

Exercices résolus de mathématiques.

Trigonométrie

Calcul numérique

TRI 8

EXTRI080 – EXTRI089

<http://www.matheux.be.tf>

Jacques Collot

Janvier 04

EXTRI080 – Bruxelles, septembre 2000.

a) Pour quelle(s) valeur(s) réelle(s) de m le système (l'inconnue est m)

$$\begin{cases} m \sin x + \cos x = 1 + m \\ \sin x + m \cos x = 1 + m \end{cases} \quad (S)$$

possède-t-il des solutions ? Dans ce(s) cas calculer ces solutions.

b) Représenter graphiquement

$$\{(\cos x, \sin x) \in \mathbb{R}^2 \mid x \text{ est solution de } (S)\}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} m & 1 \\ 1 & m \end{vmatrix} = (m-1)(m+1)$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 1+m & 1 \\ 1+m & m \end{vmatrix} = (m-1)(m+1)$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} m & 1+m \\ 1 & 1+m \end{vmatrix} = (m-1)(m+1)$$

$$a) m = 1 \rightarrow \begin{cases} \sin x + \cos x = 2 \\ \sin x + \cos x = 2 \end{cases} \text{ Système impossible}$$

$$b) m = -1 \rightarrow \begin{cases} -\sin x + \cos x = 0 \\ \sin x - \cos x = 0 \end{cases} \rightarrow \sin x = \cos x \rightarrow \tan x = 1$$

$$\rightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi$$

$$\text{Dans les autres cas : } \begin{cases} \sin x = 1 \\ \cos x = 1 \end{cases} \text{ Système impossible.}$$

Le lecteur représentera les solutions sur le cercle trigonométrique.

EXTRI081 – Bruxelles, juillet 2001.

1. Résoudre dans \mathbb{R} l'équation :

$$\cos x + \sqrt{3} \sin x = 1 \quad (E)$$

2. Représenter graphiquement

$$\{(\cos x, \sin x) \in \mathbb{R}^2 \mid x \text{ est solution de } (E)\}$$

$$\begin{aligned} \tan \varphi = \sqrt{3} &\rightarrow \varphi = 60^\circ \rightarrow \cos \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow \cos(x - 60) = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \rightarrow \begin{cases} x - 60 = 60 + k360^\circ \\ x - 60 = -60 + k360^\circ \end{cases} &\rightarrow \begin{cases} x = 120 + k360^\circ \\ x = k360 \end{cases} \end{aligned}$$

Le lecteur représentera les solutions sur le cercle trigonométrique.

EXTRI082 – FACS, ULB, Bruxelles, juillet 2001.

Dans un triangle ABC on a

$$a = \sqrt{6} \quad , \quad b = \sqrt{3} \quad \text{et} \quad c = 1$$

1. Calculer

$\cos A$, $\cos B$, $\sin A$ et $\sin B$

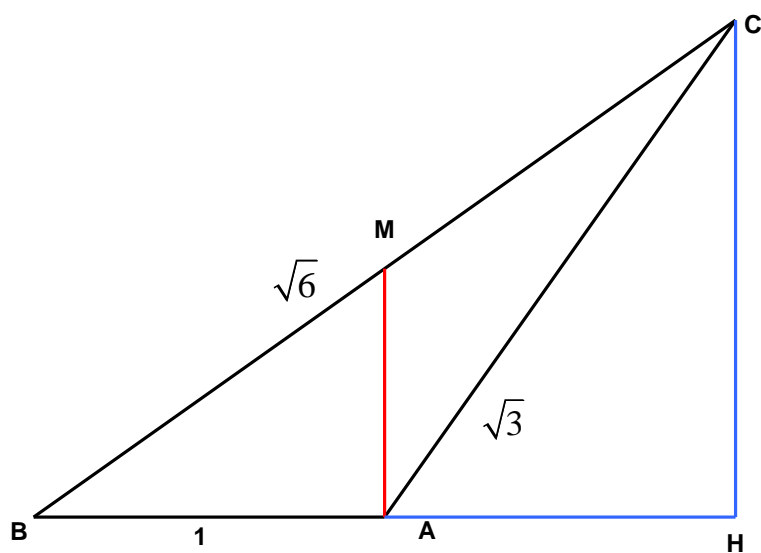
2. Démontrer que

$$A - B = \frac{\pi}{2}$$

3. Soit M le milieu du segment BC, calculer

$$|\overline{AM}|$$

et en déduire que la droite AM est perpendiculaire à la droite AB.



$$a) \cos A = \frac{3+1-6}{2\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\cos B = \frac{6+1-3}{2\sqrt{6}} = \frac{4}{2\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$\text{Soit } CH \text{ une hauteur : } AH = AC \cos(\pi - A) = \sqrt{3} \frac{\sqrt{3}}{3} = 1$$

$$\rightarrow CH = \sqrt{AC^2 - AH^2} = \sqrt{2} \rightarrow \sin A = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\sin A = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}} \sin A = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$b) \sin(A - B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B = \frac{\sqrt{6}}{3} \frac{\sqrt{6}}{3} - \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \frac{\sqrt{3}}{3} = 1$$

$$\rightarrow A - B = \frac{\pi}{2}$$

$$c) AM^2 = \left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2 + 1 - 2 \frac{\sqrt{6}}{2} \cos B = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{On en déduit que le triangle BMA est rectangle en A car : } \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 1^2 = \left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2$$

Note : Vu l'énoncé, (on ne demande pas de calculer les angles), il convient d'éviter de se servir de sa machine à calculer

EXTRI083 – Facs, ULB, Bruxelles, septembre 2001.
– EPL, UCL, LLN, septembre 2005.
– POLYTECH, UMon, Mons, juillet 2015.

Si

$$a + b + c + d = 2\pi$$

démontrer que

$$\sin a + \sin b + \sin c + \sin d = 4 \sin \frac{a+b}{2} \sin \frac{b+c}{2} \sin \frac{a+c}{2}$$

Premier membre :

$$\begin{aligned} \sin a + \sin b + \sin c + \sin d &= \sin a + \sin b + \sin c - \sin(a+b+c) \\ &= 2 \sin \frac{a+c}{2} \cos \frac{a-c}{2} - 2 \cos \frac{a+2b+c}{2} \sin \frac{a+c}{2} \\ &= 2 \sin \frac{a+c}{2} \left(\cos \frac{a-c}{2} - \cos \frac{a+2b+c}{2} \right) \\ &= 2 \sin \frac{a+c}{2} \left(-2 \sin \frac{\frac{a-c}{2} + \frac{a+2b+c}{2}}{2} \sin \frac{\frac{a-c}{2} - \frac{a+2b+c}{2}}{2} \right) \\ &= 4 \sin \frac{a+b}{2} \sin \frac{b+c}{2} \sin \frac{a+c}{2} \end{aligned}$$

EXTRI084 – FACS, ULB, Bruxelles, juillet 2002.

Résoudre dans \mathbb{R} , l'équation :

$$\sin^3 x + \cos^3 x = 1$$

$$\sin^3 x + \cos^3 x = 1$$

$$\sin^3 x + \cos^3 x = \sin^2 x + \cos^2 x$$

$$\sin^2 x(\sin x - 1) + \cos^2 x(\cos x - 1) = 0$$

$$(1 - \cos^2 x)(\sin x - 1) + (1 - \sin^2 x)(\cos x - 1) = 0$$

$$(1 - \cos x)(1 + \cos x)(\sin x - 1) + (1 - \sin x)(1 + \sin x)(\cos x - 1) = 0$$

$$(1 - \cos x)(\sin x - 1)(2 + \cos x + \sin x) = 0$$

a) $1 - \cos x = 0 \rightarrow x = 2k\pi$

b) $\sin x - 1 = 0 \rightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

c) $2 + \cos x + \sin x = 0$ Equation impossible

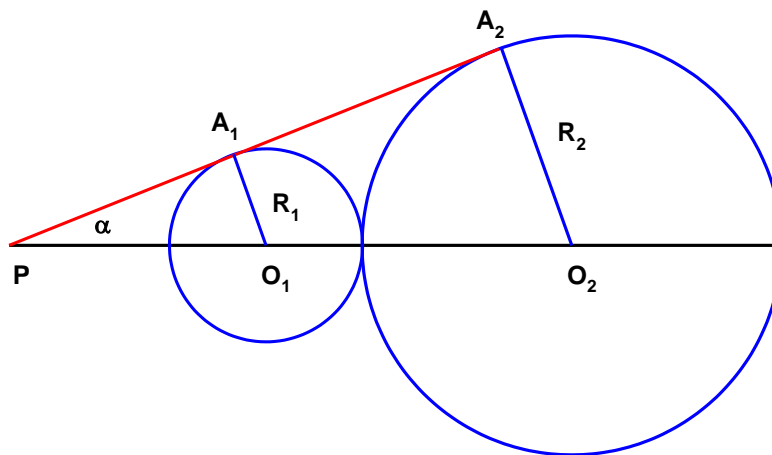
EXTRI085 – Bruxelles, juillet 2002.

Soient deux cercles de centres O_1 et O_2 et de rayons respectifs R_1 et R_2 ($0 < R_1 < R_2$), tangents extérieurement.

Soient A_1 et A_2 les points situés sur une des deux tangentes communes extérieurement à ces deux cercles tels que

$$R_1 = \left| \overrightarrow{O_1 A_1} \right| \quad \text{et} \quad R_2 = \left| \overrightarrow{O_2 A_2} \right|$$

1. Calculer $\sin \alpha$, où α est l'angle entre les droites $O_1 O_2$ et $A_1 A_2$.
2. En déduire le rapport des rayons lorsque la mesure de α est 30°



$$a) \quad PO_2 - PO_1 = R_1 + R_2$$

$$PO_1 = \frac{R_1}{\sin \alpha} \quad PO_2 = \frac{R_2}{\sin \alpha}$$

$$\rightarrow R_1 + R_2 = \frac{R_2}{\sin \alpha} - \frac{R_1}{\sin \alpha} \quad \rightarrow \quad \sin \alpha = \frac{R_2 - R_1}{R_1 + R_2}$$

$$b) \quad \alpha = 30^\circ \quad \rightarrow \quad \sin \alpha = \frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad R_1 + R_2 = 2R_2 - 2R_1$$

$$\rightarrow \quad \frac{R_2}{R_1} = 3$$

EXTRI086 – Bruxelles, septembre 2002.

Résoudre dans \mathbb{R}^2 le système

$$\begin{cases} \sin x + \sin y = 1 \\ \cos x \cdot \cos y = \frac{3}{4} \end{cases}$$

Vu que le système est symétrique en x et y , on peut se poser directement la question de savoir s'il existe une solution telle que $x = y$.

On vérifie effectivement :
$$\begin{cases} 2 \sin x = 1 \rightarrow \sin x = \frac{1}{2} \rightarrow x = y = 60^\circ \\ \cos^2 x = \frac{3}{4} \rightarrow \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow x = y = 60^\circ \end{cases}$$

Recherchons si le système possède d'autres solutions.

$$\begin{cases} \sin x + \sin y = 1 \\ \cos x \cdot \cos y = \frac{3}{4} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \sin x = 1 - \sin y \\ \cos x = \frac{3}{4 \cos y} \end{cases} \rightarrow (1 - \sin y)^2 + \frac{9}{16 \cos^2 y} = 1$$

$$\rightarrow 1 - 2 \sin y + \sin^2 y + \frac{9}{16(1 - \sin^2 y)} = 1$$

Posons $t = \sin y$. Après réarrangement on trouve :

$$P(t) = t^4 - 2t^3 - t^2 + 2t - \frac{9}{16} = 0$$

On vérifie que $\frac{1}{2}$ est bien une solution car $P\left(\frac{1}{2}\right) = 0$

	4	3	2	1	0	
		1	-2	-1	2	$-\frac{9}{16}$
Horner :	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{7}{8}$	$\frac{9}{16}$	
		1	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{7}{4}$	$\frac{9}{8}$	0

$$\rightarrow P(t) = \left(t - \frac{1}{2}\right) \left(t^3 - \frac{3}{2}t^2 - \frac{7}{4}t + \frac{9}{8}\right)$$

Comme on a fait une élévation au carré pour éliminer x , on peut se poser

la question de savoir si $\frac{1}{2}$ n'est pas une racine double.

Effectivement, le deuxième facteur est nulle si $t = \frac{1}{2}$

n	3	2	1	0
	1	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{7}{4}$	$\frac{9}{8}$
Horner :	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{9}{8}$
	1	-1	$-\frac{9}{8}$	0

$$\rightarrow P(t) = \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 \left(t^2 - t - \frac{9}{4}\right)$$

Le deuxième facteur admet pour solutions $t = 2.0811$ et $t = -1.081$ qui sont toutes les deux à rejeter.

Conclusion : $x = y = 60^\circ$

EXTRI087 – EPB, ULB, Bruxelles, septembre 2002.
FACSA, ULiège, Liège, juillet 2019.

Démontrer que si dans le triangle ABC on a

$$\cos 3A + \cos 3B + \cos 3C = 1$$

alors l'un des angles mesure 120°

$$\cos 3A + \cos 3B + \cos 3C = 1$$

$$2 \cos 3 \frac{A+B}{2} \cos 3 \frac{A-B}{2} = 1 - \cos 3C$$

$$\text{Or } \cos 3 \frac{A+B}{2} = \cos 3 \frac{\pi - C}{2} = \cos \left(\frac{3\pi}{2} - \frac{3C}{2} \right) = -\sin \frac{3C}{2}$$

$$\text{Et } 1 - \cos 3C = 2 \sin^2 \frac{3C}{2}$$

$$\rightarrow -2 \sin \frac{3C}{2} \cos 3 \frac{A-B}{2} = 2 \sin^2 \frac{3C}{2}$$

$$\text{Cette équation admet une solution pour } \sin \frac{3C}{2} = 0$$

$$\rightarrow \frac{3C}{2} = 360^\circ \rightarrow C = 240^\circ = -120^\circ \rightarrow |C| = 120^\circ$$

En vertu de la symétrie de l'équation, on peut aussi avoir
 $A = 120^\circ$ ou $B = 120^\circ$

EXTRI088 – Louvain, juillet 1999.

Trouver, pour chacun des cas, les relations qui existent entre x et y si on a :

a. $\cos 2x = \cos 2y$

b. $\tan^2 x = \tan^2 y$

c. $\sin^2 x + \sin^2 y = 1$

a) $\cos 2x = \cos 2y \rightarrow 2x = \pm 2y + 2k\pi \rightarrow x = \pm y + k\pi$

b) $\tan^2 x = \tan^2 y \rightarrow \tan x = \pm \tan y$

1) $\tan x = \tan y \rightarrow x = y + k\pi$

2) $\tan x = -\tan y \rightarrow x = -y + k\pi$

Finalement : $x = \pm y + k\pi$

c) $\sin^2 x + \sin^2 y = 1 \rightarrow \sin^2 x + \sin^2 y = \sin^2 x + \cos^2 x$

$\rightarrow \sin^2 y = \cos^2 x \rightarrow \sin^2 y = \sin^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \rightarrow \sin y = \pm \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

1) $\sin y = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \rightarrow y = \frac{\pi}{2} - x + 2k\pi \quad \text{et} \quad y = \frac{\pi}{2} + x + 2k\pi$

2) $\sin y = -\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \rightarrow \sin y = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

$\rightarrow y = x - \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad \text{et} \quad y = \frac{3\pi}{2} - x + 2k\pi$

Finalement : $y = \frac{\pi}{2} \pm x + k\pi$

EXTRI089 – EPL, UCL, LLN, juillet 1999.

Résoudre l'équation en x suivante :

$$2 \sin^2 3x + \sin^2 6x = 2$$

et mettre les solutions sur le cercle trigonométrique

$$\begin{aligned} 2 \sin^2 3x + \sin^2 6x = 2 &\Rightarrow 2 \sin^2 3x + 4 \sin^2 3x \cos^2 3x = 2(\cos^2 3x + \sin^2 3x) \\ &\Rightarrow 2 \sin^2 3x \cos^2 3x = \cos^2 3x \end{aligned}$$

$$1) \cos^2 3x = 0 \Rightarrow 3x = \pm \frac{\pi}{2} + 2k\pi \Rightarrow x = \pm \frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}k\pi$$

$$2) 2 \sin^2 3x = 1 \Rightarrow \sin 3x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$2.1) \sin 3x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{12} + \frac{2}{3}k\pi$$

$$2.2) \sin 3x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = -\frac{\pi}{12} + \frac{2}{3}k\pi$$

$$\text{Finalement : } \boxed{x = \pm \frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}k\pi \quad \text{et} \quad x = \pm \frac{\pi}{12} + \frac{2}{3}k\pi}$$

Le lecteur représentera les solutions sur le cercle trigonométrique

Modifié le 25 avril 2014 (Jean Perbal)