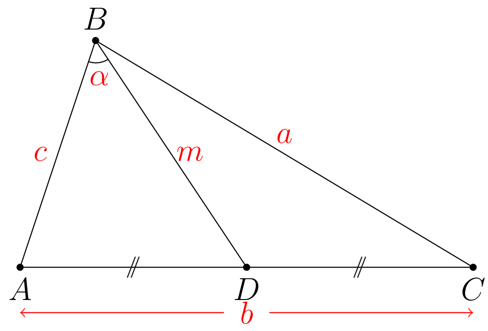
Soit D le milieu du côté $[AC]$ du triangle ABC et soit $\alpha = \widehat{ABD}$. Démontrer que si $\tan\widehat{B} = 2\sin\widehat{A}$, alors $\alpha = \dfrac{\widehat{A}}{2}$.

Hypothèse : ABC est un triangle, D est le milieu de $[AC]$ et $\alpha = \widehat{ABD}$.
$\tan\widehat{B} = 2\sin\widehat{A}$ donc $\sin\widehat{B} = 2\sin\widehat{A}\cos\widehat{B}$ (1).

Thèse : $\alpha = \dfrac{\widehat{A}}{2}$



Appelons m la longueur de la médiane $[BD]$. On a immédiatement $\widehat{BDA} = 180 - \alpha - \widehat{A}$, $\widehat{C} = 180 - \widehat{A} - \widehat{B}$ et $\widehat{BDC} = \widehat{A} + \alpha$.

- Dans le triangle BDC, la relation des sinus fournit

$$\frac{|BC|}{\sin\widehat{BDC}} = \frac{|BD|}{\sin\widehat{C}} = \frac{|DC|}{\sin\widehat{DBC}} \iff \frac{|BC|}{\sin\left(\widehat{A}+\alpha\right)} = \frac{m}{\sin\left(\widehat{A}+\widehat{B}\right)} = \frac{\frac{1}{2}|AC|}{\sin\left(\widehat{B}-\alpha\right)}$$

$$\iff \frac{a}{\sin\left(\widehat{A}+\alpha\right)} = \frac{m}{\sin\left(\widehat{A}+\widehat{B}\right)} = \frac{b}{2\sin\left(\widehat{B}-\alpha\right)} \qquad (2)$$

- Dans le triangle ABC, la relation des sinus fournit

$$\frac{a}{\sin\widehat{A}} = \frac{b}{\sin\widehat{B}} = \frac{c}{\sin\left(\widehat{A}+\widehat{B}\right)} \qquad (3)$$

- Dans le triangle ABD, la relation des sinus fournit

$$\frac{m}{\sin\widehat{A}} = \frac{b}{2\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\left(\widehat{A}+\alpha\right)} \qquad (4)$$

Partons des relations (2) : $\dfrac{a}{\sin\left(\widehat{A}+\alpha\right)} = \dfrac{m}{\sin\left(\widehat{A}+\widehat{B}\right)}$

$$\begin{aligned}
\frac{a}{\sin\left(\widehat{A}+\alpha\right)} &= \frac{m}{\sin\left(\widehat{A}+\widehat{B}\right)} \\
m\cdot\sin\left(\widehat{A}+\alpha\right) &= a\cdot\sin\left(\widehat{A}+\widehat{B}\right) \\
m\cdot\sin\left(\widehat{A}+\alpha\right) &= a\cdot\left(\sin\widehat{A}\cos\widehat{B}+\sin\widehat{B}\cos\widehat{A}\right) \\
m\cdot\sin\left(\widehat{A}+\alpha\right) &\overset{(1)}{=} a\cdot\left(\frac{\sin\widehat{B}}{2}+\sin\widehat{B}\cos\widehat{A}\right) \\
m\cdot\sin\left(\widehat{A}+\alpha\right) &= \frac{a\sin\widehat{B}}{2}\cdot\left(1+2\cos\widehat{A}\right) \\
m\cdot\sin\left(\widehat{A}+\alpha\right) &\overset{(3)}{=} \frac{b\sin\widehat{A}}{2}\cdot\left(1+2\cos\widehat{A}\right) \\
m\cdot\sin\left(\widehat{A}+\alpha\right) &\overset{(4)}{=} \frac{2m\sin\alpha}{2}\cdot\left(1+2\cos\widehat{A}\right) \\
m\cdot\sin\left(\widehat{A}+\alpha\right) &= m\sin\alpha\cdot\left(1+2\cos\widehat{A}\right) \\
\sin\left(\widehat{A}+\alpha\right) &= \sin\alpha\cdot\left(1+2\cos\widehat{A}\right)
\end{aligned}$$

En développant cette dernière expression, il vient

$$\begin{aligned}
\sin\widehat{A}\cos\alpha+\sin\alpha\cos\widehat{A} &= \sin\alpha+2\sin\alpha\cos\widehat{A} \\
\sin\widehat{A}\cos\alpha-\sin\alpha\cos\widehat{A} &= \sin\alpha \\
\sin\left(\widehat{A}-\alpha\right) &= \sin\alpha
\end{aligned}$$

On en déduit que $\alpha=\widehat{A}-\alpha$ (c'est-à-dire $\widehat{A}=2\alpha$) ou que $\alpha=\pi-(\widehat{A}-\alpha)$ ce qui est impossible.

On en conclut que $\boxed{\frac{\widehat{A}}{2}=\alpha}$.