Exercices résolus de mathématiques.

Algèbre

ALG 13

EXALG130 – EXALG139

http://www.matheux.c.la

Jacques Collot

Juillet 08

EXALG130– Bruxelles, juillet 2003.

Résoudre dans $\mathbf{C}$ l'équation

$$\begin{vmatrix} 1 & z^2 & z^6 \\ 1 & i & -i \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Et représenter les solutions dans le plan de Gauss

$$\begin{vmatrix} 1 & z^2 & z^6 \\ 1 & i & -i \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & z^2-1 & z^6-1 \\ 0 & i-1 & -i-1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} z^2-1 & z^6-1 \\ i-1 & -i-1 \end{vmatrix} = \left(z^2-1\right)\begin{vmatrix} 1 & z^4+z^2+1 \\ i-1 & -i-1 \end{vmatrix}$$

$$= \left(z^2-1\right)\left(-i-1-\left(z^4+z^2+1\right)(i-1)\right) = \left(z^2-1\right)\left((1-i)z^4+(1-i)z^2-2i\right)$$

Occupons nous du second facteur que l'on peut simplifier en le multipliant par

$\dfrac{1+i}{2} \quad \to \left((1-i)z^4+(1-i)z^2-2i\right)\left(\dfrac{1+i}{2}\right) = z^4+z^2+1-i$

C'est une équation bicarrée. Calculons la racine carrée du $\Delta = 1-4(1-i) = -3-4i$

$$\begin{cases} a^2-b^2=-3 \\ 2ab=4 \end{cases} \to \begin{cases} a^2+b^2=5 \\ a^2b^2=4 \end{cases} \to \; X^2-5X+4=0 \to \; (X-1)(X-4)=0$$

$$\to \begin{cases} a^2=1 \\ b^2=4 \end{cases} \to \begin{cases} a=1 \\ b=2 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a=-1 \\ b=-2 \end{cases} \; \to \sqrt{\Delta}=1+2i$$

Par conséquent : $z^2 = \dfrac{-1\pm(1+2i)}{2} = \begin{cases} -1-i \\ i \end{cases}$

a) $\underline{z^2=-1-i}$

$$\begin{cases} a^2-b^2=-1 \\ 2ab=-1 \end{cases} \to \begin{cases} a^2+b^2=\sqrt{2} \\ a^2b^2=\dfrac{1}{4} \end{cases} \to \; X^2-\sqrt{2}X+\frac{1}{4}=0 \to \; X = \frac{+\sqrt{2}\pm\sqrt{2-1}}{2}$$

$$\to \begin{cases} a^2 = \dfrac{\sqrt{2}-1}{2} \\ b^2 = \dfrac{\sqrt{2}+1}{2} \end{cases} \to \begin{cases} a = \sqrt{\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}} \\ b = \sqrt{\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}} \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a = -\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}} \\ b = -\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}} \end{cases} \to \begin{cases} z_1 = \sqrt{\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}} - i\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}} \\ z_2 = -\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}} + i\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}} \end{cases}$$

$b)$ $\underline{z^2 = i}$

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 0 \\ 2ab = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = 1 \\ a^2 b^2 = \dfrac{1}{4} \end{cases} \rightarrow X^2 - X + \frac{1}{4} = 0 \rightarrow \left(X - \frac{1}{2}\right)^2 = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} a^2 = \dfrac{1}{2} \\ b^2 = \dfrac{1}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ b = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ b = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} z_3 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ z_4 = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} - i\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

<u>Conclusions</u>

$$\begin{cases} z_1 = \sqrt{\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}} - i\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}} \\ z_2 = -\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}} + i\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}} \\ z_3 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ z_4 = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} - i\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ z_5 = -1 \\ z_6 = 1 \end{cases}$$

Modifié le 27 mars 05 (Benoît Baudelet)

EXALG131– EPL, ULB, Bruxelles, septembre 2003.

Déterminer le quotient et le reste de la division de $\left(x^{7}-a^{7}\right)$ par $\left(x-a\right)$ (où $a \in \mathbb{R}$)

En déduire la valeur de $1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \ldots + 3^6$

Par Horner, on trouve facilement que :

$$\left(x^7-a^7\right)=\left(x-a\right)\left(x^6+ax^5+a^2x^4+a^3x^3+a^4x^2+a^5x+a^6\right)$$

$$\rightarrow x^6+ax^5+a^2x^4+a^3x^3+a^4x^2+a^5x+a^6=\frac{x^7-a^7}{x-a}$$

Posons $x=1$ et $a=3$

$$\rightarrow 1+3+3^2+3^3+3^4+3^5+3^6=\frac{1-3^7}{1-3}=1093$$

EXALG132– EPL, ULB, Bruxelles, septembre 2003.

Le reste de la division de $3x^3+x^2-ax+a$ par $x+2$ est k et par $x-1$ est $-2k$

(où $a, k \in \mathbb{R}$)

Calculer a et k

$$P(-2)=-24+4+2a+a=k$$

$$\rightarrow 3a=20+k$$

$$P(1)=3+1-a+a=-2k$$

$$\rightarrow k=-2 \quad \rightarrow a=6$$

Conclusion

$$P(x)=3x^3+x^2-6x+6$$

EXALG133– Bruxelles, septembre 2003.

Résoudre l'équation dans **C** L'équation

$$z^6 - 3z^5 + 4z^4 - 6z^3 + 5z^2 - 3z + 2 = 0$$

Sachant qu'elle admet i comme racine double.

Appliquons deux fois Horner,

	6	5	4	3	2	1	0
	1	-3	4	-6	5	-3	2
i		i	$-1-3i$	$3+3i$	$-3-3i$	$3+2i$	-2
	1	$-3+i$	$3-3i$	$-3+3i$	$2-3i$	$+2i$	0
i		i	$-2-3i$	$6+i$	$-4+3i$	$-2i$	
	1	$-3+2i$	$1-6i$	$3+4i$	-2	0	

$\rightarrow P(z) = (z-i)^2\left[z^4 - (3-2i)z^3 + (1-6i)z^2 + (3+4i)z - 2\right]$

Résolvons le deuxième facteur $Q(z)$. On remarque que $Q(1) = 0$

$\rightarrow$

	4	3	2	1	0
	1	$-3+2i$	$1-6i$	$3+4i$	-2
1		1	$-2+2i$	$-1-4i$	2
	1	$-2+2i$	$-1-4i$	2	0

$\rightarrow Q(z) = (z-1)R(z) = (z-1)\left[z^3 + (-2+2i)z^2 + (-1-4i)z + 2\right]$

De même $R(2) = 0$

$\rightarrow$

	3	2	1	0
	1	$-2+2i$	$-1-4i$	$+2$
2		2	$4i$	-2
	1	$2i$	-1	0

$\rightarrow R(z) = (z-2)\left(z^2 + 2iz - 1\right) = (z-2)(z+i)^2$

<u>Conclusions</u>

$$\begin{cases} z_1 = i \\ z_2 = i \\ z_3 = 1 \\ z_4 = 2 \\ z_5 = -i \\ z_6 = -i \end{cases}$$

EXALG134– Bruxelles, septembre 2003.

Calculer le terme en x dans $\left(2x^2-\frac{4}{x}\right)^5$

$$\left(2x^2-\frac{4}{x}\right)^5=\sum_{i=0}^{5}C_5^i\left(2x^2\right)^{5-i}\left(-\frac{4}{x}\right)^i$$

$$=\sum_{i=0}^{5}C_5^i\left(-1\right)^i 2^{5+i}\ x^{10-3i}$$

Il faut que : $10-3i=1\ \rightarrow\ i=3$

Le terme en x est donc :

$$\sum_{i=0}^{5}C_5^3\left(-1\right)^3 2^8\ x=-2560x$$

EXALG135– FACS, ULB, Bruxelles, septembre 2003.

Résoudre dans $\mathbb{R}^3$, en discutant par rapport au paramètre réel m, le système

$$\begin{cases} mx + y + z = 1 \\ x + my + z = m \\ x + y + mz = m^2 \end{cases}$$

Solution proposée par Hugues Vermeiren

Il existe, essentiellement, deux méthodes pour discuter les systèmes paramétriques.

- La méthode des déterminants: elle est systématique mais n'est pas toujours la plus fiable (erreurs de calculs fréquentes).
  Cette méthode est à déconseiller pour les "gros systèmes" (4×4 et plus).
- La méthode de Gauss (triangulation à l'aide de combinaisons linéaires): elle permet un meilleur contrôle de la résolution et peut-être utilisée pour la résolution de systèmes à n équations et m inconnues ($n \neq m$).

1. Méthode des déterminants

   a. Le déterminant principal est:
      En appliquant les combinaisons de colonnes $C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3$
      et ensuite $C_2 \leftarrow C_2 - C_1$ et $C_3 \leftarrow C_3 - C_1$.

$$\Delta = \begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix} = (m+2) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix} = (m+2) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & m-1 & 0 \\ 1 & 0 & m-1 \end{vmatrix}$$

$$\Delta = (m+2) \cdot (m-1)^2$$

   b. Le déterminant Δ_x, obtenu en remplaçant la colonne C_1 de Δ par la colonne des termes indépendants, est :

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & m & 1 \\ m^2 & 1 & m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ m & 0 & 1 \\ m^2 & 1-m^2 & m \end{vmatrix} = -(1-m^2) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ m & 1 \end{vmatrix} = -(1-m)^2 \cdot (1+m)$$

c. De même:

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & m^2 & m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m & 1-m & 1 \\ 1 & m-1 & 1 \\ 1 & m^2-1 & m \end{vmatrix} = (m-1)\cdot \begin{vmatrix} m & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & m+1 & m \end{vmatrix}$$

$$\Delta_y = (m-1)\begin{vmatrix} m & -1-m & 1-m \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & m & m-1 \end{vmatrix} = (m-1)^2\cdot(-1)\cdot\begin{vmatrix} -1-m & -1 \\ m & 1 \end{vmatrix} = (m-1)^2$$

d. Et enfin...

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & m \\ 1 & 1 & m^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m & 0 & 1 \\ 1 & 0 & m \\ 1 & 1-m^2 & m^2 \end{vmatrix} = -(1-m^2)\cdot\begin{vmatrix} m & 1 \\ 1 & m \end{vmatrix} = (1+m)^2\cdot(1-m)^2$$

e. Le déterminant principal est non nul si et seulement si $m \neq -2$ et $m \neq 1$.

- Dans ce cas la solution est unique et est :
  - $x = \dfrac{\Delta_x}{\Delta} = \dfrac{-(1-m)^2\,(1+m)}{(m+2)\,(m-1)^2} = \dfrac{-(1+m)}{m+2}$,
  - $y = \dfrac{\Delta_y}{\Delta} = \dfrac{(m-1)^2}{(m+2)\,(m-1)^2} = \dfrac{1}{m+2}$,
  - $z = \dfrac{\Delta_z}{\Delta} = \dfrac{(1+m)^2\cdot(1-m)^2}{(m+2)\,(m-1)^2} = \dfrac{(m+1)^2}{m+2}$.
- Si $m = -2$, le système est impossible.
- Si $m = 1$, le système est doublement indéterminé.

$$x = \lambda \quad , \quad y = \mu \quad \text{et} \quad z = 1 - \lambda - \mu\,.$$

2. Méthode de Gauss

$$\begin{cases} m\,x + y + z = 1 \\ x + m\,y + z = m \\ x + y + m\,z = m^2 \end{cases}$$

$L_1 \longleftarrow L_1 - m\cdot L_3$ Cette combinaison linéaire est légitime quel que soit m)

$$\begin{cases} (1-m)\,y + (1-m^2)\,z = 1-m^3 \\ x + m\,y + z = m \\ x + y + m\,z = m^2 \end{cases}$$

$L_2 \longleftarrow L_2 - L_3$

$$\begin{cases} (1-m)\,y + (1-m^2)\,z = 1-m^3 \\ + (m-1)\,y + (1-m)\,z = m\,(1-m) \\ x + y + m\,z = m^2 \end{cases}$$

- Si $m \neq 1$, on peut diviser L_1 et L_2 par $(1-m)$:
  Le système s'écrit alors:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} & & y & + & (1+m)\,z & = & 1+m+m^2 \\ & - & y & + & z & = & m \\ x & + & y & + & m\,z & = & m^2 \end{array}\right.$$

$L_2 \longleftarrow L_2 + L_1$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} & & & & (2+m)\,z & = & 1+2\,m+m^2 \\ & - & y & + & z & = & m \\ x & + & y & + & m\,z & = & m^2 \end{array}\right.$$

  Le système est triangulaire...

  - Si $m \neq -2$, on en tire :
    - $z = \dfrac{(1+m)^2}{m+2}$,
    - $y = z - m = \dfrac{(1+m)^2}{m+2} - m = \dfrac{1}{m+2}$,
    - $x = m^2 - y - m\,z = \dfrac{-(m+1)}{m+2}$.

    C'est la "solution générale" du système.
  - Si $m = -2$, le système est impossible car en additionnant les trois équations du système on obtient $0 = 3$.
- Si $m = 1$, les trois équations du système s'écrivent $x + y + z = 1$.
  Le système est doublement indéterminé: on peut, par exemple, écrire:

$$x = \lambda \quad , \quad y = \mu \quad \text{et} \quad z = 1 - \lambda - \mu\,.$$

Modifié le 14 janvier 2016 (Hugues Vermeiren)

EXALG136– Exemple. Racine carrée d'un nombre complexe.

Calculer

$$\sqrt{-3+4i}$$

Première méthode

$$\begin{cases} a^2-b^2=-3 & (\text{Donc } a<b) & (1) \\ 2ab=4 & (\text{Donc } a \text{ et } b \text{ sont de même signe}) & (2) \end{cases}$$

$$\to \begin{cases} \left(a^2-b^2\right)^2=(-3)^2 \\ 4a^2b^2=4^2 \end{cases} \to \begin{cases} \left(a^2-b^2\right)^2+4a^2b^2=(-3)^2+4^2 \\ 4a^2b^2=16 \end{cases}$$

$$\to \begin{cases} a^2+b^2=\sqrt{(-3)^2+4^2} \\ a^2b^2=4 \end{cases} \to \begin{cases} a^2+b^2=5 & (3) \\ a^2b^2=4 & (4) \end{cases}$$

On connaît donc la somme (3) et le produit (4), a^2 et b^2 sont donc solutions d'une équation du second dégré.

$$\to X^2-5X+4=0 \to (X-1)(X-4)=0$$

$$\to \begin{cases} a^2=1 \\ b^2=4 \end{cases} \to \begin{cases} a=1 \\ b=2 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a=-1 \\ b=-2 \end{cases} \to \sqrt{z}=\pm(1+2i)$$

Deuxième méthode

Le début est le même, mais on considère les équations (1) et (3)

$$\begin{cases}(1)\rightarrow a^2-b^2=-3\\(3)\rightarrow a^2+b^2=5\end{cases}\rightarrow\begin{cases}a^2=\dfrac{-3+5}{2}=1\\b^2=\dfrac{3+5}{2}=4\end{cases}\rightarrow\sqrt{z}=\pm(1+2i)$$

Troisième méthode

La première ligne est la même.

De (2), on tire : $b=\dfrac{4}{2a}=\dfrac{2}{a}$.

On remplace dans (1) : $a^2-\left(\dfrac{2}{a}\right)^2=-3 \rightarrow a^4+3a^2-4=0$

$$\rightarrow\begin{cases}a^2=1\\a^2=-4\ (\text{A rejeter car } a \text{ doit être réel})\end{cases}\rightarrow\begin{cases}a=-1\\b=-2\end{cases}\text{ ou }\begin{cases}a=1\\b=2\end{cases}$$

$\rightarrow\sqrt{z}=\pm(1+2i)$

Quatrième méthode

Soit $Z=\sqrt{z}$ avec $Z=a+bi$ et $z=x+yi$

Il est facile de montrer que : $a=\pm\sqrt{\dfrac{|z|+x}{2}}$ et $b=\pm\sqrt{\dfrac{|z|-x}{2}}$

Ici : $|z|=\sqrt{(-3)^2+4^2}=5\Rightarrow\begin{cases}a=\sqrt{\dfrac{5-3}{2}}=\pm1\\b=\pm\sqrt{\dfrac{5+3}{2}}=\pm2\end{cases}$

Comme y est positif, il faut prendre a et b de même signe :

$\Rightarrow Z=\sqrt{z}=\pm(1+2i)$

EXALG137– Louvain, juillet 2002, série 1

Considérons le système d'équations que voici, dans lequel a est un paramètre réel :

$$\begin{cases} ax + y + z = a^2 \\ 2ax + ay + 2z = 2a^2 \\ ax + y + az = 1 \end{cases}$$

Déterminer l'ensemble des valeurs de a pour lesquelles ce système possède

(i) aucune solution
(ii) une solution unique
(iii) une infinité simple de solutions
(iv) une infinité double de solutions
(v) une infinité triple de solutions

Justifier la réponse.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 2a & a & 2 \\ a & 1 & a \end{vmatrix} = a(a-1)(a-2)$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} a^2 & 1 & 1 \\ 2a^2 & a & 2 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = (a-1)(a-2)(a^2+a+1)$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} a & a^2 & 1 \\ 2a & 2a^2 & 2 \\ a & 1 & a \end{vmatrix} = 0$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} a & 1 & a^2 \\ 2a & a & 2a^2 \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix} = -a(a-2)(a+1)(a-1)$$

1) $\underline{\underline{a=0}}$

Le système devient : $\begin{cases} y+z=0 \\ 2z=0 \\ y=1 \end{cases}$ Système impossible

2) $\underline{\underline{a=1}}$

Le système devient : $\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x+y+2z=2 \\ x+y+z=1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=1-z \\ y=0 \end{cases}$

Infinité simple de solutions

3) $\underline{\underline{a=2}}$

Le système devient : $\begin{cases} 2x+y+z=4 \\ 4x+2y+2z=8 \\ 2x+y+2z=1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{7-y}{2} \\ z=-3 \end{cases}$

Infinité simple de solutions

4) <u>Dans les autres cas</u>

Une solution unique

$$\begin{cases} x=\dfrac{a^2+a+1}{a} \\ y=0 \\ z=-(a+1) \end{cases}$$

Il n'y a pas d'infinité double ou triple.

Résolu le 24 juin 2004. Modifié le 16 août 04. Modifié le 10 septembre 2009 (Johnny GERARD)

EXALG138– Louvain, juillet 2002, série 1

Résoudre dans les réels, l'inéquation suivante :

$$(1-x)\sqrt{5+x}<(1+x)\sqrt{5-x}$$

CE : $-5 \leq x \leq 5$

Regardons d'un peu plus près avant de nous lancer dans les calculs.

En effet, il ne faut pas oublier que la résolution va demander des élévations au carré qui risquent d'introduire des solutions fausses.

1) $1 \leq x \leq 5 \quad \rightarrow$ l'inéquation est toujours vérifiée.

2) -5 $\leq x \leq -1 \rightarrow$ l'inéquation n'est jamais vérifiée.

Il nous reste donc à étudier l'intervalle -1 $< x < 1$.

On a :

$(1-x)\sqrt{5+x}<(1+x)\sqrt{5-x} \;\rightarrow\; (1-x)^2(5+x)<(1+x)^2(5-x)$

$\rightarrow\; 2x(x-3)(x+3)<0$

Tableau de signes :

		-3		-1		0		1		3	
x	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x+3$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x-3$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$

Conclusion :

Seul l'intervalle entre -1 et 1, nous intéresse $\quad \rightarrow \quad 0 < x \leq 5$

Résolu le 24 juin 2004. Modifié le 10 septembre 2009 (Johnny GERARD)

EXALG139– Louvain, juillet 2002, série 1

On donne l'équation suivante, dans laquelle z est l'inconnue et c est un paramètre réel :

$$\left(\frac{z-c}{2}\right)^8=1$$

Déterminer l'ensemble des valeurs de c pour lesquelles notre équation possède *exactement trois* racines complexes z dont *la partie réelle est strictement négative.*

$$\left(\frac{z-c}{2}\right)^8=1 \;\rightarrow\; \frac{z-c}{2}=1^{\frac{1}{8}}=\cos\frac{k\pi}{4}+i\sin\frac{k\pi}{4} \;\rightarrow z=2\left(\cos\frac{k\pi}{4}+i\sin\frac{k\pi}{4}\right)+c$$

$$\rightarrow\; \operatorname{Re}(z)=2\cos\frac{k\pi}{4}+c \qquad \text{avec } k:0,1,2,.....7$$

Pour chaque valeur de k, on a une équation linéaire en c dont on étudie le signe

k	$\operatorname{Re}(z)$		-2			$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		2	
0	$2+c$	$-$	0	$+$		$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
1	$\sqrt{2}+c$	$-$	$-$	$-$		0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
2	$+c$	$-$	$-$	$-$		$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
3	$-\sqrt{2}+c$	$-$	$-$	$-$		$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
4	$-2+c$	$-$	$-$	$-$		$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
5	$-\sqrt{2}+c$	$-$	$-$	$-$		$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
6	$+c$	$-$	$-$	$-$		$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
7	$\sqrt{2}+c$	$-$	$-$	$-$		0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
	n	8	7	7		5	5	3	3	1	1	0	0

Dans le tableau n est le nombre de parties réelles strictement négatives

Conclusion : $\quad 0\le c<\sqrt{2}$

Solution proposée par Jan Frans Broeckx

L'équation (1) est équivalente à : $(z-c)^8 = 256$

$$\Leftrightarrow \quad z - c = \sqrt[8]{256}$$

$$\Leftrightarrow \quad \boldsymbol{z = \sqrt[8]{256} + c} \qquad (2)$$

Les solutions z de l'équation (1) sont donc les racines (complexes) $8^{\text{èmes}}$ de 256 auxquelles on ajoute le réel c. En notation trigonométrique :

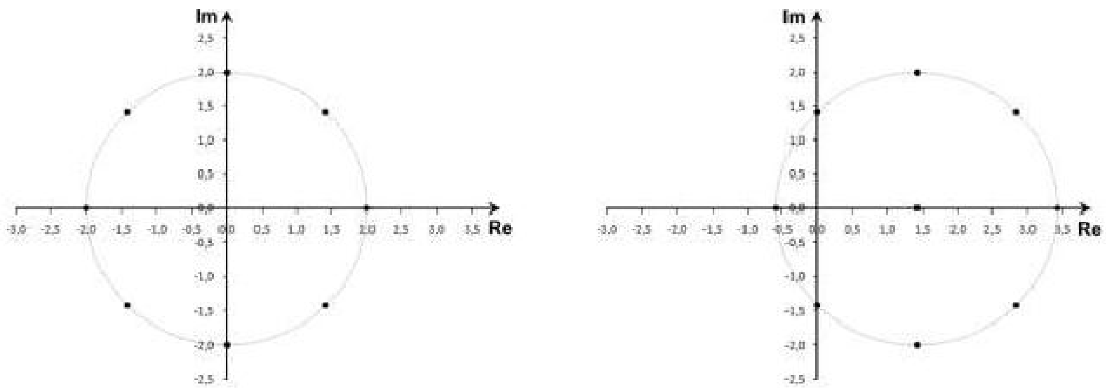
$$256 = 256.\text{cis}(0 + 2k\pi) \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

$$z_k = 2.\text{cis}\left(k\frac{\pi}{4}\right) + c \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

En notation algébrique, ces huit solutions sont :

$z_0 = c + 2$	$z_4 = 2 - c$
$z_1 = (c + \sqrt{2}) + i.\sqrt{2}$	$z_5 = (c - \sqrt{2}) - i.\sqrt{2}$
$z_2 = c + 2i$	$z_6 = c - 2i$
$z_3 = (c - \sqrt{2}) + i.\sqrt{2}$	$z_7 = (c + \sqrt{2}) - i.\sqrt{2}$

Dans le plan complexe, ces huit solutions se trouvent aux sommets d'un octogone, inscrit dans un cercle de rayon 2 centré sur $(c\,;0)$, et dont deux des sommets représentent les réels $(c+2\,;0)$ et $(c-2\,;0)$. Les figures ci-dessous représentent ces solutions dans les deux cas $c = 0$ et $c = \sqrt{2}$.



Comme le montre la figure, *exactement trois* racines complexes, notamment z_3, z_4 et z_5, auront leur *partie réelle strictement négative* à condition que $0 \leq c < \sqrt{2}$. La solution au problème est donc :

$$\boldsymbol{c \in [0\,; \sqrt{2}[}$$

Résolu le 24 juin 2004 . Modifié le 7 septembre 2004. Modifié le 27 mars 2005 (Benoît Baudelet)
Modifié le 12 septembre 2009 (Johnny GERARD). Modifié le 26 décembre 2011