Exercices résolus de mathématiques.

Algèbre

ALG 11

EXALG110 – EXALG119

http://www.matheux.c.la

Jacques Collot

Juillet 08

EXALG110 - Louvain - Juillet 2001, série 2

Résoudre dans les complexes, l'équation suivante :

$$z^6 + 2iz^3 - 1 = 0$$

Donner les solutions sous la forme $a + bi$ (avec a et b réels)

$$z^6 + 2iz^3 - 1 = 0 \rightarrow \left(z^3 + i\right)^2 = 0 \rightarrow z^3 = -i$$

$$\rightarrow z^3 = \cos\left(270 + k360\right) + i\sin\left(270 + k360\right)$$

$$\rightarrow z = \cos\left(90 + k120\right) + i\sin\left(90 + k120\right)$$

k	z_k	$a + ib$
0	$\cos 90 + i\sin 90$	i
1	$\cos 210 + i\sin 210$	$-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$
2	$\cos 330 + i\sin 330$	$\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$

Modifié le 8 septembre 2009 (Johnny GERARD)

EXALG111 – Louvain – Juillet 2001, Série 2.

Un train effectue normalement un trajet entre une ville *A* et une ville *B* en 4 heures (pour respecter son horaire).

Un incident à mi-parcours provoque l'arrêt du convoi durant 5 minutes. Pour arriver à l'heure normalement prévue à l'horaire, le conducteur doit augmenter la vitesse du train de *10 km/h* pour le reste du trajet.

Déterminer la longueur totale *d* du trajet et la vitesse *v* normalement prévue à l'horaire, si on suppose pour chaque cas que le train circule à vitesse constante sans s'arrêter et que l'on ne tient pas compte, pour le calcul, des phases d'accélération ni de freinage du convoi.

Le train fait la première moitié du trajet en $\frac{d}{2v}$ h.

Il arréte $\frac{1}{12}$ h

Il fait la deuxième moitié en $\frac{d}{2(v+10)}$ h

Le tout doit être fait en 4 h.

$$\rightarrow 4 = \frac{d}{2v} + \frac{1}{12} + \frac{d}{2(v+10)}$$

Or en temps normal : $4 = \frac{d}{v}$

$$\rightarrow \ 4 = 2 + \frac{1}{12} + \frac{2v}{v+10} \ \rightarrow \ \boxed{v = 230\ km/h} \quad \text{et} \quad \boxed{d = 920\ km}$$

EXALG112 – Louvain – Septembre 2001.

Soit a un paramètre réel.

Résoudre et discuter, dans les nombres réels, l'équation suivante :

$$(ax-1)\left[(ay+(a+2)x-1)^2+5(3x-(a-2)y-1)^2\right]=0$$

Solution proposée par Jan Frans Broeckx

Le « *piège* » dans cet exercice est qu'il faut réaliser que, dans les réels, *la somme de deux carrés ne peut être zéro que si chacun des deux nombres élevés au carré est zéro* :

$$u, v \in \mathbb{R} : \qquad u^2+v^2=0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} u=0 \\ v=0 \end{cases}$$

Discussion des solutions de l'équation

(1) $\boldsymbol{a=0}$

Le premier facteur devient $0.x-1=-1$, donc les seules solutions sont celles qui proviennent du second facteur :

$$(2x-1)^2+5(3x+2y-1)^2=0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2x & = & 1 \\ 3x+2y & = & 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x= & \frac{1}{2} \\ y= & -\frac{1}{4} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \boldsymbol{S}=\left\{\left(\tfrac{1}{2}\,;\,-\tfrac{1}{4}\right)\right\}$$

(2) $\boldsymbol{a\neq 0}$

Le premier facteur $ax-1=0$ contribue toujours une première solution :

$$\boldsymbol{S_1}=\left\{\left(\tfrac{1}{a}\,;y\right)\middle|\, y\in\mathbb{R}\right\}$$

Le deuxième facteur ne s'annule que si

$$\begin{cases} (a+2)x+ay & = & 1 \\ 3x-(a-2)y & = & 1 \end{cases}$$

Discussion de ce système linéaire :

$$\det \mathcal{A}=\begin{vmatrix} a+2 & a \\ 3 & 2-a \end{vmatrix}=4-a^2-3a=-(a^2+3a-4)=-(a-1)(a+4)$$

(2a) $\boldsymbol{a=+1}$

Le système devient :

$$\begin{cases} 3x+y=1 \\ 3x+y=1 \end{cases} \quad \text{Système simplement indéterminé} \qquad \boldsymbol{S_2}=\{(\boldsymbol{x}\,;\boldsymbol{1-3x})|\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}\}$$

(2b) $\boldsymbol{a = -4}$

Le système devient :

$\begin{cases} -2x - 4y = 1 \\ 3x + 6y \quad = 1 \end{cases}$ Système impossible $\boldsymbol{S_2 = \emptyset}$

(2c) $\boldsymbol{a \in \mathbb{R} \setminus \{-4, 0, +1\}}$

Le système est cramerien :

$\det \mathcal{A}_x = \begin{vmatrix} 1 & a \\ 1 & 2-a \end{vmatrix} = 2 - a - a = -2(a-1)$

$\boldsymbol{S_2 = \left\{\left(\frac{2}{a+4} \,;\, \frac{-1}{a+4}\right)\right\}}$

$\det \mathcal{A}_y = \begin{vmatrix} a+2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = a + 2 - 3 = a - 1$

Modifié le 10 septembre 2009 (Johnny GERARD). Modifié le 26 décembre 2011

EXALG113 – Louvain – Septembre 2001.

Résoudre, dans les nombres réels, l'inéquation que voici :

$$9^{\sqrt{x+5}} - \frac{12}{3^x} < \frac{5}{3^{x-1}}$$

CE : $x \geq -5$

$9^{\sqrt{x+5}} - \dfrac{12}{3^x} < \dfrac{5}{3^{x-1}} \rightarrow 3^{2\sqrt{x+5}} - 4.3^{1-x} < 5.3^{1-x} \rightarrow 3^{2\sqrt{x+5}} < 3^{3-x}$

$\rightarrow 2\sqrt{x+5} < 3 - x$

Cette dernière équation engendre une autre CE : $x \leq 3$

$\rightarrow 4(x+5) < 9 - 6x + x^2 \rightarrow x^2 - 10x - 11 = (x-11)(x+1) > 0$

$\rightarrow x < -1$ ou $x > 11$

Conclusion

Compte tenu des CE : $\boxed{-5 \leq x < -1}$

EXALG114 – Louvain – Septembre 2001.

Deux lances d'incendie de sections différentes sont alimentées par deux camions-citernes (remplis). Elles sont destinées à fonctionner à débit maximum et constant.

Si la première lance d'incendie est alimentée par le premier camion-citerne, elle mettra pour vider complètement celui-ci exactement le même temps que celui nécessaire à la seconde lance d'incendie pour vider le second camion-citerne.

Si au contraire, on branche la première lance sur le deuxième camion et la seconde sur le premier, elles mettraient respectivement 9 et 4 heures pour vider complètement les camions-citernes en question.

Déterminez la contenance des deux camions-citernes sachant qu'au total ils contiennent 60 m^3 d'eau.

Soit

t : Le temps pour vider les camions-citernes dans le premier cas

d_1 : Le débit de la première lance

d_2 : Le débit de la deuxième lance

V_1 : Le volume de la première citerne

V_2 : Le volume de la deuxième citerne

On a immédiatement les relations suivantes :

$$\begin{cases} V_1 + V_2 = 60 & (1) \\ V_1 = td_1 & (2) \\ V_2 = td_2 & (3) \\ V_2 = 9d_1 & (4) \\ V_1 = 4d_2 & (5) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \text{De } (3) \text{ et } (5) \rightarrow \dfrac{V_2}{V_1} = \dfrac{t}{4} \\ \text{De } (2) \text{ et } (4) \rightarrow \dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{t}{9} \end{cases} \rightarrow t^2 = 36 \rightarrow t = 6$$

$$\rightarrow \begin{cases} (2) \rightarrow V_1 = 6d_1 \\ (3) \rightarrow V_2 = 6d_2 \\ (4) \rightarrow V_2 = 9d_1 \\ (5) \rightarrow V_1 = 4d_2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} (2)(3) \text{ et } (1) \rightarrow 6d_1 + 6d_2 = 60 \\ (4)(5) \text{ et } (1) \rightarrow 9d_1 + 4d_2 = 60 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} d_1 = 4 \\ d_2 = 6 \end{cases}$$

$$\rightarrow \boxed{V_1 = 24\, m^3; \quad V_2 = 36\, m^3}$$

EXALG115 – Louvain – Septembre 2001.

Résoudre dans les nombres complexes l'équation en z :

$$z^4 + 4(1+7i)z^2 - (117+44i) = 0$$

C'est une équation bicarrée.

1) Calculons le Δ'

$\left(\textit{Rappel} : \text{on utilise le } \Delta' \text{ au lieu du } \Delta\text{, puisque le coefficient de } z^2 \text{ est pair}\right)$

$\Delta' = 4(1+7i)^2 + 117 + 44i = 25(-3+4i)$

2) Calculons : $\sqrt{-3+4i}$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -3 \\ 2xy = 4 \ \ (\text{Donc racines de même signe}) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ x^2 y^2 = 4 \end{cases}$$

$X^2 - 5X + 4 = 0 \rightarrow (X-1)(X-4) = 0$

$$x^2 = 1 \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases} \qquad y^2 = 4 \rightarrow \begin{cases} y = 2 \\ y = -2 \end{cases}$$

Par conséquent : $\sqrt{-3+4i} = \pm(1+2i)$

3) Calculons z^2

$$z^2 = -2(1+7i) \pm (1+2i) \rightarrow \begin{cases} z_1^2 = 3-4i \\ z_2^2 = -7-24i \end{cases}$$

4) Calculons : $z_1 = \sqrt{3-4i}$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ 2xy = -4 \ \ (\text{Racines signe contraire}) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ x^2 y^2 = 4 \end{cases}$$

$X^2 - 5X + 4 = 0 \rightarrow (X-1)(X-4) = 0$

$$x^2 = 4 \rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -2 \end{cases} \qquad y^2 = 1 \rightarrow \begin{cases} y = 1 \\ y = -1 \end{cases}$$

Par conséquent : $z_{11} = 2 - i$ et $z_{12} = -2 + i$

5) Calculons : $z_2 = \sqrt{-7-24i}$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -7 \\ 2xy = -24 \ \ (\text{Racines signe contraire}) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x^2 y^2 = 144 \end{cases}$$

$X^2 - 25X + 144 = 0 \rightarrow (X-9)(X-16) = 0$

$$x^2 = 9 \rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -3 \end{cases} \qquad y^2 = 16 \rightarrow \begin{cases} y = 4 \\ y = -4 \end{cases}$$

Par conséquent : $z_{21} = 3 - 4i$ et $z_{22} = -3 + 4i$

Conclusion.

Les solutions sont : $\boxed{\pm(2-i),\ \pm(3-4i)}$

EXALG116 – Liège – juillet 2002.

Déterminer les valeurs du paramètre réel a pour lesquelles le système suivant est compatible :

$$\begin{cases} ax+1>a \\ \dfrac{x+a}{a}<\dfrac{1}{4} \end{cases}$$

Suggestion : Résoudre séparément chacune des deux inéquations.

CE : $a \neq 0$

Soit $a>0$

$$\begin{cases} ax+1>a \\ \dfrac{x+a}{a}<\dfrac{1}{4} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x>\dfrac{a-1}{a} \\ x<-\dfrac{3a}{4} \end{cases} \rightarrow \dfrac{a-1}{a}<-\dfrac{3a}{4} \rightarrow 3a^2+4a-4<0$$

Soit $a<0$

$$\begin{cases} ax+1>a \\ \dfrac{x+a}{a}<\dfrac{1}{4} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x<\dfrac{a-1}{a} \\ x>-\dfrac{3a}{4} \end{cases} \rightarrow \dfrac{a-1}{a}>-\dfrac{3a}{4} \rightarrow 3a^2+4a-4<0$$

On retombe sur la même condition. Le trinôme sera négatif pour des valeurs comprises entre ses racines :

$$3a^2+4a-4=0 \rightarrow \begin{cases} a_1=-2 \\ a_2=\dfrac{2}{3} \end{cases}$$

Conclusion : $\boxed{-2<a<\dfrac{2}{3} \quad \text{avec } a \neq 0}$

Modifié le 4 septembre 2006 (Quentin Gonay)

EXALG117 – Liège , juillet 2002.

a) Résoudre l'équation :

$$(z+1)^3 = iz^3 \qquad (z \in \mathbb{C})$$

b) Vérifier que les points représentatifs des solutions dans le plan « complexe » sont situés sur une droite parallèle à l'axe « imaginaire »

Remarquons que $z+1=-iz$ admet une solution qui est aussi solution de

l'équation proposée $:\rightarrow z=-\frac{1}{1+i}=-\frac{1}{1+i}\frac{1-i}{1-i}=-\frac{1-i}{2}$

L'équation proposée s'écrit : $P(z)=(1-i)z^3+3z^2+3z+1=0$

Divisons par $z+\frac{1-i}{2}$ en utilisant Horner.

	3	2	1	0
	$1-i$	3	3	1
$-\frac{1-i}{2}$		$+i$	$-2+i$	-1
	$1-i$	$3+i$	$1+i$	0

$$\rightarrow P(z)=\left(z+\frac{1-i}{2}\right)\left((1-i)z^2+(3+i)z+1+i\right)$$

Résolvons le deuxième facteur. Pour le simplifier, on le multiplie par $1+i$

et on divise par 2 $\quad\rightarrow\quad z^2+(1+2i)z+i=0 \quad\rightarrow\quad z=\frac{-(1+2i)\pm\sqrt{3}\,i}{2}$

Conclusion : $\begin{cases} z_1=-\frac{1-i}{2}=-0,5+0,5i \\ z_2=\frac{-1+\left(\sqrt{3}-2\right)i}{2}=-0,5-0,1339\,i \\ z_3=\frac{-1-\left(\sqrt{3}+2\right)i}{2}=-0,5-0,1886\,i \end{cases}$

On voit immédiatement que les solutions sont bien situées sur une droite parallèle à l'axe imaginaire d'abscisse $-0,5$

Résolu 27 février 04. Modifié : 16 août 04. Modifié le 7 septembre 2004

EXALG118 – Liège , septembre 2002.

Discuter et résoudre le système

$$\begin{cases} ax & + & ay & + & z & = & 1 \\ bx & + & y & + & bz & = & 1 \\ ax & + & by & + & az & = & b \end{cases}$$

---

où a et b sont des paramètres réels

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & a & 1 \\ b & 1 & b \\ a & b & a \end{vmatrix} = (a-1)(a-b^2)$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & b \\ b & b & a \end{vmatrix} = (1-a)(a-b^2)$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ b & 1 & b \\ a & b & a \end{vmatrix} = (a-1)(a-b^2)$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} a & a & 1 \\ b & 1 & 1 \\ a & b & b \end{vmatrix} = (1-a)(a-b^2)$$

Premier cas $a = 1$

Le système devient : $\begin{cases} x & + & y & + & z & = & 1 \\ bx & + & y & + & bz & = & 1 \\ x & + & by & + & z & = & b \end{cases}$

$$\rightarrow \begin{cases} x & + & y & + & z & = & 1 \\ bx & + & y & + & bz & = & 1 \\ (1+b)x & + & (1+b)y & + & (1+b)z & = & 1+b \end{cases}$$

$\underline{b = -1}$ $\rightarrow$ Le système devient :

$$\begin{cases} x & + & y & + & z & = & 1 \\ -x & + & y & - & z & = & 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -z \\ y = 1 \end{cases}$$

$\underline{b \neq -1}$ $\rightarrow$ Le système devient :

$$\begin{cases} x & + & y & + & z & = & 1 \\ bx & + & y & + & bz & = & 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -z \\ y = 1 \end{cases}$$ mêmes solutions

Deuxième cas $a \neq 1$ et $b = \pm\sqrt{a}$ donc $a \geq 0$ et $b \neq \pm 1$

$a = 0 \rightarrow b = 0$ Le système devient : $\begin{cases} x \text{ indéterminé} \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases}$

$a > 0 \rightarrow b \neq 0$ Le système devient puisque $a = b^2$:

$$\begin{cases} b^2x + b^2y + z = 1 \\ bx + y + bz = 1 \\ b^2x + by + b^2z = b \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b^2x + b^2y + z = 1 \\ bx + y + bz = 1 \\ bx + y + bz = 1 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} b^2x + b^2y + z = 1 \\ bx + y + bz = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b^2x + b^2y = 1 - z \\ bx + y = 1 - bz \end{cases}$$

On résoud en tenant compte que $b \neq 0$ et $b \neq 1$

$$\rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1 + b - \left(b^2 + b + 1\right)z}{b^2} \\ y = \dfrac{\left(1 + b\right)z - 1}{b} \end{cases}$$

Autres cas $a \neq 1$ et $b \neq \pm\sqrt{a}$

Le système a pour solution : $\begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases}$

Récapitulation

1) $a = 1$ $\begin{cases} x = -z \\ y = 1 \end{cases}$

2) $a = 0$ $b = 0$ $\begin{cases} x \text{ indéterminé} \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases}$

3) $a > 0$ $b = \pm\sqrt{a}$ $\begin{cases} x = \dfrac{1 + b - \left(b^2 + b + 1\right)z}{b^2} \\ y = \dfrac{\left(b + 1\right)z - 1}{b} \end{cases}$

4) $a \neq 1$ $b \neq \pm\sqrt{a}$ $\begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases}$

EXALG119 – FACSA, ULiège, Liège, septembre 2002.

Calculer la partie réelle de $\frac{1}{1+iz}$ lorsque $|z|=1$ ($z \in \mathbb{C}$)

Si $z=a+bi \to |z|=\sqrt{a^2+b^2}=1 \to |z|^2=a^2+b^2=1$

$$\frac{1}{1+iz}=\frac{1}{1+(a+bi)i}=\frac{1}{1-b+ia}=\frac{1-b-ia}{(1-b)^2+a^2}=\frac{1-b-ia}{1-2b+b^2+a^2}$$

$$=\frac{1-b}{2-2b}-\frac{ia}{2-2b}=\frac{1}{2}-\frac{ia}{2-2b}$$

La partie réelle est donc : $\frac{1}{2}$ (indépendante de a et b)