

Si dans le triangle ABC , on a $\widehat{A} = 2\widehat{B}$, démontrer que $a^2 = b \cdot (b + c)$.

Si $\widehat{A} = 2\widehat{B}$, on a $\sin \widehat{A} = \sin 2\widehat{B}$. La relation des sinus $\frac{a}{\sin \widehat{A}} = \frac{b}{\sin \widehat{B}} = \frac{c}{\sin \widehat{C}}$ se transforme donc en $\frac{a}{\sin 2\widehat{B}} = \frac{b}{\sin \widehat{B}} = \frac{c}{\sin \widehat{C}}$ d'où on tire

$$a \sin \widehat{B} = b \sin 2\widehat{B} = 2b \sin \widehat{B} \cos \widehat{B} \iff a = 2b \cos \widehat{B} \iff \cos \widehat{B} = \frac{a}{2b} \quad (1)$$

Ecrivons la relation des cosinus dans le triangle ABC : $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \widehat{B}$ et injectons-y la relation de (1). Nous obtenons

$$\begin{aligned} b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac \cdot \frac{a}{2b} \\ \iff b^2 &= a^2 + c^2 - \frac{a^2 c}{b} \\ \iff b^2 - c^2 &= a^2 \left(1 - \frac{c}{b}\right) \\ \iff b^2 - c^2 &= a^2 \cdot \frac{b - c}{b} \\ \iff (b - c) \cdot (b + c) &= a^2 \cdot \frac{b - c}{b} \\ \iff \boxed{a^2} &= b \cdot (b + c) \end{aligned}$$

Remarque : cette question a également été posée lors de la finale de l'Olympiade mathématique belge en 2010, catégorie MaXi.