpha\right).\sin^2\beta = \cos^2\alpha = \sin^2\beta + \left(1-\cos^2\alpha\right)\left(1-\sin^2\beta\right)$

$4 \cancel{-4\sin^2\beta} \cancel{+4\sin^2\beta} - 4\cos^2\alpha.\sin^2\beta = \cos^2\alpha = \cancel{\sin^2\beta} + 1 - \cos^2\alpha \cancel{-\sin^2\beta} + \cos^2\alpha.\sin^2\beta$

$4 - 4\cos^2\alpha.\sin^2\beta = \cos^2\alpha = +1 - \cos^2\alpha + \cos^2\alpha.\sin^2\beta$

Soit en posant : $C = \cos^2\alpha$ et $S = \sin^2\beta$

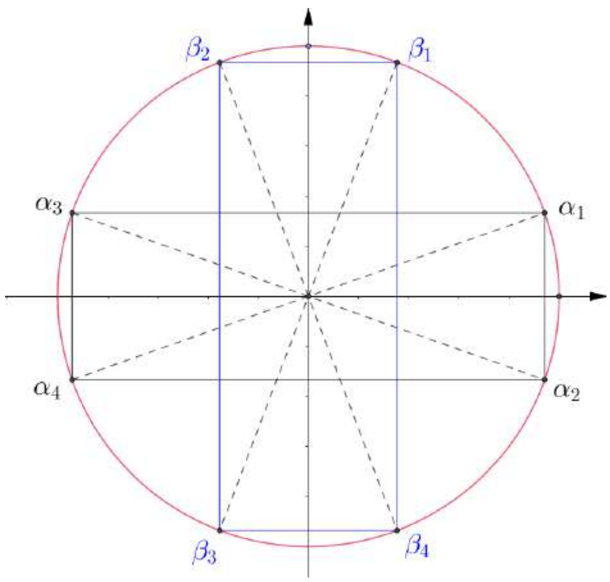
$$4 - 4C.S = C = 1 - C + C.S \qquad (5) \Rightarrow \begin{cases} 4 - 4C.S = C & (6) \\ C = 1 - C + C.S\,(7) \end{cases}$$

$$(7) \Rightarrow C.S = 2C - 1 \Rightarrow (6) \Rightarrow 4 - 8C + 4 = C \Rightarrow C = \frac{8}{9} = \cos^2\alpha$$

$$\bullet\ \cos\alpha = \pm\frac{2\sqrt{2}}{3} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \pm 19°28'16'' + 360°.k \\ \alpha = \pm 160°31'44'' + 360°.k \end{cases}$$

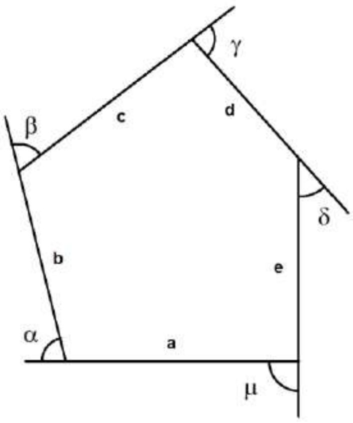
$$(5) \Rightarrow 4 - \frac{32}{9}S = \frac{8}{9} \Rightarrow S = \frac{7}{8}$$

$$\bullet \sin\beta = \pm\frac{\sqrt{14}}{4} \Rightarrow \begin{cases} \beta = \begin{cases} 69°17'43'' + 360°.k \\ 110° + 42'17'' + 360°.k \end{cases} \\ \beta = \begin{cases} -69°17'43'' + 360°.k \\ 249°17'43'' + 360°.k \end{cases} \end{cases}$$



EXTRI056 – FACSA, ULG, Liège, juillet 2001.

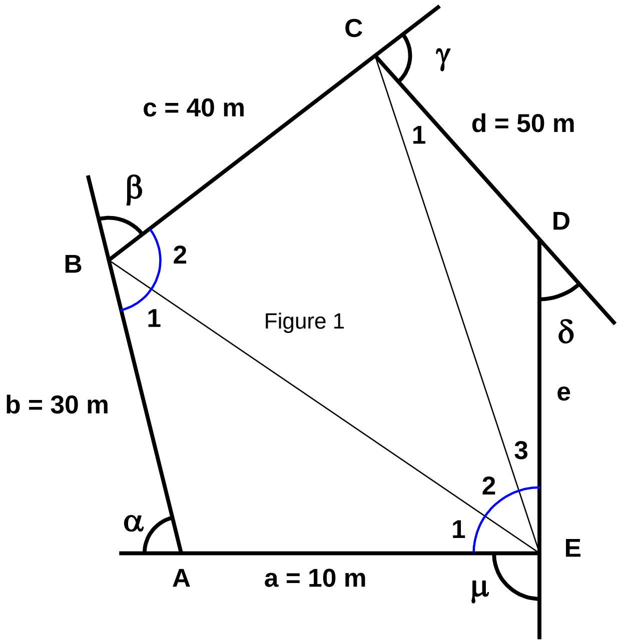
Un pentagone volontairement déformé est défini comme sur la figure ci-dessous.
Calculer γ, δ, $(\alpha + \beta + \gamma + \delta)$, le périmètre et la surface du pentagone.



Données:

$a = 10$ m
$b = 30$ m
$c = 40$ m
$d = 50$ m

$\alpha = 45°$
$\beta = 60°$
$\mu = 90°$



Première méthode (Voir figure 1)

$BE^2 = 10^2 + 30^2 - 2 \times 10 \times 30 \times \cos 135° \Rightarrow BE = 37.7394\ m$

$\sin B_1 = \dfrac{10.\sin 135°}{37.7394} \Rightarrow B_1 = 10.7991° \Rightarrow B_2 = 109.2009°$

$E_1 = 180° - 135° - 10.7991° = 34.2009°$

$EC^2 = 40^2 + 37.7394^2 - 2 \times 37.7394 \times 40 \times \cos 109.2009° \Rightarrow EC = 63.3815\ m$

$\sin \widehat{E_2} = \dfrac{40 \times \sin 109.2009°}{63.3815} \Rightarrow \widehat{E_2} = 36.5834° \Rightarrow \widehat{E_3} = 19.2157°$

$\sin \widehat{D} = \dfrac{63.3815 \times \sin 19.2157°}{50} \Rightarrow \begin{cases} \widehat{D} = 155.3415° \Rightarrow \boxed{\delta = 24.6585°} \\ \widehat{D} = 24.6585° \Rightarrow \boxed{\delta = 155.3415°} \end{cases}$

Or $\alpha + \beta + \gamma + \delta + \mu = 360°$ (Somme des angles extérieurs d'un polynome).

$\rightarrow \boxed{\gamma = 140.3415°}$ ou $\boxed{\gamma = 9.6585°}$

Premier cas : $\delta = 24.6585°$ et $\gamma = 140.3415°$

$\widehat{C_1} = 180 - \widehat{E_3 - D} = 180° - 19.2157° - 155.3415° = 5.4428°$

$ED = \dfrac{63.3815 \times \sin 5.4428°}{\sin 155.3415} = 14.4097\ m$

Périmètre : $10 + 30 + 40 + 50 + 14.4097 = \boxed{144.4097\ m}$

Surface : C'est la somme des triangles ABE, EBC et ECD

$$\frac{1}{2}\left\{ \begin{array}{l} 30 \times 10 \times \sin 135° \\ +37.7394 \times 63.3815 \times \sin 36.5833° \\ +50 \times 14.4097 \times \sin 155.3415° \end{array} \right\} = \boxed{969.1615\ m^2}$$

Deuxième cas : $\delta = 155.3415°$ et $\gamma = 9.6585°$

On trouvera :

$\widehat{C_1} = 136.1258°$ $ED = 105.2908\ m$

Périmètre : $235.2908\ m$ Surface : $1917.0712\ m^2$

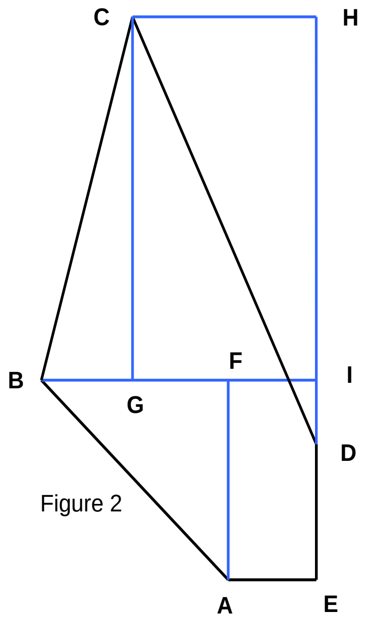


Figure 2

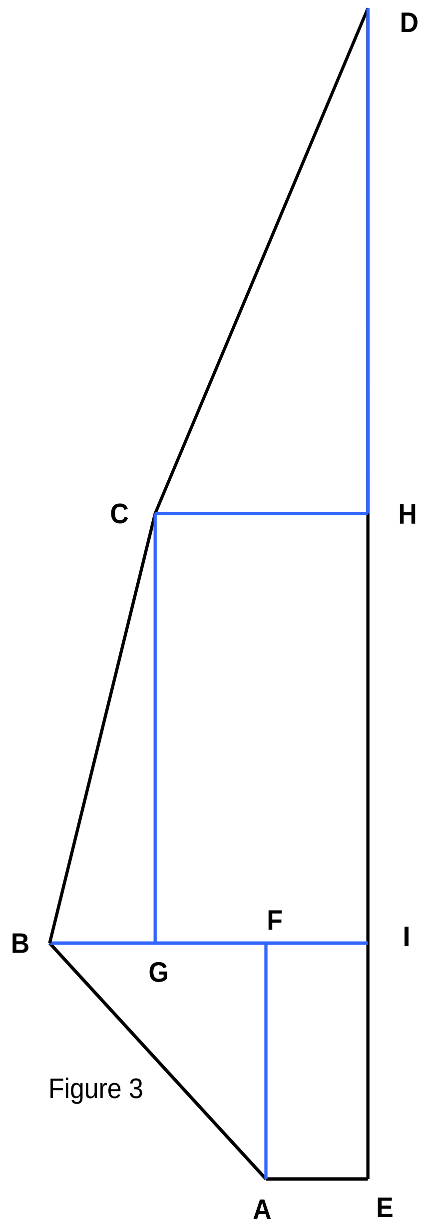


Figure 3

Deuxième méthode

Solution proposée par l'ULG :

$\Delta ABF \rightarrow AF = AB\cos 45 = \dfrac{30\sqrt{2}}{2} = FB$

$\Delta BGC \rightarrow GBC = 180° - 60° - 45° = 75°$

$\rightarrow BG = BC\cos 75° = 40\cos 75°$ et $GC = BC\sin 75° = 40\sin 75°$

$CH = AE + FB - BG = 10 + 30\dfrac{\sqrt{2}}{2} - 40\cos 75°$

Soit ζ l'angle $HCE \rightarrow CH = CD\cos\zeta$

$$\rightarrow \cos\zeta = \frac{10 + 30\dfrac{\sqrt{2}}{2} - 40\cos 75°}{50} = 0.4172 \rightarrow \zeta = \pm 65.3415°$$

Le point D peut être situé au-dessus (Figure 3) ou en-dessous de ma ligne CH.

On peut tenir compte des deux solutions en donnant à ζ le signe positif pour le dessus et le signe négatif pour le dessous.

$$DE = AF + GC + CD\sin\zeta = 30\frac{\sqrt{2}}{2} + 40\sin 75° + \sin\zeta = \begin{cases} 14.4097\ m \\ 105.2908\ m \end{cases}$$

$$\rightarrow \boxed{\gamma = 75 \pm \zeta = \begin{cases} 140.3415° \\ 9.6585° \end{cases}} \quad \rightarrow \boxed{\text{Périmètre } = 130 + DE = \begin{cases} 144.4097\ m \\ 235.2908\ m \end{cases}}$$

Surface = Aire du trapèze $BIEA$ + Aire du trapèze $BCHD$ ± Aire du triangle CHD

$$\text{Surface} = \frac{(10+FB+10)AF}{2} + \frac{(10 + FB + CH)GC}{2} \pm \frac{CH.HD}{2}$$

$$\boxed{\text{Surface} = \begin{cases} 969.1636\ m^2 \\ 1917.0712\ m^2 \end{cases}}$$

La somme des angles extérieurs d'un polygone vaut 360°

$$\rightarrow \boxed{\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360 - \mu = 270°}$$

$$\rightarrow \boxed{\delta = 270° - (\alpha + \beta + \gamma) = \begin{cases} 24.6985° \\ 155.3415° \end{cases}}$$

EXTRI057 – Liège, septembre 2001.

Vérifier l'identité suivante :

$$\sin 3a = 4\sin\left(60° - a\right)\sin a \sin\left(60° + a\right)$$

$$\begin{aligned}
&4\sin\left(60-a\right)\sin a\sin\left(60+a\right)\\
&= 2\sin\left(60+a\right)\left[2\sin\left(60-a\right)\sin a\right]\\
&= 2\sin\left(60+a\right)\left[-\cos\left(60-2a\right)+\cos 60\right] && (1)\\
&= \sin\left(60+a\right)-2\sin\left(60+a\right)\cos\left(60-2a\right) && (2)\\
&= \sin\left(60+a\right)-\sin\left(120-a\right)+\sin 3a\\
&= \sin 3a && (3)
\end{aligned}$$

(1) Rappel : $2\sin\alpha\sin\beta = \cos\left(\alpha+\beta\right)+\cos\left(\alpha-\beta\right)$

(2) $\cos 60 = \dfrac{1}{2}$

(3) $\sin\left(60+a\right) = \sin\left(180-60-a\right) = \sin\left(120-a\right)$

EXTRI058 – Liège, septembre 2001.

Résoudre l'équation suivante :

$$\tan x + \cot x + \sec x + \operatorname{cosec} x = -2$$

$$\tan x + \cot x + \sec x + \operatorname{cosec} x = -2$$

$$CE : x \neq \pm\frac{\pi}{2} \quad x \neq \pi \quad x \neq 0$$

$$\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} + \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x} = -2$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x + \cos x + \sin x = -2 \sin x \cos x$$

$$(\sin x + \cos x)^2 + \cos x + \sin x = 0$$

$$(\sin x + \cos x)(\cos x + \sin x + 1) = 0$$

$$1) \sin x + \cos x = 0 \rightarrow \tan x = -1 \rightarrow \boxed{x = -\frac{\pi}{4} + k\pi}$$

$$2) \cos x + \sin x = -1 \qquad (\text{Voir rappel})$$

$$\tan \phi = 1 \rightarrow \phi = \frac{\pi}{4} \rightarrow \cos \phi = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -1 \rightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$a) \ x - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \rightarrow x = 2k\pi \qquad \text{à rejeter.}$$

$$b) \ x - \frac{\pi}{4} = -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi \rightarrow x = \pi + 2k\pi \qquad \text{à rejeter.}$$

Rappel : Soit l'équation $a \cos x + b \sin x = c$

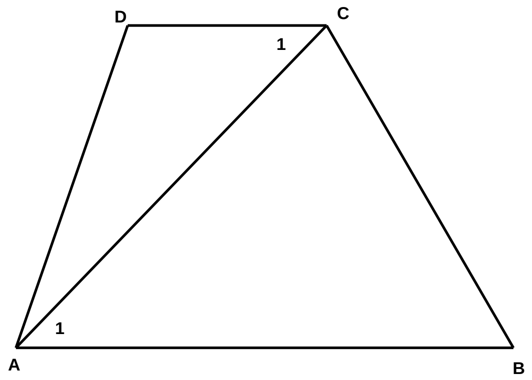
Alors : $\dfrac{a}{\cos \varphi} \cos(x - \varphi) = c$ avec $\tan\varphi = \dfrac{b}{a}$

EXTRI059 – Liège, septembre 2001.

Soit un trapèze ABCD, CD étant parallèle à AB.
L'angle en B est de 60 degrés.
On donne également AB = 20 cm, BC = 15 cm et CD = 8 cm
Calculer :

a) le périmètre
b) la surface
c) les angles intérieurs

du trapèze.



$$AC^2 = 15^2 + 20^2 - 2\times 15\times 20\times \cos 60° \;\rightarrow\; AC = 18,0278\;cm$$

$$\sin A_1 = \sin 60\,\frac{15}{18.0278} \;\rightarrow\; A_1 = 46.1020° \;\rightarrow\; C_1 = 46.1020°$$

$$\rightarrow\; C_2 = 180 - 60 - 46.1020 = 73.8980°$$

$\boxed{C = 120°}$ (complémentaire de B)

$$DA^2 = 8^2 + 18.0278^2 - 2\times 8\times 18.0278\times \cos 46.1020 \;\rightarrow\; DA = 13.7478\;cm$$

$$\sin D = \sin 46.1020\,\frac{18.0278}{13.7478} \;\rightarrow\; \boxed{D = 109.3309°}$$

$$A = 360 - 120 - 60 - 109.3309 \;\rightarrow\; \boxed{A = 70.6691°}$$

Périmètre $= 20 + 15 + 8 + 13.7478 = 56.7478\;cm$

$$\text{Surface} = \frac{1}{2}\times 15\times 20\times \sin 60 + \frac{1}{2}\times 8\times 13.7478\times \sin 109.3309$$
$$= \boxed{181.7947\;cm^2}$$