Exercices résolus de mathématiques.

Algèbre

ALG 12

EXALG120 – EXALG129

http://www.matheux.be.tf

Jacques Collot

Juillet 08

EXALG120 – Liège , septembre 2002.

Résoudre l'inéquation

$$\frac{3}{x-1} \leq \sqrt{x+3} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

CE : $x \neq 1$ et x ³ - 3

1) $x < 1$ Toujours vérifié $\rightarrow -3 \leq x < 1$

2) $x > 1$ L'équation devient :

$\left(\frac{3}{x-1}\right)^2 \leq x+3 \rightarrow x^3 + x^2 - 5x - 6$ ³ 0

Ce trinôme est divisible par $x+2$ $(-2$ est un diviseur de $-6)$

Appliquons Horner :

	3	2	1	0
	1	1	-5	-6
-2		-2	2	6
	1	-1	-3	0

$\rightarrow (x+2)(x^2-x-3)$ ³ 0 $\rightarrow (x+2)\left(x - \frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)\left(x - \frac{1-\sqrt{13}}{2}\right)$ ³ 0

Etudions le tableau de signes

		-2		-1.302		1		2.303	
$x+2$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
x^2-x-3	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
	$-$	0	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$

On ne s'intéresse qu'aux valeurs supérieures à 1.

On en déduit : x ³ 2.303

Conclusion : $\boxed{-3 \leq x < 1 \;;\; x \text{ ³ } \frac{1+\sqrt{13}}{2}}$

EXALG121 – Liège , juillet 2003.

Résoudre l'équation (en nombres complexes)

$$\left(2z^2-1\right)^3=\left(z^2+1\right)^3$$

On voit immédiatement que l'équation suivante admet des solutions communes à l'équation proposée : $2z^2-1=z^2+1 \rightarrow z=\pm\sqrt{2} \quad (1)$

Développons l'équation proposée et posons : $z^2=t$. On obtient :

$7t^3-15t^2+3t-2=0$

Vu (1), on sait que cette équation est divisible par $x-2$

$$\rightarrow \begin{array}{c|cccc} & 3 & 2 & 1 & 0 \\ \hline & 7 & -15 & 3 & -2 \\ 2 & & 14 & -2 & 2 \\ \hline & 7 & -1 & 1 & 0 \end{array} \rightarrow (t-2)\left(7t^2-t+1\right)=0$$

$$\rightarrow (t-2)\left(t-\frac{1+3\sqrt{3}i}{14}\right)\left(t-\frac{1-3\sqrt{3}i}{14}\right)=0$$

Il reste à calculer

1) $z^2=\dfrac{1+3\sqrt{3}i}{14}=\dfrac{1}{14}+\dfrac{3\sqrt{3}i}{14}$

$$\begin{cases} a^2-b^2=\dfrac{1}{14} \\ 2ab=\dfrac{3\sqrt{3}}{14} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a^2+b^2=\dfrac{\sqrt{7}}{7} \\ a^2b^2=\dfrac{3^3}{2^4 7^2} \end{cases} \rightarrow X^2-\frac{\sqrt{7}}{7}X+\frac{3^3}{2^4 7^2}=0$$

$$\rightarrow \begin{cases} a^2=\dfrac{2\sqrt{7}+1}{28} \\ b^2=\dfrac{2\sqrt{7}-1}{28} \end{cases}$$

Compte tenu que les racines doivent avoir même signe :

$$\rightarrow \begin{cases} a=\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{2\sqrt{7}+1}{7}} \\ b=\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{2\sqrt{7}-1}{7}} \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a=-\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{2\sqrt{7}+1}{7}} \\ b=-\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{2\sqrt{7}-1}{7}} \end{cases}$$

2) $z^2 = \frac{1-3\sqrt{3}i}{14} = \frac{1}{14} - \frac{3\sqrt{3}i}{14}$

On trouvera : $\begin{cases} a = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2\sqrt{7}+1}{7}} \\ b = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2\sqrt{7}-1}{7}} \end{cases}$ ou $\begin{cases} a = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2\sqrt{7}+1}{7}} \\ b = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2\sqrt{7}-1}{7}} \end{cases}$

Conclusion :

$$z_1 = \sqrt{2}$$

$$z_2 = -\sqrt{2}$$

$$z_3 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2\sqrt{7}+1}{7}} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2\sqrt{7}-1}{7}}i = 0.4740 + 0.3914i$$

$$z_4 = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2\sqrt{7}+1}{7}} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2\sqrt{7}-1}{7}}i = -0.4740 - 0.3914i$$

$$z_5 = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2\sqrt{7}+1}{7}} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2\sqrt{7}-1}{7}}i = -0.4740 + 0.3914i$$

$$z_6 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2\sqrt{7}+1}{7}} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2\sqrt{7}-1}{7}}i = 0.4740 - 0.3914i$$

EXALG122 – Liège , juillet 2003.

Résoudre et discuter le système suivant, dans lequel a est un paramètre réel :

$$\begin{cases} ax & + & (a+1)y & + & (a-1)z & = & 2a+3 \\ x & + & (1+a)y & + & (1-a)z & = & 4a+1 \\ (a+1)x & + & 2(a+1)y & + & & = & 6a+4 \end{cases}$$

Une des équations est combinaison linéaire des deux autres.
On vérifie que la première plus la deuxième est égale à la troisième.
Le système peut donc se ramener à

$$\begin{cases} ax & + & (a+1)y & + & (a-1)z & = & 2a+3 \\ (a+1)x & + & 2(a+1)y & & & = & 6a+4 \end{cases}$$

$$\to \begin{cases} ax & + & (a+1)y & = & 2a+3-(a-1)z \\ (a+1)x & + & 2(a+1)y & = & 6a+4 \end{cases}$$

Le Δ de ce système vaut : $(a+1)(a-1)$

1) $a=1$ Le système devient : $\begin{cases} x & + & 2y & = & 5 \\ 2x & + & 4y & = & 10 \end{cases} \to \begin{cases} x = 5-2y \\ z \end{cases}$ Indéterminé

2) $a=-1$ Le système devient : $\begin{cases} -x = 1+2z \\ 0 = -2 \end{cases}$ impossible

3) Autres cas

La résolution donne : $\begin{cases} x = -2(1+z) \\ y = \dfrac{3a+2}{a+1} + 1 + z \end{cases}$

EXALG123 – FACSA, ULiège, Liège, juillet 2003.

Résoudre l'inéquation suivante dans $\mathbb{R}$

$$\frac{x-2}{x+2} \geq -2+\sqrt{-x}$$

CE : $x \leq 0$ et $x \neq -2$

$$\frac{x-2}{x+2} \geq -2+\sqrt{-x} \rightarrow \frac{x-2}{x+2}+2 \geq \sqrt{-x} \rightarrow \frac{3x+2}{x+2} \geq \sqrt{-x} \qquad (1)$$

Cette dernière relation, nous permet de déterminer des conditions supplémentaires sur x. En effet, l'élévation au carré qui va suivre va introduire des solutions parasites.

Comme $\sqrt{-x} \geq 0 \rightarrow \dfrac{3x+2}{x+2} \geq 0 \rightarrow x \in \left]-\infty,-2\right[\cup \left[-\dfrac{2}{3},+\infty\right[\qquad (2)$

Elevons (1) au carré $\rightarrow (3x+2)^2 \geq -x(x+2)^2 \rightarrow x^3+13x^2+16x+4 \geq 0$

Ce polynôme est divisible par $x+1$

	3	2	1	0
	1	13	16	4
−1		−1	−12	−4
	1	12	4	0

$$\rightarrow (x+1)(x^2+12x+4) \geq 0$$

$$\rightarrow (x+1)\left(x+6+4\sqrt{2}\right)\left(x+6-4\sqrt{2}\right) \geq 0$$

Tableau de signes

		−11.65		−2		−1		−0.343		0
$x+1$	−	−	−	−	−	0	+	+	+	+
$x^2+12x+4$	+	0	−	−	−	−	−	0	+	+
	−	0	+	∴	+	0	−	0	+	+

Conclusion : En tenant compte de (2)

$$x \in \left\{ \left[-6-4\sqrt{2},-2\right[\cup \left[-6+4\sqrt{2},0\right] \right\}$$

Modifié le 4 juillet 07 (Mathieu Delvaux)

EXALG124 – Liège , septembre 2003.

Résoudre l'équation (en nombres complexes)

$$z^8+4z^6-10z^4+4z^2+1=0$$

Suggestion : développer $\left(z^2+1\right)^4$

On observe que : $\left(z^2+1\right)^4=z^8+4z^6+6z^4+4z^2+1$

Donc l'équation proposée peut s'écrire : $\left(z^2+1\right)^4=16z^4$

$\rightarrow$ l'équation suivante admet une solution commune avec l'équation proposée :

$z^2+1=2z\rightarrow\left(z-1\right)^2=0\ \rightarrow z=1\ \left(2\text{ fois}\right)$

Appliquons deux fois de suite Horner :

	8	7	6	5	4	3	2	1	0
	1		4		−10		4		1
1		1	1	5	5	−5	−5	−1	−1
	1	1	5	5	−5	−5	−1	−1	0
−1		−1	0	−5	0	5	0	1	
	1	0	5	0	−5	0	−1	0	

$\rightarrow\left(z-1\right)\left(z+1\right)\left(z^6+5z^4-5z^2-1\right)=0\rightarrow\left(z-1\right)\left(z+1\right)\left[\left(z^6-1\right)+5z^2\left(z^2-1\right)\right]=0$

$\rightarrow\left(z-1\right)\left(z+1\right)\left(z^2-1\right)\left(z^4+z^2+1+5z^2\right)=0\rightarrow\left(z-1\right)^2\left(z+1\right)^2\left(z^4+6z^2+1\right)=0$

Résolvons le dernier facteur :

$z^4+6z^2+1=0\rightarrow\left(z^2+1\right)^2=-4z^2$

$$\rightarrow\begin{cases}z^2+1=2iz\ \rightarrow z^2-2iz+1=0\rightarrow\begin{cases}z=\left(1+\sqrt{2}\right)i\\ z=\left(1-\sqrt{2}\right)i\end{cases}\\ z^2+1=-2iz\rightarrow z^2+2iz+1=0\rightarrow\begin{cases}z=-\left(1+\sqrt{2}\right)i\\ z=-\left(1-\sqrt{2}\right)i\end{cases}\end{cases}$$

<u>Conclusion</u>

$$\begin{array}{ll} z_1=1 & z_5=\left(1+\sqrt{2}\right)i\\ z_2=1 & z_6=\left(1-\sqrt{2}\right)i\\ z_3=-1 & z_7=-\left(1+\sqrt{2}\right)i\\ z_4=-1 & z_8=-\left(1-\sqrt{2}\right)i\end{array}$$

Résolu le 1 mars 2004. Modifié le 16 août 04

EXALG125 – Liège , septembre 2003.

Résoudre et discuter le système suivant, dans lequel a est un paramètre réel :

$$\begin{cases} ax + a^2y + a^3z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ a^3x + a^2y + az = 0 \end{cases}$$

C'est un système homogène qui admet comme solution $x = y = z = 0$

Etudions les autres possibilités.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & a^2 & a^3 \\ 1 & 1 & 1 \\ a^3 & a^2 & a \end{vmatrix} = a^2 \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & 1 & 1 \\ a^2 & a & 1 \end{vmatrix} = a^2 \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & 1 & 1 \\ a^2-1 & 0 & 1-a^2 \end{vmatrix}$$

$$= a^2\left(a^2-1\right) \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = a^2\left(a^2-1\right) \begin{vmatrix} 0 & a & a^2+1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -a^2\left(a+1\right)\left(a-1\right)^3$$

<u>$a = 0$</u>

Le système devient : $x = -y - z$ Double indétermination

<u>$a = 1$</u>

Le système se ramène à : $x = -y - z$ Double indétermination

<u>$a = -1$</u>

$$\begin{cases} -x + y - z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ -x + y - z = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = -z \end{cases} \quad \text{Simple indétermination}$$

<u>Autres cas</u> : $x = y = z = 0$

EXALG126 – Liège , septembre 2003.

Déterminer l’ensemble des valeurs (réelles) de a pour lesquelles l’énoncé :

$$"\textit{Pour tout réel } x \textit{ tel que } |x|<\frac{1}{2}, \textit{ on a } \ ax^2+(a+1)x+1\geq 0"$$

est vrai.

Calculons les racines du trinôme :

$$ax^2+(a+1)x+1=0 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x_1=-\dfrac{1}{a} \\ x_2=-1 \end{cases}$$

<u>$a>0$</u>

Pour que la proposition soit vraie, il faut que l'intervalle $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$ soit à l'extérieur des racines

Si $0<a<1 \rightarrow -\frac{1}{a}\leq -1<-\frac{1}{2}$ la proposition est toujours vraie (Voir figure 1)

Si $1<a \rightarrow -1<-\frac{1}{a}$. Il faut donc : $-\frac{1}{a}\leq -\frac{1}{2} \rightarrow 0<a\leq 2$ (Voir figure 2)

Autrement dit : si $a>0$, il faut $0<a\leq 2$

<u>$a<0$</u>

Pour que la proposition soit vraie, il faut que l'intervalle $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$ soit à l'intérieur des racines

Si $-1<a<0 \rightarrow \frac{1}{2}<1<-\frac{1}{a}$ la proposition est toujours vraie (Voir figure 3)

Si $a<-1$, il faut que $\frac{1}{2}\leq -\frac{1}{a} \rightarrow a\geq -2$ (Changement du sens de l'inégalité car $a<0$)

(Voir figure 4)

Autrement dit : si $a<0$, il faut $-2\leq a<0$

<u>$a=0$</u>

Le trinôme devient : $x+1\geq 0$ Pour tout $|x|<\frac{1}{2}$ cette équation est vérifiée.

<u>Conclusion</u> : $a\in\{[-2;2]\}$ ou encore $-2\leq a\leq 2$

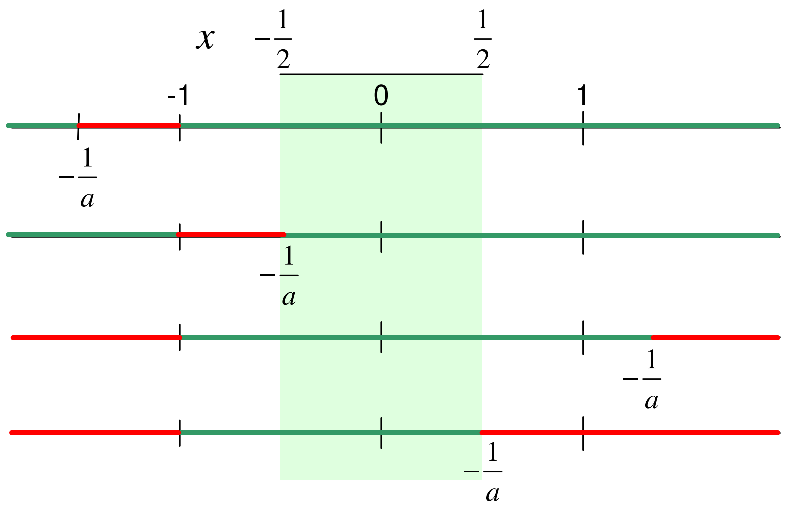

Figure 1. $\begin{cases} a > 0 \\ 0 < a < 1 \end{cases}$

Figure 2. $\begin{cases} a > 0 \\ 1 < a \end{cases}$

Figure 3. $\begin{cases} a < 0 \\ -1 < a < 0 \end{cases}$

Figure 4. $\begin{cases} a < 0 \\ a < -1 \end{cases}$

Modifié le 10 août 08

EXALG127– EPB, ULB, Bruxelles, juillet 2003.

Déterminer $a,\ b, c\ \in\ \mathbb{R}$ tels que

$$P(x) = 2x^4 + x^3 + ax^3 + bx + c$$

soit divisible par

$$(x-1)^2(x+1)$$

Factoriser le polynôme $P(x)$.

Si $P(x)$ est divisible par $(x-1)^2$, alors $P(1)=0$ *et* $P'(1)=0$ – voir EXALG008

$P(1)=0 \quad \rightarrow\ 2+1+a+b+c=0\ \rightarrow\ a+b+c=-3$

$P'(1)=0 \quad \rightarrow 8+3+2a+b=0 \quad \rightarrow\ 2a+b=-11$

Si $P(x)$ est divisible par $x+1$, alors $P(1)=0$

$P(-1)=0\ \rightarrow 2-1+a-b+1=0\ \rightarrow\ a-b+c=-1$

On en déduit : $\begin{cases} a=-5 \\ b=-1 \\ c=3 \end{cases}$

$\rightarrow P(x) = 2x^4 + x^3 - 5x^2 - x + 3 = (x-1)^2(x+1)(2x+3)$

EXALG128– EPB, ULB, Bruxelles, juillet 2003.

Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$

$$x^n - x^{n-2} - 2x + 2$$

est divisible par

$$(x-1)^2$$

Déterminer le quotient.

$P(x) = x^n - x^{n-2} - 2x + 2 = x^{n-2}(x^2-1) - 2(x-1) = (x-1)\left[x^{n-2}(x+1) - 2\right]$

Soit $Q(x)$, le deuxième facteur. Il est divisible par $(x-1)$ car $Q(1) = 0$

Par Horner, on obtient facilement :

$$Q(x) = (x-1)\left(x^{n-2} + 2x^{n-3} + 2x^{n-4} + ... + 2\right)$$

$$= (x-1)\left(x^{n-2} + 2\sum_{i=0}^{n-3} x^i\right) = (x-1)\left(x^{n-2} + 2\frac{x^{n-2}-1}{x-1}\right)$$

Finalement : $P(x) = (x-1)^2 R(x)$

avec : $R(x) = x^{n-2} + 2\sum_{i=0}^{n-3} x^i = x^{n-2} + 2\dfrac{x^{n-2}-1}{x-1}$

EXALG129– Bruxelles, juillet 2003.

a) Simplifier au maximum l'expression suivante :

$$\frac{1}{(a+b)^2}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)+\frac{2}{(a+b)^3}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) \qquad (a,b \in \mathbb{R})$$

b) En utilisant le binôme de Newton, montrer que

$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^i C_n^i = 0$$

$$a)\ \frac{1}{(a+b)^2}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)+\frac{2}{(a+b)^3}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$$

$$=\frac{1}{(a+b)^2}\left[\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{2}{(a+b)}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{(a+b)^2}\left[\frac{b^2+a^2}{a^2b^2}+\frac{2}{(a+b)}\left(\frac{b+a}{ab}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{(a+b)^2}\frac{b^2+a^2+2ab}{a^2b^2}=\frac{1}{a^2b^2}$$

$b)$ On a $(1-x)^n=\sum_{i=0}^{n}(-1)^i C_n^i x^i$

Si on fait $x=1 \quad \rightarrow \quad \sum_{i=0}^{n}(-1)^i C_n^i = 0$