

Exercices résolus de mathématiques.

Trigonométrie

Calcul numérique

TRI 50

EXTRI500-EXTRI509

<http://matheux.ovh/Accueil.html>

Jacques Collot
Jan Frans Broeckx – Nicole Berckmans
Fabienne Zoetard

Mars 2020

EXTRI500 - Polytech, UMon, Mons, juillet 2020.
EPL, UCL, LLN, juillet 2020.
EPB, ULB, Bruxelles, juillet 2020.
FACSA, ULiège, Liège, juillet 2020.
Mode restreint.

Trouvez toutes les solutions de l'équation trigonométrique suivante.

$$3(\sin(x) + \cos(x)) - 4(\sin^2(x) + \cos^3(x)) = 0$$

Tracer les solutions de l'équation sur le cercle trigonométrique.

Solution proposée par Emilie Jacqmin.

Solution similaire proposée par Nicole Berckmans.

a)

$$3(\sin x + \cos x) - 4(\sin^3 x + \cos^3 x) = 0$$

$$\Leftrightarrow 3(\sin x + \cos x) - 4(\sin x + \cos x)(\sin^2 x - \sin x \cos x + \cos^2 x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin x + \cos x = 0 \quad \text{ou} \quad 3 - 4(1 - \sin x \cos x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin x = -\cos x \quad \text{ou} \quad -1 + 4 \sin x \cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{4} + k\pi \quad \text{ou} \quad -1 + 2 \sin 2x = 0$$

$$\sin 2x = \frac{1}{2}$$

$$2x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \quad \text{ou} \quad 2x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi$$

$$x = \frac{\pi}{12} + k\pi \quad \text{ou} \quad x = \frac{5\pi}{12} + k\pi$$

Finalemment, $S = \left\{ \frac{\pi}{12} + k \cdot \frac{\pi}{3}; k \in \mathbb{Z} \right\}$
--

b)

Solution proposée par Jacques Collot

En notant que $\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$ et $\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$, l'équation devient

$$\sin 3x - \cos 3x = 0 \Rightarrow \tan 3x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{12} + k \frac{\pi}{3}.$$

Notons aussi que l'on peut pousser l'équation encore un peu plus loin :

$$\sin 3x - \cos 3x = 0 \Rightarrow \sin 3x - \sin\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) = 0 \Rightarrow 2 \cos \frac{\pi}{2} \sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = 0 \Rightarrow \sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

Solutions proposées par l'université.

3) **La plus algébrique.** On pose $S = \cos x + \sin x$ et $P = \cos x \sin x$. Sachant que $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, on a $S^2 = 1 + 2P$. On écrit l'équation comme

$$3S - 4(S^3 - 3PS) \rightarrow S(2S^2 - 3) = 0$$

ce qui permet de trouver

$$S = 0, \quad S = \sqrt{3/2} \quad \text{et} \quad S = -\sqrt{3/2}.$$

4) **Utiliser la symétrie.** On pose $x = y + \pi/4$ et après calcul, on trouve une équation en y

$$\sqrt{2} \cos(y) (4 \cos^2(y) - 3) = 0.$$

On trouve donc

$$\cos(y) = 0 \rightarrow y = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \rightarrow x = \frac{3\pi}{4} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos(y) = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow y = \pm \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \rightarrow x = \begin{cases} \frac{5\pi}{12} + 2k\pi, & k \in \mathbb{Z} \\ \frac{\pi}{12} + 2k\pi, & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\cos(y) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow y = \pm \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \rightarrow x = \begin{cases} \frac{13\pi}{12} + 2k\pi, & k \in \mathbb{Z} \\ \frac{17\pi}{12} + 2k\pi, & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

5) **Transformer l'équation en équation homogène :**

$$3(\sin(x) + \cos(x)) \underbrace{(\sin^2(x) + \cos^2(x))}_{=1} - 4(\sin^3(x) + \cos^3(x)) = 0$$

qui est homogène. On divise par $\cos^3 x$ (attention à vérifier que $\cos(x) = 0$ n'est pas solution!) :

$$-\tan^3(x) + 3\tan^2(x) + 3\tan(x) - 1 = 0$$

dont les solutions sont $\tan(x) = -1$, $\tan(x) = 2 \pm \sqrt{3}$.

EXTRI501 – EPL, UCL, LLN, juillet 2020.
Mode restreint.

On considère le triangle ABC dont les dimensions sont entièrement déterminées par A , l'angle en A , ainsi que par $c = |\overline{AB}|$ et $b = |\overline{AC}|$ les longueurs des deux côtés issus de A . On considère ensuite le cercle inscrit au triangle ABC avec son centre O . On considère finalement le point D à l'intersection des droites AO et BC .

- Faites un dessin clair qui contient tous les éléments du problème.
- Calculez l'aire du triangle ABC en fonction de \widehat{A} , b et c .
- Calculez la longueur $x = |\overline{AD}|$ du segment \overline{AD} en fonction des données \widehat{A} , b et c .
- Calculez le rayon r du cercle inscrit à ABC en fonction des données \widehat{A} , b et c .

Solution proposée par Emilie Jacqmin:

Solution similaire proposée par Nicole Berckmans

a)

b)
$$\boxed{\text{Aire} = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin \hat{A}}$$

c) aire $ABC =$ aire $ABD +$ aire ADC

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin \hat{A} = \frac{1}{2} \cdot c \cdot x \cdot \sin \hat{BAD} + \frac{1}{2} \cdot b \cdot x \cdot \sin \hat{DAC}$$

$$\Leftrightarrow b \cdot c \cdot \sin \hat{A} = c \cdot x \cdot \sin \frac{\hat{A}}{2} + b \cdot x \cdot \sin \frac{\hat{A}}{2}$$

$$\Leftrightarrow b \cdot c \cdot \sin \hat{A} = x \cdot \sin \frac{\hat{A}}{2} \cdot (b + c)$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{b.c.\sin \hat{A}}{(b+c).\sin \frac{\hat{A}}{2}}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2.b.c.\cos \frac{\hat{A}}{2}}{b+c}$$

2.d) aire ABC = aire AOB + aire BOC + aire AOC

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}.b.c.\sin \hat{A} = \frac{1}{2}.c.r + \frac{1}{2}.\overline{BC}.r. + \frac{1}{2}.b.r$$

$$\Leftrightarrow b.c.\sin \hat{A} = r.(b+c+\sqrt{b^2+c^2-2b.c.\cos \hat{A}})$$

$$\Leftrightarrow r = \frac{b.c.\sin \hat{A}}{b+c+\sqrt{b^2+c^2-2b.c.\cos \hat{A}}}$$

Le 1 septembre 2020

EXTRI502 – EPB, ULB, Bruxelles, juillet 2020.

Soit un triangle isocèle ABC dont les côtés AB et BC sont tous deux de longueur a .

Notons α l'amplitude de l'angle BAC .

- Représenter schématiquement le triangle et toutes les grandeurs mentionnées ci-dessus.
- Exprimer l'aire du triangle, notée S , en fonction de a et α .
- Sachant que $a = 3$ m et $\sin \alpha = 1/3$, évaluer S .
- Dans le même cas, donner la valeur numérique de S évaluée au centimètre carré près.

Indication : $\sqrt{2} = 1.41421356\dots$

- Dans le même cas toujours, vérifier la plausibilité de ce résultat numérique à l'aide d'un graphique précis et à l'échelle.

a) $S = \frac{1}{2} a^2 \sin \alpha$

b) $S = \frac{1}{2} \cdot 3^2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{3}{2} \text{ m}^2$

c) $S = 15000 \text{ cm}^2$

d) Voir graphique

Note : On peut se demander si un exercice aussi facile à sa place ici où alors il manque quelque chose dans l'énoncé.

Le 12 novembre 2019

**EXTRI503 – - Polytech, UMon, Mons, septembre 2020.
EPL, UCL, LLN, septembre 2020.
EPB, ULB, Bruxelles, septembre 2020.
FACSA, ULiège, Liège, septembre 2020.
Mode restreint.**

Trouvez toutes les solutions dans \mathbb{R} de l'équation trigonométrique suivante :

$$\tan^2 x - 3 \frac{\tan x}{\cos x} - \frac{1}{\cos^2 x} = 1$$

Solution proposée par Benoit Baudalet

La condition d'existence est $x \neq 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

On a successivement

$$\begin{aligned}\tan^2 x - 3 \frac{\tan x}{\cos x} - \frac{1}{\cos^2 x} &= 1 \\ \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - 3 \frac{\tan x \cos x}{\cos^2 x} - \frac{1}{\cos^2 x} &= \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} \\ \sin^2 x - 3 \sin x - 1 &= \cos^2 x \\ \sin^2 x - 3 \sin x - 1 &= 1 - \sin^2 x \\ 2 \sin^2 x - 3 \sin x - 2 &= 0\end{aligned}$$

En posant $T = \sin x$, cette dernière équation devient $2T^2 - 3T - 2 = 0$ dont les solutions sont $T_1 = 2$

ou $T_2 = \frac{-1}{2}$.

En revenant à la variable initiale, on a

- $\sin x = 2$, ce qui est impossible.
- $\sin x = \frac{-1}{2}$ donc les solutions sont $x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$ ou $x = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi$

Conclusion : $\mathcal{S} = \left\{ \frac{7\pi}{6} + 2k\pi; \frac{11\pi}{6} + 2k\pi \right\}$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Le 23 septembre 2020

EXTRI504 – EPL, UCL, LLN, septembre 2020.
Mode restreint.

On considère l'hexagone $ABCDEF$. On donne $|\overline{AB}| = 5$, $|\overline{BC}| = 3$, $|\overline{CD}| = 6$ et $|\overline{DE}| = 7$.
 On suppose en outre que tous les angles internes de cet hexagone sont égaux:

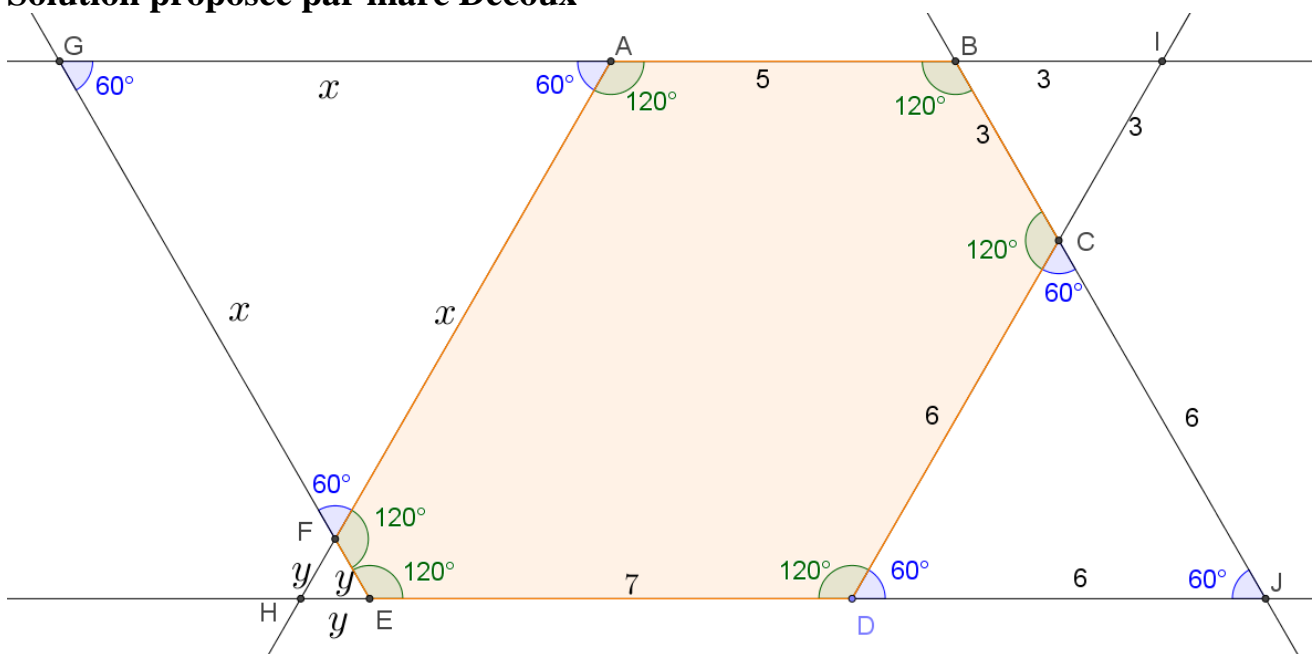
$$A = B = C = D = E = F.$$

Le but de cet exercice est de calculer $x = |\overline{FA}|$ et $y = |\overline{EF}|$.

La solution la plus simple consiste à dessiner à l'extérieur de l'hexagone.

- Faites un dessin clair qui contient tous les éléments du problème.
- Calculer \widehat{A} .
- Calculer les longueurs $x = |\overline{FA}|$ et $y = |\overline{EF}|$.

Solution proposée par marc Decoux



Puisque les 6 angles sont tous égaux, ils valent chacun $120^\circ \Rightarrow A = 120^\circ$

Le dessin fait apparaître une série de triangles équilatéraux et de parallélogrammes.

On voit immédiatement dans le parallélogramme $AIDH$:

$$\begin{cases} |\overline{HF}| + |\overline{FA}| = |\overline{DC}| + |\overline{CI}| \\ |\overline{HE}| + |\overline{ED}| = |\overline{AB}| + |\overline{BI}| \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + y = 6 + 3 = 9 \\ y + 7 = 5 + 3 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x = 8 \\ y = 1 \end{cases}}$$

Le 21 septembre 2020

EXTRI505 – EPB, ULB, Bruxelles, septembre 2020.

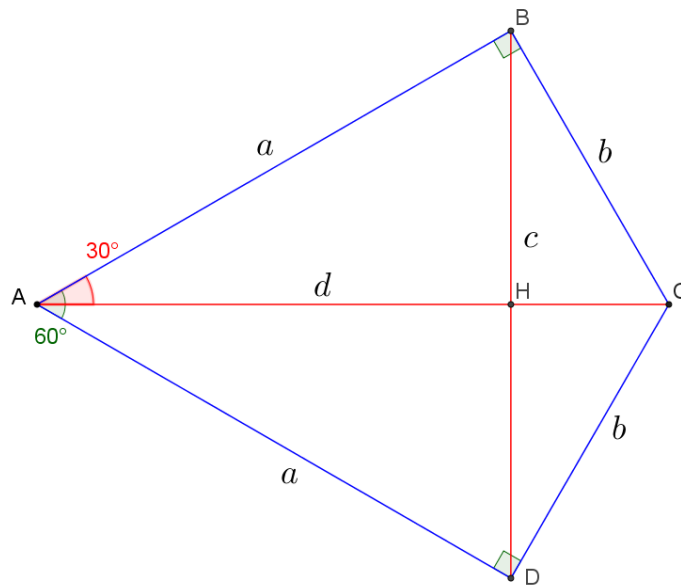
Mode retreint

Soit un quadrilatère $ABCD$ tel que les longueurs des côtés AB et AD sont égales et notées a , les longueurs des côtés BC et CD sont égales et notées b , les angles ABC et ADC sont droits, et l'angle BAD est aigu et noté θ . Notons c et d les longueurs des segments $[BD]$ et $[AC]$, respectivement.

- Représenter schématiquement le quadrilatère et toutes les grandeurs mentionnées ci-dessus.
- Sur base du schéma précédent, montrer que $\sin \theta = c / d$.
- Exprimer le périmètre du quadrilatère, noté P , en fonction de b et θ .
- Sachant que $b = 1$ m et $\theta = \pi / 3$, évaluer P .
- Dans le même cas, donner la valeur numérique de P évaluée au centimètre près.

Indication : $\sqrt{3} = 1,7320508 \dots$

- Dans le même cas toujours, vérifier la plausibilité de ce résultat numérique à l'aide d'un graphique précis à l'échelle.



$$b) \begin{cases} \sin \frac{\theta}{2} = \frac{c/2}{a} \\ \cos \frac{\theta}{2} = \frac{a}{d} \end{cases} \Rightarrow \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} = \frac{c}{2d} \Rightarrow \boxed{\sin \theta = \frac{c}{d}}$$

$$c) \begin{cases} \sin \frac{\theta}{2} = \frac{c/2}{a} \\ \sin \frac{\theta}{2} = \frac{b}{d} \end{cases} \Rightarrow a = \frac{cd}{2b} = \frac{d^2 \sin \theta}{2b} \text{ or } d^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow a = (a^2 + b^2) \frac{\sin \theta}{2b}$$

On obtient donc une équation du second degré en a :

$$\frac{\sin \theta}{2b} a^2 - a + \frac{b}{2} \sin \theta = 0 \Rightarrow \sin \theta \cdot a^2 - 2ba + b^2 \sin \theta = 0$$

$$a = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - b^2 \sin^2 \theta}}{\sin \theta} = b \frac{1 \pm \cos \theta}{\sin \theta}$$

On sait que θ est un angle aigu, donc $\frac{\theta}{2} < 45^\circ$ donc que $\tan \frac{\theta}{2} < 1$.

Et si on regarde le triangle rectangle ABC , cela implique que $a > b$.

$$\text{mais } \frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta} = \frac{1 - \left(1 - 2 \sin^2 \frac{\theta}{2}\right)}{2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}} = \tan \frac{\theta}{2} < 1 \Rightarrow a < b. \text{ C'est une contradiction}$$

et nous devons rejeter la solution $\frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta}$. Par contre, $\frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta}$ est bien > 1 .

$$\text{Le périmètre est par conséquent : } \boxed{P = 2(a + b) = 2b \left(1 + \frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta}\right)}$$

$$d) \text{ Pour } b = 1 \text{ m et } \theta = \pi/3 \Rightarrow \boxed{P = 2(1 + \sqrt{3}) \simeq 5.46 \text{ m}}$$

EXTRI506 – FACSA, ULiège, Liège, juillet 2020.

A un instant initial, deux observateurs A et B distants de 2700 m voient un avion situé dans le plan vertical de la base d'observation sous des angles $\widehat{C_1AO_1} = 35^\circ$ et $\widehat{C_1BO_1} = 64^\circ$, l'avion se situant entre A et B . Après quelques secondes, ils font une seconde observation sous des angles $\widehat{C_2AO_2} = 30.5^\circ$ et $\widehat{C_2BO_2} = 80^\circ$, l'avion se situant à la droite de B . Déterminez l'angle de montée de l'avion par rapport au segment AB , c'est-à-dire déterminez l'angle formé par la droite C_1C_2 et la droite AB .

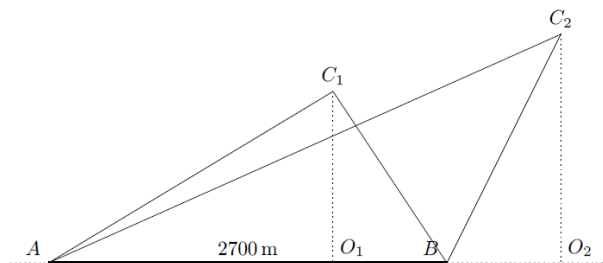


FIGURE 1 – Points d'observation

Nous reprenons la solution proposée par l'université

Solution

Dans le triangle ABC_1 , $\widehat{C_1AB} + \widehat{C_1BA} + \widehat{AC_1B} = 180^\circ \rightarrow \widehat{AC_1B} = 180^\circ - 35^\circ - 64^\circ = 81^\circ$. Toujours dans ce triangle, l'application de la formule des sinus donne :

$$\frac{\overline{AB}}{\sin \widehat{AC_1B}} = \frac{\overline{AC_1}}{\sin \widehat{C_1BA}} \rightarrow \overline{AC_1} = \frac{\sin 64^\circ}{\sin 81^\circ} \times 2700 = 2457\text{m.}$$

Dans le triangle rectangle C_1O_1A , il vient :

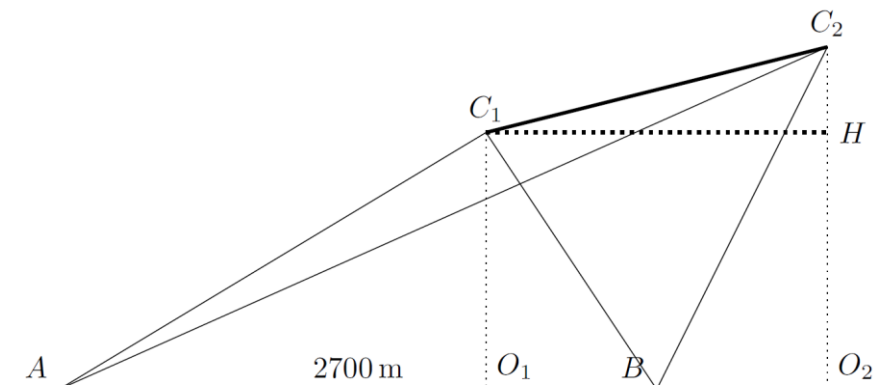
$$\sin \widehat{C_1AO_1} = \frac{\overline{O_1C_1}}{\overline{AC_1}} \rightarrow \overline{O_1C_1} = 1409\text{m}$$

et

$$\cos \widehat{C_1AO_1} = \frac{\overline{AO_1}}{\overline{AC_1}} \rightarrow \overline{AO_1} = 2013\text{m}$$

De manière similaire, dans le triangle ABC_2 , on trouve $\overline{AC_2} = 3497\text{m}$ et dans le triangle AO_2C_2 , $\overline{C_2O_2} = 1775\text{m}$ et $\overline{AO_2} = 3013\text{m}$.

Traçons la parallèle à O_1O_2 passant par C_1 pour former le triangle rectangle C_1HC_2 dans lequel l'angle $\widehat{C_2C_1H}$ est l'angle recherché :



$$\operatorname{tg} \widehat{C_1 C_2 H} = \frac{\overline{C_2 H}}{\overline{C_1 H}} = \frac{\overline{C_2 O_2} - \overline{C_1 O_1}}{\overline{AO_2} - \overline{AO_1}} \rightarrow \widehat{C_1 C_2 H} = 20^\circ.$$

Alternativement, il est possible de déterminer la longueur des côtés BC_1 et BC_2 en appliquant la formule des sinus respectivement dans les triangles ABC_1 et ABC_2 :

$$\frac{\overline{AB}}{\sin \widehat{AC_1 B}} = \frac{\overline{BC_1}}{\sin \widehat{C_1 AB}} \rightarrow \overline{BC_1} = \frac{\sin 35^\circ}{\sin 81^\circ} \times 2700 = 1568\text{m.}$$

et

$$\frac{\overline{AB}}{\sin \widehat{AC_2 B}} = \frac{\overline{BC_2}}{\sin \widehat{C_2 AB}} \rightarrow \overline{BC_2} = \frac{\sin 30.5^\circ}{\sin 49.5^\circ} \times 2700 = 1802\text{m.}$$

En appliquant Al-Kashi dans le triangle BC_1C_2 , on obtient alors la longueur du segment C_1C_2 :

$$\begin{aligned} \overline{C_1 C_2} &= \sqrt{\overline{BC_1}^2 + \overline{BC_2}^2 - 2\overline{BC_1} \times \overline{BC_2} \times \cos \widehat{C_1 BC_2}} \\ &= \sqrt{1568^2 + 1802^2 - 2 \times 1568 \times 1802 \times \cos (180^\circ - 64^\circ - 80^\circ)} \\ &= 1065\text{m} \end{aligned}$$

Toujours dans le triangle BC_1C_2 , la formule des sinus donne :

$$\frac{\overline{C_1 C_2}}{\sin \widehat{C_1 BC_2}} = \frac{\overline{BC_2}}{\sin \widehat{C_2 C_1 B}} \rightarrow \widehat{C_2 C_1 B} = \frac{\overline{BC_2}}{\overline{C_1 C_2}} \sin \widehat{C_1 BC_2} = 84^\circ.$$

Puisque les angles $\widehat{HC_1 B}$ et $\widehat{C_1 BO_1}$ sont égaux (angles alterne-interne), L'angle recherché est donné par $\widehat{C_2 C_1 H} = \widehat{C_2 C_1 B} - \widehat{C_1 BO_1} = 84^\circ - 64^\circ = 20^\circ$.

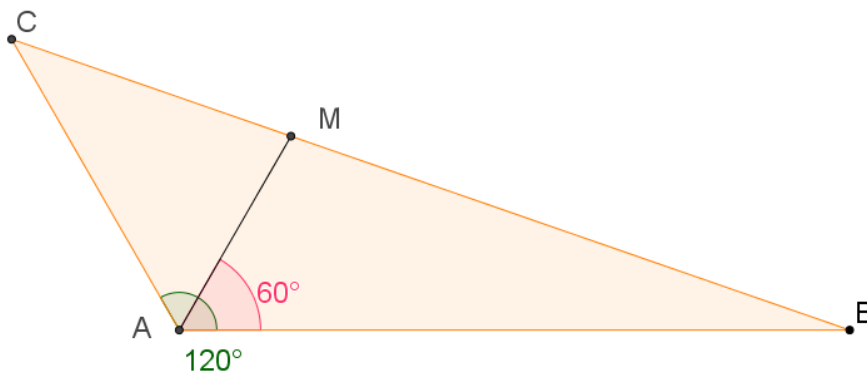
Le 30 janvier 2021

EXTRI507 – ERM, Bruxelles, 2020.

Une forêt a la forme d'un triangle $\triangle ABC$ telle que $AB = 2AC$ et dont l'angle de sommet BAC mesure 120° . Un chemin rectiligne AM traverse la forêt selon la bissectrice de l'angle BAC . Ce chemin a une longueur égale à 1 kilomètre.

- Démontrer en utilisant la loi des sinus que $BM = 2CM$.
- Exprimer en utilisant la loi des cosinus BM et CM en fonction de BC .
- Calculer la longueur de BC .
- A l'aide des résultats précédents, trouver la longueur de AC .

Solution proposée par Benoit Baudelet



$$(a) \triangle ABM : \frac{\sin \angle AMB}{AB} = \frac{\sin 60^\circ}{BM} \Rightarrow BM = AB \frac{\sin 60^\circ}{\sin \angle AMB} = 2BC \frac{\sin 60^\circ}{\sin \angle AMB}$$

$$\triangle BCM : \frac{\sin \angle BCM}{BC} = \frac{\sin 60^\circ}{CM} \Rightarrow CM = BC \frac{\sin 60^\circ}{\sin \angle BCM} = BC \frac{\sin 60^\circ}{\sin(180^\circ - \angle AMB)} = BC \frac{\sin 60^\circ}{\sin \angle AMB}$$

On en déduit que : $BM = 2CM$

$$(b) \triangle ABM : BM^2 + 1 + AB^2 - 2AB \cos 60^\circ = 1 + 4AC^2 - AC$$

$$\triangle BCM : CM^2 = 1 + AC^2 - 2AC \cos 60^\circ = 1 + AC^2 - AC$$

(c) $\triangle ABC$:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos 120^\circ = AC^2 + 4AC^2 + 2AC^2 = 7AC^2 = 7 \frac{9}{4} \Rightarrow BC = \frac{3\sqrt{7}}{2}$$

$$(d) \text{ De (a) et (b) : } BM^2 + 4AC^2 - 2AC = 4CM^2 = 4 + 4AC^2 - 4AC \Rightarrow AC = \frac{3}{2}$$

Le 1 mars 2020

EXTRI508 – ERM, Bruxelles, 2013.

Les racines (zéros) du polynôme $x^2 + px + q$ sont $\tan \alpha$ et $\tan \beta$.

Calculer l'expression V ci-dessous en fonction de p et q .

$$V = \sin^2(\alpha + \beta) + p \sin(\alpha + \beta) \cos(\alpha + \beta) + q \cos^2(\alpha + \beta)$$

On déduit immédiatement que
$$\begin{cases} \tan \alpha + \tan \beta = -p \\ \tan \alpha \cdot \tan \beta = q \end{cases}$$

Par conséquent :
$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \cdot \tan \beta} = \frac{p}{q-1}$$

Eprimons les différents termes de l'expression

$$\begin{aligned} \bullet \sin^2(\alpha + \beta) &= \frac{1}{2} [1 - \cos(2(\alpha + \beta))] = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{1 - \tan^2(\alpha + \beta)}{1 + \tan^2(\alpha + \beta)} \right] \\ &= \frac{1}{2} \frac{1 + \tan^2(\alpha + \beta) - 1 + \tan^2(\alpha + \beta)}{1 + \tan^2(\alpha + \beta)} = \frac{\tan^2(\alpha + \beta)}{1 + \tan^2(\alpha + \beta)} = \frac{\left(\frac{p}{q-1}\right)^2}{1 + \left(\frac{p}{q-1}\right)^2} \\ &= \frac{p^2}{(q-1)^2 + p^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \sin(\alpha + \beta) \cos(\alpha + \beta) &= \frac{1}{2} \sin[2(\alpha + \beta)] = \frac{1}{2} \frac{2 \tan(\alpha + \beta)}{1 + \tan^2(\alpha + \beta)} = \frac{\frac{p}{q-1}}{1 + \left(\frac{p}{q-1}\right)^2} \\ &= \frac{p(q-1)}{(q-1)^2 + p^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \cos^2(\alpha + \beta) &= \frac{1}{2} [1 + \cos(2(\alpha + \beta))] = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{1 - \tan^2(\alpha + \beta)}{1 + \tan^2(\alpha + \beta)} \right] = \frac{1}{1 + \tan^2(\alpha + \beta)} \\ &= \frac{1}{1 + \left(\frac{p}{q-1}\right)^2} = \frac{(q-1)^2}{(q-1)^2 + p^2} \end{aligned}$$

$$\text{On remplace : } V = \frac{p^2 + p^2(q-1) + q(q-1)^2}{(q-1)^2 + p^2} = \frac{p^2q + q(q-1)^2}{(q-1)^2 + p^2} = q$$

EXTRI509 – ERM, Bruxelles, 2012.

Dans le triangle ABC , on a $a = \frac{7}{3}c$ et $b = \frac{8}{3}c$, où $a = |BC|$, $b = |AC|$ et $c = |AB|$.

Prouvez que : $\frac{\sin \frac{A-B}{2}}{\sin \frac{A+B}{2}} = -\frac{1}{3}$ et que $\frac{\tan \frac{A}{2}}{\tan \frac{B}{2}} = \frac{1}{2}$, et déterminer la valeur de l'angle A .

Multiplions l'expression par $-2 \sin \frac{A+B}{2}$ au numérateur et au dénominateur et appliquons

Simpson et Carnot :

$$\frac{\sin \frac{A-B}{2}}{\sin \frac{A+B}{2}} = \frac{-2 \sin \frac{A-B}{2} \sin \frac{A+B}{2}}{-2 \sin^2 \frac{A+B}{2}} = \frac{\cos A - \cos B}{\cos(A+B) - 1} = \frac{\cos A - \cos B}{\cos A \cos B - \sin A \sin B - 1}$$

Calculons chacun des termes par les formules du cosinus :

$$\cos \widehat{A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{\frac{64}{9}c^2 + c^2 - \frac{49}{9}c^2}{\frac{16}{3}c^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{A} = 60^\circ$$

$$\cos \widehat{B} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{\frac{49}{9}c^2 + c^2 - \frac{64}{9}c^2}{\frac{14}{3}c^2} = -\frac{1}{7} \Rightarrow \widehat{B} = 98.21^\circ$$

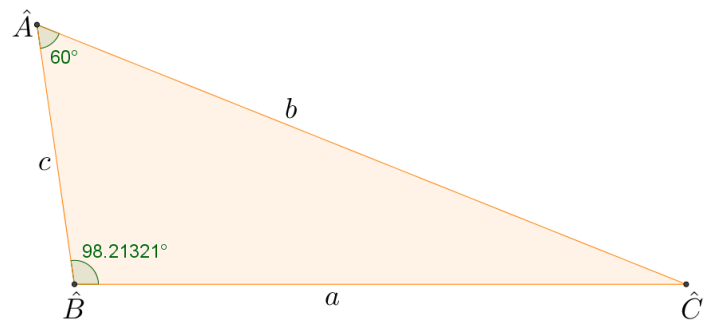
$$\sin \widehat{A} = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ et } \sin \widehat{B} = \sqrt{1 - \cos^2 \widehat{B}} = \sqrt{1 - \left(-\frac{1}{7}\right)^2} = \frac{4\sqrt{3}}{7}$$

On remplace : $\frac{\sin \frac{A-B}{2}}{\sin \frac{A+B}{2}} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{7}}{\frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{7}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{4\sqrt{3}}{7} - 1} = \boxed{-\frac{1}{3}}$

$$\tan \frac{\widehat{A}}{2} = \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Sachant que : $\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha}$, on a : $\tan \frac{\widehat{B}}{2} = \frac{\sin \widehat{B}}{1 + \cos \widehat{B}} = \frac{4\sqrt{3}/7}{1 - \frac{1}{7}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

$$\Rightarrow \frac{\tan \frac{\widehat{A}}{2}}{\tan \frac{\widehat{B}}{2}} = \frac{\sqrt{3}/3}{2\sqrt{3}/3} = \boxed{\frac{1}{2}}$$



Le 1 mars 2021