Résoudre l'équation : $\cos 2x = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}(\cos x - \sin x)$.

Grâce aux formules de duplication et aux produits remarquables, on a

$$\begin{aligned}
\cos 2x = \frac{1+\sqrt{3}}{2}(\cos x - \sin x) \quad &\Longleftrightarrow \quad \cos^2 x - \sin^2 x = \frac{1+\sqrt{3}}{2}(\cos x - \sin x)\\
&\Longleftrightarrow \quad (\cos x - \sin x)\cdot(\cos x + \sin x) = \frac{1+\sqrt{3}}{2}(\cos x - \sin x)\\
&\Longleftrightarrow \quad \cos x - \sin x = 0 \qquad \text{ou} \qquad \cos x + \sin x = \frac{1+\sqrt{3}}{2}
\end{aligned}$$

- $\cos x - \sin x = 0$ ou encore $\tan x = 1$, c'est-à-dire $x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$.

- $\cos x + \sin x = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$ est une équation linéaire. On a successivement

$$\begin{aligned}
\cos x + \sin x = \frac{1+\sqrt{3}}{2} \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x + \sin x) = \frac{\sqrt{2}\,(1+\sqrt{3})}{4}\\
&\Longleftrightarrow \quad \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{12} \qquad \mathbf{(1)}\\
&\Longleftrightarrow \quad x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12} + 2k\pi \qquad \text{ou} \qquad x - \frac{\pi}{4} = \frac{-\pi}{12} + 2k\pi\\
&\Longleftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \qquad \text{ou} \qquad x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi
\end{aligned}$$

Finalement les quatre solutions principales sont $\boxed{Sol = \left\{\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{4}; \dfrac{\pi}{3}; \dfrac{5\pi}{4}\right\}}$.

(1) : convenons que la valeur $\cos\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{2}\,(1+\sqrt{3})}{4}$ n'est connue de (presque) aucun étudiant.

Vérifions-la cependant grâce aux formules d'addition :

$$\begin{aligned}
\cos\frac{\pi}{12} &= \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right)\\
&= \cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}\\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\\
&= \frac{\sqrt{2}\,(1+\sqrt{3})}{4}
\end{aligned}$$