Exercices résolus de mathématiques.

Algèbre

ALG 14

EXALG140 – EXALG149

http://www.matheux.c.la

Jacques Collot

Juillet 08

EXALG140– EPL, UCL, LLN, juillet 2002, série 1

Un bateau se déplace le long d'une rivière dont le courant a une vitesse de 3 km/h. Il va tantôt dans un sens tantôt dans l'autre. Il revient ainsi à son point de départ 6 heures après être parti, en ayant effectué un périple de 36 km.
Déterminer La vitesse du bateau, sachant que celui-ci ne perd pas de temps en changeant de sens.

Soit v la vitesse du bateau.
Quand le bateau est dans le sens du courant sa vitesse est $v+3$ km/h et soit t_1 le temps qu'il est dans le sens du courant.
Quand le bateau est dans le sens contraire du courant sa vitesse est $v-3$ km/h et soit t_2 le temps qu'il est dans le sens contraire du courant.
On a :

$$\begin{cases} t_1+t_2=6 & (1) \\ (v+3)t_1-(v-3)t_2=0 & (2) \\ (v+3)t_1+(v-3)t_2=36 & (3) \end{cases}$$

De (2) et (3) $\rightarrow \begin{cases} t_1=\dfrac{18}{v+3} \\ t_2=\dfrac{18}{v-3} \end{cases}$

On remplace dans $(1) \rightarrow \dfrac{3}{v+3}+\dfrac{3}{v-3}=1$

$\rightarrow v^2-6v-9=0 \rightarrow \begin{cases} v=+3+3\sqrt{2} \\ v=+3-3\sqrt{2} \quad \text{A rejeter car } <0 \end{cases}$

$\rightarrow t_1=\dfrac{6}{2+\sqrt{2}}=1.7574\,h \quad \text{et} \quad t_2=\dfrac{6}{\sqrt{2}}=4.2426\,h$

Conclusion : $\boxed{v=+3+3\sqrt{2}\ km/h}$

Résolu le 24 juin 2004

EXALG141– EPL, UCL, LLN, juillet 2002, série 2

Soit m un paramètre réel. Résoudre et discuter l'équation suivante (dans les réels).

$$\sin^2 x + \cos x = 1 - m$$

Solution proposée par Jan Frans Broeckx

Transformation de l'équation

Dans le but de n'avoir qu'une seule fonction trigonométrique dans l'équation, on remplace $\sin^2 x$ par $1-\cos^2 x$:

(1) $\Leftrightarrow$ $1-\cos^2 x + \cos x = 1 - m$

$\Leftrightarrow$ $\cos^2 x - \cos x - m = 0$ (2)

Posons : $y = \cos x \Leftrightarrow x = \text{Arccos}\, y + 2k\pi \;\; (k \in \mathbb{Z})$

avec CE : $-1 \leq y \leq +1$

(2) $\Leftrightarrow$ $y^2 - y - m = 0$ (3)

Résolution et discussion :

$\Delta = 1 + 4m$

(1) $\boldsymbol{m < -\frac{1}{4}}$ $\Leftrightarrow \Delta < 0$ Pas de solutions réelles : $S = \emptyset$

(2) $\boldsymbol{m = -\frac{1}{4}}$ $\Leftrightarrow \Delta = 0 \Leftrightarrow \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou $x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$

(3) $\boldsymbol{m > -\frac{1}{4}}$ $\Leftrightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{1+4m}$ et $\begin{cases} y_1 = \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{1+4m}\right) \\ y_2 = \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{1+4m}\right) \end{cases}$

Discussion de ce 3e cas :

(a) $\boldsymbol{y_1 \leq 1}$ $\Leftrightarrow \sqrt{1+4m} \leq 1 \Leftrightarrow \boldsymbol{m \leq 0}$

(b) $\boldsymbol{y_2 \geq -1}$ $\Leftrightarrow \sqrt{1+4m} \leq 3 \Leftrightarrow \boldsymbol{m \leq 2}$

Résumé final :

① $m < -\frac{1}{4}$: $\quad S = \emptyset$

② $m = -\frac{1}{4}$: $\quad S = \left\{\frac{\pi}{3} + 2k\pi \;\middle|\; k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\frac{\pi}{3} + 2k\pi \;\middle|\; k \in \mathbb{Z}\right\}$

③ $-\frac{1}{4} < m \leq 0$:

$$S = \left\{+\operatorname{Arccos}\left(\frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{1+4m}\right)\right) + 2k\pi \;\middle|\; k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\operatorname{Arccos}\left(\frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{1+4m}\right)\right) + 2k\pi \;\middle|\; k \in \mathbb{Z}\right\}$$

$$\cup \left\{+\operatorname{Arccos}\left(\frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{1+4m}\right)\right) + 2k\pi \;\middle|\; k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{+\operatorname{Arccos}\left(\frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{1+4m}\right)\right) + 2k\pi \;\middle|\; k \in \mathbb{Z}\right\}$$

④ $0 < m \leq 2$:

$$S = \left\{+\operatorname{Arccos}\left(\frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{1+4m}\right)\right) + 2k\pi \;\middle|\; k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\operatorname{Arccos}\left(\frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{1+4m}\right)\right) + 2k\pi \;\middle|\; k \in \mathbb{Z}\right\}$$

⑤ $m > 2$: $\quad S = \emptyset$

Résolu le 24 juin 2004. Modifié le 26 décembre 2011.

EXALG142– EPL, UCL, LLN, juillet série 2

Résoudre, dans les nombres réels, l'équation que voici :

$$2+\log_2\left(2^x-\sqrt{6}\right)=2x-\log_4\left(\left(2^x+\sqrt{6}\right)^2\right)$$

$$\begin{aligned}
2+\log_2\left(2^x-\sqrt{6}\right)&=2x-\log_4\left(\left(2^x+\sqrt{6}\right)^2\right)\\
2+\log_2\left(2^x-\sqrt{6}\right)&=2x-\log_2\left(2^x+\sqrt{6}\right)\\
\log_2\left(2^x-\sqrt{6}\right)\left(2^x+\sqrt{6}\right)&=2x-2\\
\log_2\left(2^{2x}-6\right)&=\log_2 2^{2x-2}\\
2^{2x}-6&=2^{2x-2}\\
2^2.2^{2x}-6.2^2&=2^{2x}\\
3.2^{2x}&=24\\
2^{2x}&=2^3\\
x&=\frac{3}{2}
\end{aligned}$$

Résolu le 24 juin 2004

EXALG143 EPL, UCL, LLN, juillet 2002, série 2

On s'intéresse à l'équation suivante :

$$z^4+\left(3a^2-2i\right)z^2-6ai=0$$

Dans laquelle *a* est un paramètre réel et *i* représente l'unité imaginaire.

1. Déterminer les valeurs de *a* pour lesquelles cette équation possède *au moins* une racine complexe dont *la partie réelle est nulle.*
2. Pour chacune des valeurs de *a* en question, donner toutes les racines complexes de l'équation correspondante.

---

1) Soit donc $ib,$ avec $b\in\mathbb{R}_0$, une racine de l'équation dont la partie réelle est nulle.

Elle vérifie l'équation $\rightarrow (ib)^4+\left(3a^2-2i\right)(ib)^2-6ai=0$

$\rightarrow b^4-3a^2b^2+2ib^2-6ai=0\rightarrow\begin{cases}b^4-3a^2b^2=0\\2b^2-6a=0\end{cases}\rightarrow\begin{cases}b^2\left(b^2-3a^2\right)=0\\b^2=3a\end{cases}\rightarrow 3a\left(a-a^2\right)=0$

$\rightarrow a^2(1-a)=0\rightarrow\begin{cases}a=0\\a=1\end{cases}$

La solution $a=0$ ne convient pas car alors $b=0$ ce qui a été exclut.

2) L'équation devient donc pour $a = 1$

$z^4 + (3-2i)z^2 - 6i = 0$

$\Delta = (3-2i)^2 + 24i = 5 + 12i$

Calculons : $\sqrt{\Delta} \to \begin{cases} x^2 - y^2 = 5 & (|x| > |y|) \\ 2x.y = 12 & (x \text{ et } y \text{ de même signe}) \end{cases} \to \begin{cases} x^2 - y^2 = 5 \\ x^2 + y^2 = 13 \end{cases}$

$$\to \begin{cases} x^2 = 9 \\ y^2 = 4 \end{cases} \to \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases} \to \sqrt{\Delta} = 3 + 2i$$

Calculons les racines de l'équation:

$$z^2 = \frac{-(3-2i) \pm (3+2i)}{2} \to \begin{cases} z_1^2 = -3 \to \begin{cases} z_{11} = i\sqrt{3} \\ z_{12} = -i\sqrt{3} \end{cases} \\ z_2^2 = 2i \end{cases}$$

Calculons $\sqrt{2i}$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ 2xy = 2 \end{cases} \to \begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases} \to \begin{cases} x^2 = 1 \\ y^2 = 1 \end{cases} \to \sqrt{2i} = \pm(1+i)$$

Finalement les racines sont : $\left(-i\sqrt{3}, i\sqrt{3}, 1+i, -1-i\right)$

Note : Les solutions $\pm i\sqrt{3}$ étaient prévisibles sur base des résultats du point 1

Résolu le 24 juin 2004. Modifié le 27 aout 2009 (Johnny Gérard)

EXALG144– EPL, UCL, LLN, juillet 2002, série 2

Des enfants se partagent un sac de billes, *de manière égale*. Le premier enfant prend 1 bille et le dixième des billes qui restent, puis le deuxième prend 2 billes et le dixième de celles qui restent, et ainsi de suite jusqu'au dernier enfant qui prend toutes les billes restantes. Combien y avait-il d'enfants et combien chacun a-t-il pris de billes ? Mettre le problème en équations, puis le résoudre. Une réponse numérique ne suffit pas.

Soit x le nombre de billes

Le premier enfant prend : $1+\dfrac{x-1}{10}$.

Il reste : $x-1-\dfrac{x-1}{10}=\dfrac{9}{10}(x-1)$

Le deuxième enfant prend : $2+\dfrac{\dfrac{9(x-1)}{10}-2}{10}$

Comme le partage est de manière égale :

$$\to\ 1+\frac{x-1}{10}=2+\frac{\dfrac{9(x-1)}{10}-2}{10}\quad\to\ 81$$

On a donc le tableau suivant :

	Prise	Reste
1	$1+8=9$	72
2	$2+7=9$	63
3	$3+6=9$	54
4	$4+5=9$	45
5	$5+4=9$	36
6	$6+4=9$	27
7	$7+4=9$	18
8	$8+4=9$	9
9	9	0

Résolu le 24 juin 2004

EXALG145 - FACSA, ULiège, Liège, septembre 2019.

Soit $(F_n)_{n\geq 0}$ la suite de Fibonacci, définie par:

$F_0 = 0$; $F_1 = 1$ et $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ pour $n \geq 2$:

Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a:

$$\sum_{i=0}^{n} F_i^{\,2} = F_n F_{n+1}$$

Nous reprenons la solution proposée par l'université : Professeur Pascal Gribomont :
http://www.montefiore.ulg.ac.be/~gribomon/prov/Algebre.pdf

Solution. On procède par récurrence sur n. Pour $n = 0$, la somme du membre de gauche comporte le seul terme $F_0^2 = 0$, tandis que le membre de droite vaut $F_0F_1 = 0$.
Si on suppose l'égalité vraie pour une certaine valeur de n (hypothèse de récurrence), on a le développement suivant:

$$\sum_{i=0}^{n+1} F_i^2 = \left(\sum_{i=0}^{n} F_i^2\right) + F_{n+1}^2 = F_n F_{n+1} + F_{n+1}^2 = F_{n+1}(F_n + F_{n+1}) = F_{n+1}F_{n+2}\,,$$

qui établit l'égalité pour la valeur suivante $n + 1$.

EXALG146– EPL, UCL, LLN, septembre 2002

Résoudre, dans les nombres réels, l'équation que voici :

$$\frac{\log_2\left(\sqrt{(x-1)(x+3)}\right)}{\log_8 3+\log_8(x+1)}=\log_9 27$$

$$\frac{\log_2\left(\sqrt{(x-1)(x+3)}\right)}{\log_8 3+\log_8(x+1)}=\log_9 27$$

$$\text{CE : } x>-1 \quad \text{et} \quad \begin{cases} x<-3 \\ x>1 \end{cases} \quad \to \quad x>1$$

$$\frac{\log_2\left(\sqrt{(x-1)(x+3)}\right)}{\frac{\log_2 3}{\log_2 8}+\frac{\log_2(x+1)}{\log_2 8}}=\frac{\log_3 3^3}{\log_3 9} \to \frac{\log_2\left(\sqrt{(x-1)(x+3)}\right)}{\frac{\log_2 3}{3}+\frac{\log_2(x+1)}{3}}=\frac{3}{2}$$

$$\frac{1}{2}\log_2(x-1)(x+3)=\frac{1}{2}\log_2 3(x+1) \to (x-1)(x+3)=3(x+1)$$

$$x^2-x-6=0 \quad \to \quad (x+2)(x-3)=0$$

$$\to \quad \begin{cases} x=-2 & \text{A rejeter vu les CE} \\ x=3 \end{cases}$$

Conclusion : $\boxed{x=3}$

Résolu le 24 juin 2004

EXALG147– EPL, UCL, LLN, septembre 2002

Déterminer le(s) polynôme(s) $P(x)$ de degré cinq satisfaisant aux conditions suivantes :

1. le coefficient de x^5 dans $P(x)$ est égal à 1
2. $P(x)$ est égal (identiquement) à $x^5 P(1/x)$
3. La somme des cinq racines (réelles ou complexes) de $P(x)$ est égale à 2
4. $P(x)$ est divisible $x^2 + x + 1$

Ensuite, calculer toutes les racines réelles de $P(x)$.

Solution proposée par Jan Frans Broeckx

En tenant compte des conditions (1), (2) et (3), le polynôme peut s'écrire comme suit :

$$P(x) = x^5 - 2x^4 + ax^3 + ax^2 - 2x + 1$$

Pour exprimer la condition (4), effectuons la division euclidienne de $P(x)$ par $x^2 + x + 1$ et exprimons la condition que le reste doit être égal à zéro :

$$\begin{array}{r|l}
x^5 - 2x^4 + ax^3 + ax^2 - 2x + 1 & x^2 + x + 1 \\ \cline{2-2}
-x^5 - x^4 - x^3 \qquad\qquad\qquad & x^3 - 3x^2 + (a+2)x + 1 = Q(x) \\ \hline
-3x^4 + (a-1)x^3 + ax^2 - 2x + 1 & \\
3x^4 + 3x^3 + 3x^2 \qquad\quad & \\ \hline
(a+2)x^3 + (a+3)x^2 - 2x + 1 & \\
-(a+2)x^3 - (a+2)x^2 - (a+2)x & \\ \hline
x^2 - (a+4)x + 1 & \\
-x^2 - x - 1 & \\ \hline
R(x) = -(a+5)x &
\end{array}$$

La condition est donc que $a + 5 = 0$ ou bien que $a = -5$. Il y a donc un seul polynôme satisfaisant aux quatre conditions :

$$\boldsymbol{P(x) = x^5 - 2x^4 - 5x^3 - 5x^2 - 2x + 1} \qquad (1)$$

Ce polynôme est factorisé comme suit :

$P(x) = x^5 - 2x^4 - 5x^3 - 5x^2 - 2x + 1 = (x^2 + x + 1)(x^3 - 3x^2 - 3x + 1)$

Le premier facteur est un trinôme du second degré qui n'as pas de racines réelles ($\Delta = -3$). Les racines réelles doivent donc provenir du second facteur, dont on voit qu'il est divisible par $(x + 1)$. Après division par la règle de Horner :

$$x^3 - 3x^2 - 3x + 1 = (x + 1)(x^2 - 4x + 1)$$

Une première racine réelle du polynôme (1) est donc $x_1 = -1$. Les deux autres sont les racines du trinôme $x^2 - 4x + 1$:

$$\Delta = 16 - 4 = 12 \qquad \sqrt{\Delta} = 2\sqrt{3} \qquad x_{2,3} = \frac{1}{2}(4 \pm 2\sqrt{3}) = 2 \pm \sqrt{3}$$

Les racines réelles du polynôme (1) sont donc :

$$\boldsymbol{S = \{-1, 2 - \sqrt{3}, 2 + \sqrt{3}\}}$$

Remarque :

Les racines (complexes) de $x^2 + x + 1$ sont $x_{4,5} = \frac{1}{2}(-1 \pm i\sqrt{3})$. La somme des cinq racines est donc bien : $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = -1 + (2 + \sqrt{3}) + (2 - \sqrt{3}) + \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -2.$

Résolu le 24 juin 2004. Modifié le 26 décembre 2011.

EXALG148– EPL, UCL, LLN, septembre 2002

Une pierre est lâchée du haut d'un immeuble. La distance h parcourue par celle-ci en chute libre en t secondes depuis l'instant où elle est lâchée vaut $h = g\,t^2 / 2$, où $g = 9.81\ m / s^2$ est l'accélération due à la pesanteur. Du haut de l'immeuble, on entend le bruit de la pierre frapper le sol 6.5 s plus tard. Sachant que la vitesse du son est de 340 m / s, calculer la hauteur de l'immeuble.

Soit t_1 le temps de chute de la pierre, et t_2 le temps mis par le son pour remonter.

$$\begin{cases} h = \dfrac{gt_1^{\,2}}{2} \\ h = 340\,t_2 \\ t_1 + t_2 = 6.5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dfrac{9.81\,t_1^{\,2}}{2} = 340\,t_2 \\ t_2 = 6.5 - t_1 \end{cases} \rightarrow 9.81\,t_1^{\,2} + 2\times 340\times t_1 - 2\times 6.5\times 340 = 0$$

$$\rightarrow t_1 = \frac{-340 \pm \sqrt{340^2 + 2\times 6.5\times 340\times 9.81}}{9.81} = \begin{cases} 5.983 \\ -75.3 \text{ A rejeter} \end{cases}$$

$$\rightarrow t_1 = 5.983\,s \quad \rightarrow \quad t_2 = 0.5165\,s \quad \rightarrow \quad \boxed{h = 175.61\,m}$$

Résolu le 24 juin 2004

EXALG149– EPL, UCL, LLN, juillet 2003, série 1.

Résoudre, dans les réels, l'équation suivante :

$$\left(\sqrt{2}+1\right)^{x}-2\left(\sqrt{2}-1\right)^{x}=1$$

Remarquons que : $1=\left(\sqrt{2}+1\right)\left(\sqrt{2}-1\right)=\left(\sqrt{2}+1\right)^{x}\left(\sqrt{2}-1\right)^{x}$

$\rightarrow$ multiplions les deux membres de l'équation par $\left(\sqrt{2}+1\right)^{x}$

$\rightarrow\left(\sqrt{2}+1\right)^{2x}-2\left(\sqrt{2}-1\right)^{x}\left(\sqrt{2}+1\right)^{x}=\left(\sqrt{2}+1\right)^{x}$

$\rightarrow\left(\sqrt{2}+1\right)^{2x}-\left(\sqrt{2}+1\right)^{x}-2=0$

Soit $t=\left(\sqrt{2}+1\right)$ $\rightarrow t^{2}-t-2=(t+1)(t-2)=0$

$t=-1$ est à rejeter car $t>0$

$\rightarrow\left(\sqrt{2}+1\right)^{x}=2\ \rightarrow\ x\ln\left(\sqrt{2}+1\right)=\ln 2$

$\rightarrow\ \boxed{x=\dfrac{\ln 2}{\ln\left(\sqrt{2}+1\right)}}$

Résolu le 24 juin 2004