

**Exercices résolus de mathématiques.**

# **Trigonométrie**

# **Calcul numérique**

**TRI 7**

**EXTRI070 – EXTRI079**

<http://www.matheux.be.tf>

Jacques Collot

1 mai 03

**EXTRI070 – Polytech, questions posées de 1995 à 1998.**  
**Polytech, Umons, Mons, juillet 2015**

**Enoncé de 1995-1998.**

Démontrer l'identité suivante.

$$4 \sin \frac{a+b}{2} \sin \frac{b+c}{2} \sin \frac{c+a}{2} = \sin a + \sin b + \sin c - \sin(a+b+c)$$

**Enoncé de juillet 2015**

Si  $a + b + c + d = 2\pi$ , vérifier l'identité suivante.

$$4 \sin \frac{a+b}{2} \sin \frac{b+c}{2} \sin \frac{c+a}{2} = \sin a + \sin b + \sin c + \sin d$$

$$\sin a + \sin b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}$$

$$\begin{aligned} \sin c - \sin(a+b+c) &= 2 \sin \frac{c-a-b-c}{2} \cos \frac{c+a+b+c}{2} \\ &= -2 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a+b+2c}{2} \end{aligned}$$

Le second membre s'écrit donc :

$$\begin{aligned} &\sin a + \sin b + \sin c - \sin(a+b+c) \\ &= 2 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2} - 2 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a+b+2c}{2} \\ &= 2 \sin \frac{a+b}{2} \left[ \cos \frac{a-b}{2} - \cos \frac{a+b+2c}{2} \right] \\ &= 2 \sin \frac{a+b}{2} (-2) \sin \frac{a+c}{2} \sin \frac{-(b+c)}{2} \\ &= 4 \sin \frac{a+b}{2} \sin \frac{a+c}{2} \sin \frac{b+c}{2} \end{aligned}$$

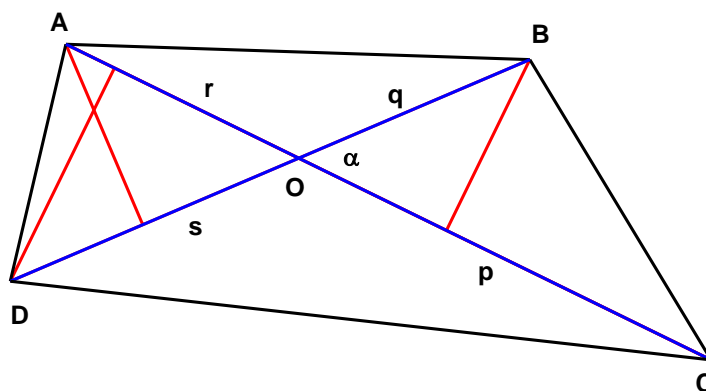
Pour l'énoncé de 2015, il suffit de remarquer que

$$-\sin(a+b+c) = -\sin(2\pi - d) = -\sin(-d) = \sin d$$

Modifié le 16 septembre 2015

## EXTRI071 – Polytech, Mons, questions posées de 1995 à 1998.

Démontrer que la surface d'un quadrilatère est égale à la moitié du produit de ses diagonales par le sinus de l'angle compris entre celles-ci.



Soit  $AC = r + p$  et  $BD = s + q$

La surface du quadrilatère est donnée par :

$$S_{ABCD} = S_{AOB} + S_{BOC} + S_{COD} + S_{DOA}$$

Or

$$S_{AOB} = \frac{1}{2} qr \sin \alpha$$

$$S_{BOC} = \frac{1}{2} pq \sin \alpha$$

$$S_{COD} = \frac{1}{2} ps \sin \alpha$$

$$S_{DOA} = \frac{1}{2} sr \sin \alpha$$

$$\begin{aligned} \rightarrow S_{ABCD} &= \frac{1}{2} \sin \alpha. (rq + pq + ps + sr) \\ &= \frac{1}{2} \sin \alpha. [q(r + p) + s(p + r)] \\ &= \frac{1}{2} \sin \alpha. (r + p)(s + q) \\ &= \frac{1}{2} \sin \alpha. AC. BD \end{aligned}$$

**EXTRI072 – Polytech, Mons, questions posées de 1995 à 1998.**

Démontrer que l'expression suivante est indépendante de  $x$

$$E = \cos^2 x - 2 \cos a \cos x \cos(a+x) + \cos^2(a+x)$$

---

$$\begin{aligned} E &= \cos^2 x + \cos(a+x) \cdot [\cos(a+x) - 2 \cos a \cos x] \\ &= \cos^2 x + \cos(a+x) \cdot [-\cos(a-x)] \\ &= \cos^2 x - \frac{1}{2}(\cos 2a + \cos 2x) \\ &= \cos^2 x - \frac{1}{2}(1 - 2 \sin^2 a + 2 \cos^2 x - 1) \\ &= \sin^2 a \end{aligned}$$

---

## EXTRI073 – Mons, questions posées de 1995 à 1998.

Résoudre l'équation trigonométrique suivante :

$$\sin 2x + \cos 2x = \sqrt{2} \cdot \sin x$$

et représenter les solutions sur le cercle trigonométrique.

### Méthode 1

$$\begin{aligned} \sin 2x + \cos 2x &= \sin 2x + \tan \frac{\pi}{4} \cos 2x = \frac{\sin 2x \cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{4} \cos 2x}{\cos \frac{\pi}{4}} \\ &= \frac{\sin \left( 2x + \frac{\pi}{4} \right)}{\cos \frac{\pi}{4}} = 2 \frac{\sin \left( 2x + \frac{\pi}{4} \right)}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

$$\rightarrow \sin \left( 2x + \frac{\pi}{4} \right) = \sin x$$

Solutions

$$a) 2x + \frac{\pi}{4} = x + k2\pi \quad \rightarrow \quad x = -\frac{\pi}{4} + k2\pi$$

$$b) 2x + \frac{\pi}{4} = (\pi - x) + k2\pi \quad \rightarrow \quad x = \frac{\pi}{4} + k \frac{2\pi}{3}$$

### Méthode 2

$$\sin 2x + \cos 2x = \sqrt{2} \cdot \sin x$$

$$\sin 2x + \sin \left( \frac{\pi}{4} - 2x \right) = \sqrt{2} \cdot \sin x$$

$$2 \sin \frac{\pi}{4} \cdot \cos \left( 2x - \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \cdot \sin x$$

$$\sqrt{2} \cdot \cos \left( 2x - \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \cdot \sin x$$

$$\sqrt{2} \cdot \sin \left( \frac{\pi}{2} + 2x - \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \cdot \sin x$$

$$\sin \left( 2x + \frac{\pi}{4} \right) = \sin x$$

Suite : voir méthode 1

## EXTRI074 – Mons, questions posées de 1995 à 1998.

Résoudre l'équation trigonométrique suivante :

$$\sqrt{3} \cos^2 x + 2 \sin x \cos x - \sqrt{3} \sin^2 x = \sqrt{2}$$

et représenter les solutions sur le cercle trigonométrique.

$$\begin{aligned}\sqrt{3} \cos^2 x + 2 \sin x \cos x - \sqrt{3} \sin^2 x &= \sqrt{2} \\ \sqrt{3} \frac{1 + \cos 2x}{2} + \sin 2x - \sqrt{3} \frac{1 - \cos 2x}{2} &= \sqrt{2} \\ \sqrt{3} \cos 2x + \sin 2x &= \sqrt{2}\end{aligned}$$

$$\text{Comme } \tan \frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}} \rightarrow$$

$$\cos 2x + \frac{\sin \frac{\pi}{6}}{\cos \frac{\pi}{6}} \sin 2x = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

$$\cos 2x \cos \frac{\pi}{6} + \sin 2x \sin \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cos \frac{\pi}{6}$$

$$\cos \left( 2x - \frac{\pi}{6} \right) = \frac{\sqrt{2} \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot 2} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos \frac{\pi}{4}$$

Solutions

$$a) 2x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \rightarrow x = \frac{5\pi}{24} + k\pi$$

$$b) 2x - \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \rightarrow x = -\frac{\pi}{24} + k\pi$$

## EXTRI075 – Mons, questions posées de 1995 à 1998.

Si les côtés  $a, b, c$  d'un triangle sont en progression arithmétique, démontrer la relation :

$$\tan \frac{A}{2} \cdot \tan \frac{C}{2} = \frac{1}{3}$$

Si  $r$  est la raison de la progression, on peut écrire :

$$\frac{b-r}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{b+r}{\sin C}$$

Or dans une proportion, si  $\frac{x}{y} = \frac{z}{w} \rightarrow \frac{x+z}{y+w} = \frac{x}{y} = \frac{z}{w}$

$$\rightarrow \frac{2b}{\sin A + \sin C} = \frac{b}{\sin B}$$

$$\text{or } \sin A + \sin C = 2 \sin \frac{A+C}{2} \cos \frac{A-C}{2}$$

$$\text{et } \sin B = \sin(\pi - A - C) = \sin(A + C) = 2 \sin \frac{A+C}{2} \cos \frac{A+C}{2}$$

$$\rightarrow \frac{2}{2 \sin \frac{A+C}{2} \cos \frac{A-C}{2}} = \frac{1}{2 \sin \frac{A+C}{2} \cos \frac{A+C}{2}}$$

$$\rightarrow 2 \cos \frac{A+C}{2} = \cos \frac{A-C}{2}$$

$$\rightarrow 2 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{C}{2} - 2 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{C}{2} = \cos \frac{A}{2} \cos \frac{C}{2} + \sin \frac{A}{2} \sin \frac{C}{2}$$

$$\rightarrow \cos \frac{A}{2} \cos \frac{C}{2} - 3 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{C}{2} = 0$$

$$\rightarrow \tan \frac{A}{2} \tan \frac{C}{2} = \frac{1}{3}$$

## EXTRI076 – Mons, questions posées de 1995 à 1998.

Soit

$$S = \cos x + \cos 2x + \dots \cos nx \quad x \in \mathfrak{R}, \quad x \neq 2k\pi, \quad n \in \mathbb{N}, n \neq 0$$

Démontrer que :

$$S \sin \frac{x}{2} = \sin \frac{nx}{2} \cos \left( (n+1) \frac{x}{2} \right)$$

$$S \sin \frac{x}{2} = \cos x \sin \frac{x}{2} + \cos 2x \sin \frac{x}{2} + \cos 3x \sin \frac{x}{2} + \dots \cos nx \sin \frac{x}{2}$$

$$2S \sin \frac{x}{2} = \left( \sin \frac{3x}{2} - \sin \frac{x}{2} \right) + \left( \sin \frac{5x}{2} - \sin \frac{3x}{2} \right) +$$

$$\dots + \left( \sin \frac{(2n+1)x}{2} - \sin \frac{(2n-1)x}{2} \right)$$

$$= \sin \frac{(2n+1)x}{2} - \sin \frac{x}{2}$$

$$= 2 \sin \frac{nx}{2} \cos \frac{(n+1)x}{2}$$

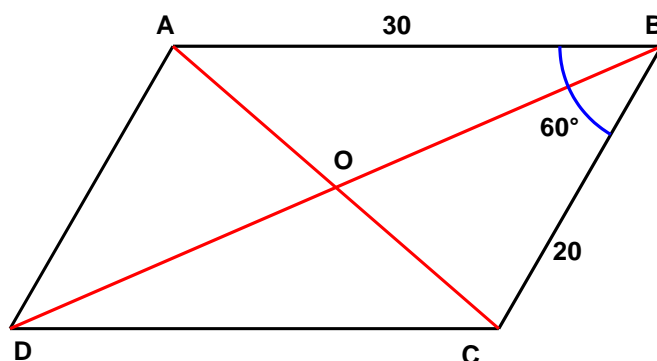


## EXTRI077 – Bruxelles, juillet 2000.

Dans le parallélogramme ABCD, on a

$$|\overline{AB}| = 30 \quad , \quad |\overline{BC}| = 20 \quad , \quad \text{et} \quad B = 60^\circ$$

Calculer la longueur des diagonales  $|\overline{AC}|$  et  $|\overline{BD}|$ , l'aire du parallélogramme et le cosinus de l'angle formé par les diagonales.



$$|\overline{AC}|^2 = 30^2 + 20^2 - 2 \times 30 \times 20 \times \cos 60 \quad \rightarrow \quad |\overline{AC}| = 26.4575$$

$$|\overline{DB}|^2 = 30^2 + 20^2 - 2 \times 30 \times 20 \times \cos 120 \quad \rightarrow \quad |\overline{DB}| = 43.5890$$

$$\text{Aire : } S = 30 \times 20 \times \sin 60 = 519.6152$$

$$|\overline{OB}| = 21.7945 \quad |\overline{OA}| = 13.2288$$

$$30^2 = 21.7945^2 + 13.2288^2 - 2 \times 21.7945 \times 13.2288 \times \cos AOB$$

$$\rightarrow \cos AOB = -0.4336 \quad \rightarrow \quad \widehat{AOB} = 115.693$$

---

Modifié le 19 juin 2008 (Anthony Bertagno)

## EXTRI078 – Bruxelles, juillet 2000.

Résoudre et discuter, suivant les valeurs réelles de  $a$ , le système d'équations (les inconnues sont  $x$  et  $y$ ).

$$\begin{cases} (\cos^2 a)x + (\sin^2 a)y = \sin a \\ (\sin^2 a)x + (\cos^2 a)y = \cos a \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cos^2 a & \sin^2 a \\ \sin^2 a & \cos^2 a \end{vmatrix} = \cos^4 a - \sin^4 a = (\cos^2 a - \sin^2 a)(\cos^2 a + \sin^2 a) = \cos 2a$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} \sin a & \sin^2 a \\ \cos a & \cos^2 a \end{vmatrix} = \sin a \cos a (\cos a - \sin a) = \sin 2a (\cos a - \sin a)$$

$$\begin{aligned} \Delta_y &= \begin{vmatrix} \cos^2 a & \sin a \\ \sin^2 a & \cos a \end{vmatrix} = \cos^3 a - \sin^3 a = (\cos a - \sin a)(\cos^2 + \sin a \cos a + \sin^2 a) \\ &= (\cos a - \sin a) \left(1 + \frac{\sin 2a}{2}\right) \end{aligned}$$

Etudions  $\Delta$

$$\cos 2a = 0 \rightarrow 2a = \pm \frac{\pi}{2} + 2k\pi \rightarrow a = \pm \frac{\pi}{4} + k\pi$$

$$a) k = 0, \quad a = +\frac{\pi}{4}$$

$$\text{Le système devient : } \begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{y}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{x}{2} + \frac{y}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \rightarrow y = \sqrt{2} - x$$

$$b) k = 1, \quad a = \frac{3\pi}{4} \rightarrow \text{Système impossible}$$

$$c) k = 2, \quad a = \frac{5\pi}{4} \rightarrow y = -\sqrt{2} - x$$

$$d) k = 3, \quad a = \frac{7\pi}{4} \rightarrow \text{Système impossible}$$

$$\text{Dans les autres cas : } \begin{cases} x = \frac{\sin a \cos a}{\cos a + \sin a} \\ y = \frac{1 - 2 + \sin 2a}{2 \cos a + \sin a} \end{cases}$$

## EXTRI079 – Bruxelles, septembre 2000.

Démontrer que si  $A, B, C$  sont les mesures des angles d'un triangle non rectangle alors.

$$\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C$$

$$\tan A + \tan B + \tan c = \tan a \tan B \tan C$$

$$\frac{\sin A}{\cos A} + \frac{\sin B}{\cos B} + \frac{\sin C}{\cos C} = \frac{\sin A}{\cos A} \frac{\sin B}{\cos B} \frac{\sin C}{\cos C}$$

$$\sin A \cos B \cos C + \sin B \cos A \cos C + \sin C \cos A \cos B = \sin A \sin B \sin C$$

Réarrangeons le premier membre :

$$(\sin A \cos B + \sin B \cos A) \cos C + \sin C \cos A \cos B$$

$$= \sin(A+B) \cos(\pi - (A+B)) + \sin C \cos A \cos B$$

$$= -\sin(\pi - C) \cos(A+B) + \sin C \cos A \cos B$$

$$= -\sin C (\cos A \cos B - \sin A \sin B) + \sin C \cos A \cos B$$

$$= \sin A \sin B \sin C$$