Exercices résolus de mathématiques.

Algèbre

ALG 1

EXALG010 – EXALG019

http://www.matheux.be.tf

Jacques Collot

1 avril 03

EXALG010W

Soit un rectangle isocèle ABC, dont l'hypoténuse BC vaut 2a.
Déterminer un point M sur cette hypoténuse tel que :

$$\overline{MA}^2 + \overline{MB}^2 = k(\overline{MA}^2 + \overline{MC}^2)$$

Discuter, k étant positif.

ABC Δ isocèle rectangle $\rightarrow$ $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2$ $\quad 2\overline{AB}^2 = 4a^2$ $\quad \overline{AB} = \overline{AC} = a\sqrt{2}$

M peut varier de B en C. Point remarquable de BC $=$ O milieu de BC

1) M en B $\quad \overline{MA}^2 + \overline{MB}^2 = k\left(\overline{MA}^2 + \overline{MC}^2\right) \rightarrow 2a^2 = k(2a^2 + 4a^2) \rightarrow k = \frac{1}{3}$

2) M en O $\quad \overline{MA} = \overline{MB} = \overline{MC} = a \rightarrow a^2 + a^2 = k(a^2 + a^2) \rightarrow k = 1$

3) M en C $\quad 2a^2 + 4a^2 = 2ka^2 \rightarrow k = 3$

Solutions

M en B	$k = 1/3$
M entre B et O	$1/3 < k < 1$
M en O	$k = 1$
M entre O et C	$1 < k < 3$
M en C	$k = 3$

EXALG011 - Complément.

Résoudre le système suivant

$$\begin{cases} x-3y+2z-t+u=-13 \\ -2x+y+3z-u=-1 \\ y-2z+t=0 \\ x-2t+3u=-13 \\ 3x-2y+z-t+4u=-14 \end{cases}$$

Nous allons utiliser la méthode de Gauss (élimination des variables par combinaisons successives). Nous allons utiliser un tableau ce qui plus est simple que d'écrire des matrices.

- La première colonne indique l'opération faite sur les lignes.
- La deuxième colonne est le numéro de la ligne.
- Les 5 colonnes suivantes représentent les coefficients des inconnues
- La huitième colonne reprend le terme indépendant.
- La dernière colonne donne la somme des colonnes 3 à 7. C'est une valeur de contrôle qui se révèle très efficace et même indispensable lorsque les systèmes deviennent importants (plus de 3 inconnues). On effectue sur la colonne de contrôle les mêmes opérations que sur les lignes. La dernière colonne doit toujours rester égale à la somme des colonnes de 3 à 7. Il est curieux de constater que cette astuce n'est pratiquement jamais enseignée, et se trouve rarement mentionnée dans les livres.

Opération	N	x	y	z	t	u		$\sum$
	1	1	–3	2	–1	1	–13	–13
	2	–2	1	3	0	–1	–1	0
	3	0	1	–2	1	0	8	8
	4	1	0	0	–2	3	–13	11
	5	3	–2	1	–1	4	–14	–9
(1)	6	1	–3	2	–1	1	–13	–13
$(2)+2(1)$	7	0	–5	7	–2	1	–27	–26
(3)	8	0	1	–2	1	0	8	8
$(4)-(1)$	9	0	3	–2	–1	2	0	2
$(5)-3(1)$	10	0	7	–5	2	1	25	30
$(6)+3(8)$	11	1	0	–4	2	1	11	11
(8)	12	0	1	–2	1	0	8	8
$(7)+5(8)$	13	0	0	–3	3	1	13	14
$(9)-3(8)$	14	0	0	4	–4	2	–24	–22
$(10)-7(8)$	15	0	0	9	–5	1	–31	–26
$(11)+4(18)$	16	1	0	0	–2	3	–13	–11
$(12)+2(18)$	17	0	1	0	–1	1	–4	3
$(18)/4$	18	0	0	1	–1	1/2	–6	–11/2
$(13)+3(18)$	19	0	0	0	0	5/2	–5	–5/2
$(15)-9(18)$	20	0	0	0	4	–7/2	23	47/2
$(16)+2(24)$	21	1	0	0	0	5/4	–3/2	3/4
$(17)+(24)$	22	0	1	0	0	1/8	7/4	23/8
$(18)+(24)$	23	0	0	1	0	–3/8	–1/4	3/8
$(20)/4$	24	0	0	0	1	–7/8	23/4	47/8
$5/2.(19)$	25	0	0	0	0	1	–2	–1
$(21)-5/4.(25)$	26	1	0	0	0	0	1	2
$(22)-1/8.(25)$	27	0	1	0	0	0	2	3
$(23)+3/8.(25)$	28	0	0	1	0	0	–1	0
$(24)+7/8.(25)$	29	0	0	0	1	0	4	5
(25)	30	0	0	0	0	1	–2	–1

$$\Rightarrow S=\{(1,2,-1,4,-2)\}$$

EXALG012 – Liège, juillet 1999.

Discuter et résoudre le système :

$$\begin{cases} ax + a^2 y + a^3 z = 2 \\ ax - y + 4az = a \\ x + ay + 2az = 1 \end{cases}$$

a étant un paramètre réel.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & a^2 & a^3 \\ a & -1 & 4a \\ 1 & a & 2a \end{vmatrix} = a^2(a-2)(a^2+1)$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 2 & a^2 & a^3 \\ a & -1 & 4a \\ 1 & a & 2a \end{vmatrix} = a(a^3+5a+2)(a-2)$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} a & 2 & a^3 \\ a & a & 4a \\ 1 & 1 & 2a \end{vmatrix} = 2a(a-2)^2$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} \mathrm{a} & a^2 & 2 \\ a & -1 & a \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix} = -(a-2)(a^2+1)$$

si $a =$ 2, le système devient

$$\begin{cases} 2x + 4y + 8z = 2 \\ 2x - y + 8z = 2 \\ x + 2y + 4z = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 1 - 4z \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{simple indétermination}$$

si $a = 0$, le système devient

$$\begin{cases} 0 = 2 \\ -y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \quad \text{système impossible}$$

Dans les autres cas :

$$\begin{cases} x = \dfrac{a^3 + 5a + 2}{a(a^2+1)} \\ y = \dfrac{2(a-2)}{a(a^2+1)} \\ z = -\dfrac{1}{a^2} \end{cases}$$

EXALG013 – Liège, juillet 1996.

Discuter et résoudre le système :

$$\begin{cases} x+ay+a^2z=a^3 \\ a^3x+a^2y+az=1 \\ x+2ay+3a^2z=4a^3 \end{cases}$$

a étant un paramètre réel.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ a^3 & a^2 & a \\ 1 & 2a & 3a^2 \end{vmatrix} = -a^2(a+1)^2(a-1)^2$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} a^3 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \\ 4a^3 & 2a & 3a^2 \end{vmatrix} = -a^3(a-1)^2(a+1)^2$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & a^3 & a^2 \\ a^3 & 1 & a \\ 1 & 4a^3 & 3a^2 \end{vmatrix} = a^2(a-1)^2(a+1)^2(a^2+2)$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ a^3 & a^2 & 1 \\ 1 & 2a & 4a^3 \end{vmatrix} = -a(a-1)^2(a+1)^2(2a^2+1)$$

Si $a=0$, le système devient : $\begin{cases} x=0 \\ 0=1 \\ x=0 \end{cases} \rightarrow$ système impossible

Si $a=1$, le système devient : $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+y+z=1 \\ x+2y+3z=4 \end{cases}$

$\rightarrow \begin{cases} x=z-2 \\ y=-2z+3 \end{cases}$ simple indétermination

si $a=-1$, $\rightarrow \begin{cases} x-y+z=-1 \\ -x+y-z=1 \\ x-2y+3z=-4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=2+z \\ y=3+2z \end{cases}$ simple indétermination

Dans les autres cas : $\begin{cases} x=a \\ y=-(a^2+2) \\ z=\dfrac{2a^2+1}{a} \end{cases}$

EXALG014 – Liège, juillet 1997.

Discuter et résoudre le système :

$$\begin{cases} x+by+bz=a^2 \\ ax+cy+dz=ab \\ x+y+z=b \end{cases}$$

a, b, c et d étant des paramètres réels.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & b \\ a & c & d \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (b-a)(d-c)$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} a^2 & b & b \\ ab & c & d \\ b & 1 & 1 \end{vmatrix} = -(d-c)(a-b)(a+b)$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} a & a^2 & b \\ a & ab & d \\ 1 & b & 1 \end{vmatrix} = a(b-a)(a-d)$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} a & b & a^2 \\ a & c & ab \\ 1 & 1 & b \end{vmatrix} = a(b-a)(c-a)$$

Si $b = a$, $d \neq c$:

$$\begin{cases} ax + ay + az = a^2 \\ ax + cy + dz = a^2 \\ x + y + z = a \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = \dfrac{d-a}{d-c}(a-x) \\ z = \dfrac{a-c}{d-c}(a-x) \end{cases} \quad \text{simple indétermination}$$

Si $b = a$, et $d = c$:

$$\begin{cases} ax + ay + az = a^2 \\ ax + cy + cz = a^2 \\ x + y + z = a \end{cases} \rightarrow \begin{cases} cy + cz = a(a-x) \\ y + z = a - x \end{cases}$$

uniquement possible si $a = b = c = d$, sinon impossible

$$\rightarrow \begin{cases} ax + ay + az = a^2 \\ ax + ay + az = a^2 \\ x + y + z = a \end{cases} \rightarrow \quad \text{double indétermination}$$

Si $d = c$, $a \neq b$

$$\begin{cases} ax + by + bz = a^2 \\ ax + cy + cz = ab \\ x + y + z = b \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b(y+z) = a(a-x) \\ c(y+z) = a(b-x) \\ y + z = b - x \end{cases} \quad \begin{cases} b(b-x) = a(a-x) \\ c(b-x) = a(b-x) \end{cases}$$

uniquement possible si $a = c = d$. *Dans ce cas :*

$$\begin{cases} b(b-x) = a(a-x) \\ a(b-x) = a(b-x) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = a + b \\ y = -a - z \end{cases} \quad \textit{simple indétermination.}$$

Dans les autres cas :

$$\begin{cases} x = a + b \\ y = a(a-d) \\ z = \dfrac{a(c-a)}{d-c} \end{cases}$$

EXALG015 – Liège, septembre 1999.

Discuter et résoudre le système :

$$\begin{cases} ax+ay+z=6 \\ x-y+az=2a \\ (a+1)x+2ay+(a+1)z=12 \end{cases}$$

a étant un paramètre réel.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & a & 1 \\ 1 & -1 & a \\ a+1 & 2a & a+1 \end{vmatrix} = -(a-1)(a+1)^2$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 6 & a & 1 \\ 2a & -1 & a \\ 12 & 2a & a+1 \end{vmatrix} = -2(a-1)(3+a^2)$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} a & 6 & 1 \\ 1 & 2a & a \\ a+1 & 12 & a+1 \end{vmatrix} = 2(a-1)(a+1)(a-3)$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} a & a & 6 \\ 1 & -1 & 2a \\ a+1 & 2a & 12 \end{vmatrix} = -2(a-1)(a^2+3)$$

Si $a=1$

$$\begin{cases} x+y+z=6 \\ x-y+z=2 \\ 2x+2y+2z=12 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y=2 \\ z=4-x \end{cases}$$ Simple indétermination

Si $a=-1$

$$\begin{cases} -x-y+z=6 \\ x+y-z=-2 \\ -2y=12 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y=-2 \\ y=-6 \end{cases}$$ Impossible

Dans les autres cas :

$$\begin{cases} x=\dfrac{2(a^2+3)}{(a+1)^2} \\ y=-\dfrac{2(a-3)}{a+1} \\ z=\dfrac{2(a^2+3)}{(a+1)^2} \end{cases}$$

EXALG016 – Liège, septembre 1998.

Discuter et résoudre le système :

$$\begin{cases} 2ax+(2a+1)y+(2a^2+a)z=-3a^2 \\ x+(1-a)y+(2-2a)z=0 \\ x+ay+2az=1 \end{cases}$$

a étant un paramètre réel.

$$\Delta=\begin{vmatrix} 2a & 2a+1 & 2a^2+a \\ 1 & 1-a & 2-2a \\ 1 & a & 2a \end{vmatrix}=(a-2)(2a+1)(2a-1)$$

$$\Delta_x=\begin{vmatrix} -3a^2 & 2a+1 & 2a^2+a \\ 0 & 1-a & 2-2a \\ 1 & a & 2a \end{vmatrix}=(a-1)(a-2)(2a+1)$$

$$\Delta_y=\begin{vmatrix} 2a & -3a^2 & 2a^2+a \\ 1 & 0 & 2-2a \\ 1 & 1 & 2a \end{vmatrix}=3a(2a-1)(2+1)$$

$$\Delta_z=\begin{vmatrix} 2a & 2a+1 & -3a^2 \\ 1 & 1-a & 0 \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix}=-(2a+1)(3a^2-2a+1)$$

Si $a=-\frac{1}{2}$

$$\begin{cases} -x=-\frac{3}{4} \\ x+\frac{3}{2}y+3z=0 \\ x-\frac{1}{2}y-z=1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=\frac{3}{4} \\ y=-\frac{1}{2}-2z \end{cases} \quad \text{Simple indétermination}$$

Si $a=2$

$$\begin{cases} 4x+5y+10z=-12 \\ x-y-2z=0 \\ x+2y+4z=1 \end{cases} \quad \text{or} \quad \Delta_y \neq 0 \quad \text{Impossible}$$

Si $a=\frac{1}{2} \rightarrow \Delta x \neq 0 \rightarrow$ Impossible

Dans les autres cas : $\begin{cases} x=\frac{a-1}{2a-1} \\ y=-\frac{3a}{a-2} \\ z=-\frac{3a^2-2a+1}{(a-2)(2a-1)} \end{cases}$

EXALG017 – Liège, septembre 2000.

Discuter et résoudre le système :

$$\begin{cases} ax+a^2y=a^3 \\ b^3x+b^2y=b \\ x+y=a \end{cases}$$

a et b étant des paramètres réels.

$$\begin{cases} ax+a^2y+a^3 \\ b^3x+b^2y=b \\ x+y=a \end{cases} \rightarrow \begin{cases} ax+a^2(a-x)=a^3 \\ b^3+b^2(a-x)=b \\ y=a-x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a(1-a)x=0 \\ b^2(b-1)x=b(1-ab) \\ y=a-x \end{cases}$$

1) $\underline{a=0}$

Le système devient : $\begin{cases} b^3x+b^2y=b \\ y=-x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b^2(b-1)x=b \\ y=-x \end{cases}$

$*$ Si $b=0 \rightarrow y=-x$ Simple indétermination

$*$ Si $b=1 \rightarrow \begin{cases} 0x=1 \\ y=-x \end{cases}$ Système impossible

$*$ Si $b \neq 0$ et $b \neq 1 \rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{1}{b(b-1)} \\ y=-\dfrac{1}{b(b-1)} \end{cases}$

2) $\underline{a=1}$

Le système devient : $\begin{cases} b^2(b-1)x=b(1-b) \\ y=1-x \end{cases}$

$*$ Si $b=0 \rightarrow \begin{cases} 0x=0 \\ y=1-x \end{cases} \rightarrow y=1-x$ Simple indétermination

$*$ Si $b=1 \rightarrow \begin{cases} 0x=0 \\ y=1-x \end{cases} \rightarrow y=1-x$ Simple indétermination

$*$ Si $b \neq 0$ et $b \neq 1 \rightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{1}{b} \\ y=1+\dfrac{1}{b} \end{cases}$

3) $\underline{a \neq 0 \text{ et } a \neq 1}$

Le système devient : $\begin{cases} x = 0 \\ b^2(b-1)x = b(1-ab) \\ y = a \end{cases}$

$*$ Si $b = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = a \end{cases}$

$*$ Si $b = 1 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ .x = 1 \\ y = a \end{cases} \rightarrow$ Système impossible

$*$ Si $b \neq 0$ et $b \neq 1 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \dfrac{1-ab}{b(b-1)} \\ y = a \end{cases}$

- Ce système n'est possible que si $1 - ab = 0$, soit $ab = 1$

Modifié le 13 août 206

EXALG018 – Liège, juillet 1996.

Résoudre le système :

$$\begin{cases} x^2 - 2y^2 - 2y = 0 \\ x^3 + 2y^2 = 0 \end{cases}$$

Additionnons les deux équations : $x^2 + x^3 - 2y = 0 \;\rightarrow\; y = \frac{1}{2}x^2\left(x+1\right)$

Remplaçons dans la première équation :

$$x^2 - \frac{1}{2}x^4\left(x+1\right)^2 - x^2\left(x+1\right) = x^2\left(1 - \frac{1}{2}x^2\left(x+1\right)^2 - x - 1\right) = -x^3\left(\frac{1}{2}x\left(x+1\right)^2 + 1\right) = 0$$

1) $x = 0 \;\rightarrow\; y = 0$

2) $\frac{1}{2}x\left(x+1\right)^2 + 1 = 0 \quad\rightarrow\quad x^3 + 2x^2 + x + 2 = 0$

Horner
$$\begin{array}{c|ccc|c} & 1 & 2 & 1 & 2 \\ \hline -2 & & -2 & 0 & -2 \\ \hline & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \quad\rightarrow\quad \left(x+2\right)\left(x^2+1\right) = 0$$

$\rightarrow\; x = -2 \;\rightarrow\; y = -2$

Résolu le 19 mars 2003

EXALG019 – Mons, questions-types 2000-2001.

Résoudre, discuter et interpréter graphiquement en fonction de la valeur des paramètres a et b.

$$\begin{cases} ax+by+z=1 \\ x+aby+z=b \\ x+by+az=1 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & 1 \\ 1 & ab & 1 \\ 1 & b & a \end{vmatrix} = b(a-1)^2(a+2)$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & b & 1 \\ b & ab & 1 \\ 1 & b & a \end{vmatrix} = b(a-1)(a-b)$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = (a-1)(ab+b-2)$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} a & b & 1 \\ 1 & ab & b \\ 1 & b & 1 \end{vmatrix} = b(a-1)(a-b)$$

$$\text{Si } a=1 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x+by+z=1 \\ x+by+z=b \\ x+by+z=1 \end{cases}$$

si $b \neq 1$ impossible

si $b=1$ Double indétermination (les trois plans sont confondus).

$$\text{Si } a=-2 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} -2x+by+z=1 \\ x-2by+z=b \\ x+by-2z=1 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} 3x-3by=b-1 \\ 3x-3by=-3 \end{cases}$$

si $b \neq -2$ impossible

$$\text{si } b=-2 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} -2x-2y+z=1 \\ x+4y+z=-2 \\ x-2y-2z=1 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} y=-\frac{1}{2}(x+1) \\ z=x \end{cases}$$

Simple indétermination. C'est une droite.

$$\text{Si } b=0 \rightarrow \begin{cases} ax+z=1 \\ x+z=0 \ \text{ donc } z=-x \\ x+az=1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} ax-x=1 \\ x-ax=1 \end{cases} \rightarrow 0=2 \ \text{ Impossible.}$$

$$\text{Dans les autres cas : } \begin{cases} x=\dfrac{a-b}{(a-1)(a+2)} \\ y=\dfrac{ab+b-2}{b\left(a-1\right)(a+2)} \\ z=\dfrac{a-b}{(a-1)(a+2)} \end{cases} \quad \text{C'est un point.}$$

Résolu le 19 mars 2003. Modifié le 21 novembre 07 (Benoit Baudelet)