Exercices résolus de mathématiques.

Algèbre

ALG 17

EXALG170 – EXALG179

http://www.matheux.c.la

Jacques Collot

Juillet 08

EXALG170– Bruxelles, septembre 2004

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$2|1-x|-|2x+3|=1-2x$$

Construisons un tableau de signe pour définir les valeurs remarquables de x

		$-\frac{3}{2}$		1	
$1-x$	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$2x+3$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
	$-$	0	$+$	0	$-$

1) $\underline{x>1}$ L'équation est équivalente à : $-2(1-x)-(2x+3)=1-2x \;\rightarrow\; \boxed{x=3}$

2) $\underline{x=1} \;\rightarrow\; -(2x+3)=1-2x$ Impossible

3) $\underline{-\frac{3}{2}<x<1} \;\rightarrow 2(1-x)-(2x+3)=1-2x \;\rightarrow\; \boxed{x=-1}$

4) $\underline{x=-\frac{3}{2}} \;\rightarrow 2(1-x)=1-2x$ Impossible

5) $\underline{x<-\frac{3}{2}} \;\rightarrow 2(1-x)+(2x+3)=1-2x \;\rightarrow\; \boxed{x=-2}$

Résolu le 2 décembre 2004.

EXALG171– Bruxelles, septembre 2004

Simplifier au maximum l'expression suivante :

$$\frac{\dfrac{a^4+ab^3}{ab+b^2}}{\dfrac{a^4-a^3b+a^2b^2}{a^2+ab}} \qquad (a,b\in\mathbb{R})$$

$$CE:\begin{cases} a\neq 0 \\ b\neq 0 \\ a\neq -b \\ a^4-a^3b+a^2b^2\neq 0\rightarrow a^2-ab+b^2\neq 0 \\ \qquad \text{Ce qui est toujours vérifié si } a \text{ et } b\neq 0 \end{cases}$$

On peut maintenant simplifier :

$$\frac{\dfrac{a^4+ab^3}{ab+b^2}}{\dfrac{a^4-a^3b+a^2b^2}{a^2+ab}}=\frac{\dfrac{a(a+b)(a^2-ab+b^2)}{b(a+b)}}{\dfrac{a^2(a^2-ab+b^2)}{a(a+b)}}=\frac{a+b}{b}$$

Résolu le 2 décembre 2004.

EXALG172– Bruxelles, septembre 2004

Résoudre dans $\mathbb{R}^3$, en discutant par rapport au paramètre réel a, le système :

$$\begin{cases} x + ay + z = 2a \\ ax + y + z = 0 \\ x + ay + (a+1)z = a \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \\ 1 & a & a+1 \end{vmatrix} = a(1-a)(1+a) \qquad \Delta_x = \begin{vmatrix} 2a & a & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ a & a & a+1 \end{vmatrix} = a(a+1)$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 2a & 1 \\ a & 0 & 1 \\ 1 & a & a+1 \end{vmatrix} = -a(a+1)(2a-1) \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & a & 2a \\ a & 1 & 0 \\ 1 & a & a+1 \end{vmatrix} = -a(1-a)(a+1)$$

1) $\underline{a=0}$ Le système devient : $\begin{cases} x+y=0 \\ y+z=0 \rightarrow x=z=-y \\ x+y=0 \end{cases}$

2) $\underline{a=1} \rightarrow \begin{cases} x+y+z=2 \\ x+y+z=0 \\ x+y+2z=1 \end{cases}$ Système impossible.

3) $\underline{a=-1} \rightarrow \begin{cases} x-y+z=-2 \\ -x+y+z=0 \\ x-y=-1 \end{cases}$ Système impossible

4) Dans les autres cas : $\begin{cases} x = \dfrac{1}{1-a} \\ y = \dfrac{2a-1}{a-1} \\ z = -1 \end{cases}$

Résolu le 2 décembre 2004.

EXALG173 – Louvain, juillet 2004, série 1.

Résoudre dans les réels, l'équation suivante :

$$\sqrt[3]{x+3}+\sqrt[3]{4-x}=1$$

On peut faire des élévations au cube, ce qui va entraîner des calculs invraisemblables. On peut faire plus simple :

Posons $\begin{cases} a^3 = x+3 \\ b^3 = 4-x \end{cases}$ On remarque : $\begin{cases} a^3+b^3 = 7 \\ a+b=1 \end{cases}$

On a : $\left(a^3+b^3\right)=\left(a+b\right)\left(a^2-ab+b^2\right)$

$\rightarrow \qquad a^2+2ab-3ab+b^2=7 \rightarrow \left(a+b\right)^2-3ab=7 \rightarrow 3ab=-6 \rightarrow ab=-2$

$\rightarrow \qquad a^3b^3=-8 \rightarrow \left(x+3\right)\left(4-x\right)=-8 \rightarrow x^2-x-20=0 \rightarrow \boxed{\begin{cases} x=-4 \\ x=5 \end{cases}}$

Résolu le 2 février 2005.

EXALG174 – Louvain, juillet 2004, série 1.

Déterminer le polynôme $P(x)$ du 4éme degré tel que

- Le coefficient de x^4 dans $P(x)$ vaut 1
- $P(x)$ est divisible par $x^2 + x + 1$
- Le reste de la division $P(x)$ par $x^2 - 1$ est $-3x + 9$

Donner les racines réelles de l'équation $P(x) = 0$

Soit le polynôme : $P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$

Faisons la division de $P(x)$ par $x^2 + x + 1$

$$
\begin{array}{ccccc|c}
1 & a & b & c & d & x^2+x+1 \\
\underline{1} & \underline{1} & \underline{1} & & & 1 \\
0 & a-1 & b-1 & & & a-1 \\
 & \underline{a-1} & \underline{a-1} & \underline{a-1} & & b-a \\
 & 0 & b-a & c-a+1 & & \\
 & & \underline{b-a} & \underline{b-a} & \underline{b-a} & \\
 & & 0 & c-b+1 & d-b+a &
\end{array}
$$

On en déduit : $P(x) = \left(x^2 + x + 1\right)\left(x^2 + (a-1)x + (b-a)\right) \qquad (1)$

et $\begin{cases} c - b + 1 = 0 & (2) \\ d - b + a = 0 & (3) \end{cases}$

Divisions maintenant par $x^2 - 1$

$$
\begin{array}{ccccc|c}
1 & a & b & c & d & x^2-1 \\
\underline{1} & \_ & \underline{-1} & & & 1 \\
0 & a & b+1 & & & a \\
 & \underline{a} & \_ & \underline{-a} & & b+1 \\
 & 0 & b+1 & c+a & & \\
 & & \underline{b+1} & \_ & \underline{-b-1} & \\
 & & 0 & c+a & d+b+1 &
\end{array}
$$

On en déduit : $P(x) = \left(x^2 - 1\right)\left(x^2 + ax + (b+1)\right) + (c+a)x + (d+b+1)$

Et $\begin{cases} c + a = 0 & (4) \\ d + b + 1 = 0 & (5) \end{cases}$

Il reste à résoudre le système formé par les équations $(2),(3),(4)$ et (5)

$$\begin{array}{cccc|c} a & b & c & d & X \\ \hline & -1 & 1 & & -1 \\ 1 & -1 & & 1 & 0 \\ 1 & & 1 & & -3 \\ & 1 & & 1 & 8 \end{array} \rightarrow \begin{cases} a=-4 \\ b=2 \\ c=1 \\ d=6 \end{cases}$$

$\rightarrow \boxed{P(x)=x^4-4x^3+2x^2+x+6}$

Racines

De (1), on déduit : $P(x)=(x^2+x+1)(x^2-5x+6)$

$$=(x^2+x+1)(x-3)(x-2)$$

Les racines réelles sont donc $\boxed{\begin{cases} x=3 \\ x=2 \end{cases}}$

Résolu le 2 février 2005.

EXALG175 – Louvain, juillet 2004, série 1.

Résoudre dans les nombres réels :

$$|x-2|-|x-1|\geq|x+1|-5$$

Etudions les signes des différents termes pour nous permettre de définir les cas à étudier :

x		-1		1		2	
$x-2$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x+1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
cas	1	2	3	4	5	6	7

Cas	Contrainte	Equation	Solution
1	$x<-1$	$-(x-2)+(x-1)\geq-(x+1)-5$ $x\geq-7$	$-7\leq x<-1$
2	$x=-1$	$3-2\geq-5$	$x=-1$
3	$-1<x<1$	$-(x-2)+(x-1)\geq-(x+1)-5$ $x\leq 5$	$-1<x<1$
4	$x=1$	$1\geq 2-5$	$x=1$
5	$1<x<2$	$-(x-2)-(x-1)\geq(x+1)-5$ $x\leq\frac{7}{2}$	$1<x<2$
6	$x=2$	$-1\geq 3-5$	$x=2$
7	$x>2$	$(x-2)-(x-1)\geq(x+1)-5$ $x\leq 3$	$2<x\leq 3$

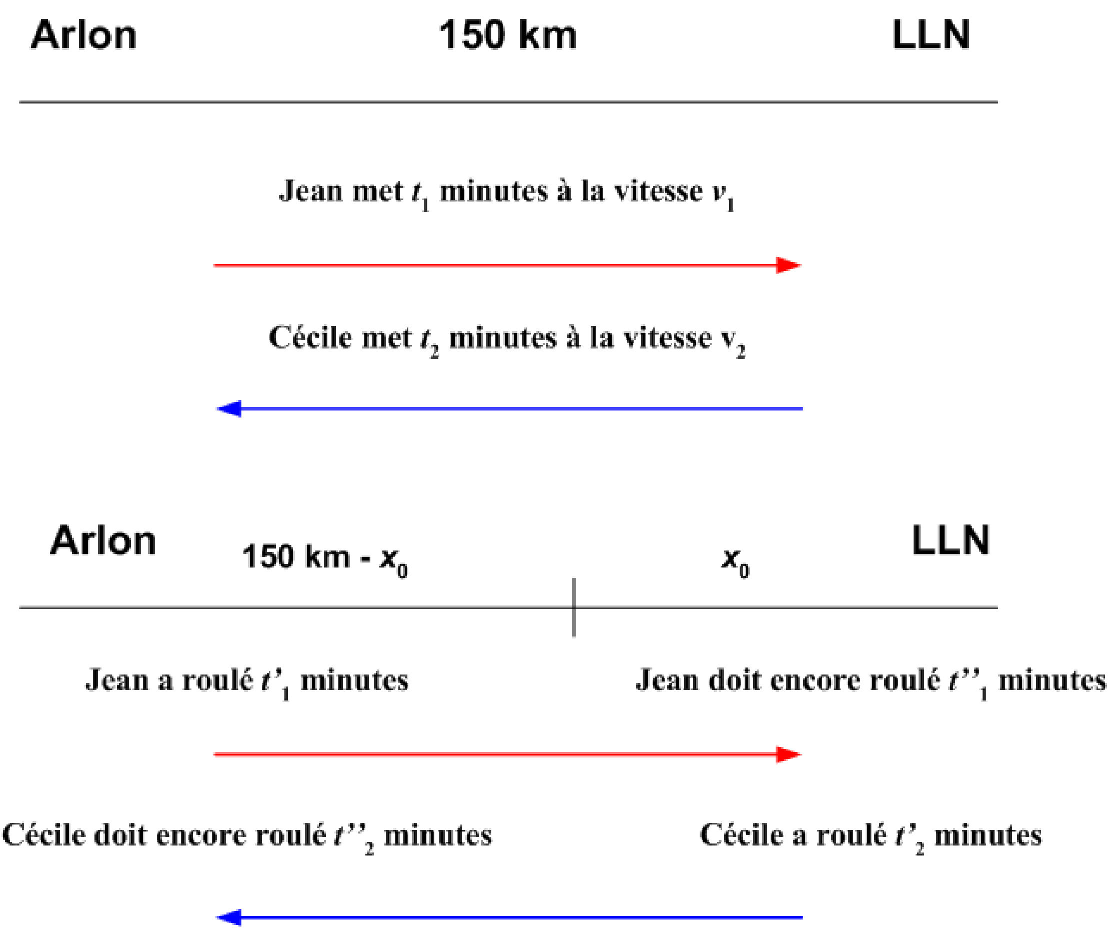
Conclusion : $\boxed{-7\leq x\leq 3}$

Résolu le 2 février 2005.

EXALG176 – Louvain, juillet 2004, série 1.

Le tronçon de l'autoroute E411 reliant Louvain-La-Neuve à Arlon a pour longueur approximative 150km. Jean met pour franchir cette distance 25 minutes de moins que sont épouse Cécile avec sa Clio.
Or, l'autre jour, ils sont partis en même temps, elle de Louvain-La-Neuve et lui de Arlon. Quand ils se sont croisés, ils ont observé que la différence entre les distances encore à franchir, en km, était égale à la différence entre les nombres de minutes qu'il leur restait à rouler, s'ils conservaient leurs vitesses habituelles respectives (v_1 pour Jean et v_2 pour Cécile, toutes supposées constantes tout au long du parcours).

- A quelle distance x_0 (en km) étaient-ils de Louvain-La-Neuve lors de leur croisement ?
- Combien de temps t (en minutes) avaient-ils roulé avant de se croiser ?
- Calculer également les vitesses v_1 et v_2 (en km/minutes)



Désignons Jean par l'indice 1 et Cécile par l'indice 2.

On a : $\begin{cases} v_1 t_1 = v_2 t_2 = 150 \\ v_1 t'_1 = v_2 t'_2 = 150 - x_0 \\ v_1 t''_1 = v_2 t''_2 = x_0 \\ t_2 = t'_2 + t''_2 \\ t'_1 = t'_2 \end{cases}$

La différence entre les distances encore à franchir est : $150 - 2x_0$

Et on nous dit que : $t''_2 - t''_1 = 150 - 2x_0$

Mais $t_2 - t_1 = t'_2 + t''_2 - t'_1 - t''_2 = t''_2 - t'_1 = 25$

$\rightarrow 150 - 2x_0 = 25 \rightarrow \boxed{x_0 = 62.5\ km}$

Calculons les vitesses : $t'_1 = t'_2 = \dfrac{150 - x_0}{v_1} = \dfrac{x_0}{v_2} \qquad (1)$

Mais : $t_2 - t_1 = 150\left(\dfrac{1}{v_2} - \dfrac{1}{v_1}\right) = 25 \rightarrow \dfrac{1}{v_2} - \dfrac{1}{v_1} = \dfrac{1}{6}$

$\rightarrow (1)$ devient : $\dfrac{87.5}{v_1} = 62.5\left(\dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{v_1}\right) \rightarrow \boxed{v_1 = 2.4\ km/min \text{ ou } 144\ km/h}$

$\rightarrow \dfrac{1}{v_2} = \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{v_1} \rightarrow \boxed{v_2 = 1.714\ km/min \text{ ou } 102.8\ km/h}$

Calculons les temps :

$t'_1 = t'_2 = \dfrac{62.5}{1.714} = 30.46\ min$

$t''_1 = \dfrac{62.5}{2.4} = 26.05\ min$

$t''_2 = \dfrac{87.5}{1.714} = 51.05\ min$

Résolu le 2 février 2005. Modifié le 23 septembre 2009 (Pierre Bernimont)

EXALG177 – Louvain, juillet 2004, série 2.

Soit a un paramètre réel strictement positif. Discuter et résoudre, dans les nombres réels, l'équation suivante.

$$\log_8\left(\log_2 a+\log_4 x\right)=\frac{1}{3}+\log_8\left(\log_2\sqrt{x+1}\right)$$

$$CE:\begin{cases} x>0 \\ a>0\ (\text{dans les hypothèses}) \\ \log_2 a+\log_4 x>0\to\log_2 a\sqrt{x}>0\to a\sqrt{x}>1 \\ \log_2\sqrt{x+1}>0\to\sqrt{x+1}>1\to x>0 \end{cases}$$

$$\log_8\left(\log_2 a+\log_4 x\right)=\frac{1}{3}+\log_8\left(\log_2\sqrt{x+1}\right)$$

$$\log_8\left(\log_2 a+\log_4 x\right)=\log_8 8^{\frac{1}{3}}+\log_8\left(\frac{1}{2}\log_2\left(x+1\right)\right)$$

$$\log_2 a+\frac{1}{2}\log_2 x=\log_2\left(x+1\right)$$

$$a\sqrt{x}=x+1\to x^2+\left(2-a^2\right)x+1=0$$

Le delta doit être positif ou nul : $\Delta=\left(2-a^2\right)^2-4=a^2\left(a-2\right)\left(a+2\right)\geq 0$

$$\to\begin{cases} a\geq 2 \\ a\leq -2 \quad \text{à rejeter} \end{cases}\to\boxed{x=\frac{a^2-2\pm a\sqrt{\left(a-2\right)\left(a+2\right)}}{2}}$$

Il faut encore vérifier que les CE sont vérifiées.

$\underline{x>0}$ $\to a^2-2\pm a\sqrt{\left(a-2\right)\left(a+2\right)}>0\to a^2-2>a\sqrt{\left(a-2\right)\left(a+2\right)}\to 2a^2+a>0$

Ce qui est toujours vérifié. Il est évident que l'autre racine est aussi toujours >0

$\underline{a\sqrt{x}>1}$

Considérons la racine la plus petite

$$a\sqrt{x}>1\to x>\frac{1}{a^2}\to\frac{1}{a^2}<\frac{a^2-2-a\sqrt{\left(a-2\right)\left(a+2\right)}}{2}$$

$$\to 2<a^4-2a^2-a^3\sqrt{\left(a-2\right)\left(a+2\right)}\to 4+8a^2>0$$

Ce qui est toujours vérifié.

Résolu le 2 février 2005.

EXALG178 – Louvain, juillet 2004, série 2.

Résoudre, dans les nombres réels, l'inéquation suivante :

$$\sqrt{(1-x)^3} \geq 1-2x$$

$$CE : \begin{cases} 1-x \geq 0 \\ 1-2x \geq 0 \end{cases} \rightarrow x \leq \frac{1}{2}$$

$$\sqrt{(1-x)^3} \geq 1-2x \rightarrow 1-3x+3x^2-x^3 \geq 1-4x+4x^2$$

$$\rightarrow 1-3x+3x^2-x^3 \geq 1-4x+4x^2 \rightarrow x\left(x^2+x-1\right) \leq 0$$

$$\text{Avec } : x^2+x-1=0 \rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} \\ x = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

Tableau des signes :

x		$\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$		0		$\frac{-1+\sqrt{5}}{2} \simeq 0.618$	
x	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
x^2+x-1	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Conclusion : $\boxed{0 \leq x \leq \frac{1}{2}}$

Résolu le 2 février 2005.

EXALG179 – Louvain, juillet 2004, série 2.

Donner toutes les racines complexes (y compris, bien entendu, les racines réelles), sous la forme $a + ib$ de l'équation

$$\left(z^2+2z\right)^3=1$$

Posons $t = z^2 + 2z$, l'équation devient : $t^3 = 1 = cis2k\pi \to t = cis\dfrac{2k\pi}{3}$

$\to t_1 = 1, \quad t_2 = -\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i, \quad t_3 = -\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

$\underline{1)\ t=1} \quad \to \ z^2+2z-1=0 \to z_1 = \sqrt{2}-1, \quad z_2 = -1-\sqrt{2}$

$\underline{2)\ t=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i} \ \to z^2+2z+\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i=0 \to \Delta = \dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i=\dfrac{1}{2}\left(1+\sqrt{3}i\right)$

Calculons : $\sqrt{1+\sqrt{3}i}$

$$\begin{cases} x^2-y^2=1 \\ 2xy=\sqrt{3} \end{cases} \to \begin{cases} x^2+y^2=2 \\ x^2y^2=\dfrac{3}{4} \end{cases} \to X^2-2X+\frac{3}{4}=0 \to X=\begin{cases} \dfrac{3}{2} \\ \dfrac{1}{2} \end{cases} \to x=\sqrt{\frac{3}{2}} \text{ et } y=\sqrt{\frac{1}{2}}$$

Finalement : $\sqrt{\Delta} = \sqrt{\dfrac{1}{2}}\left(\sqrt{\dfrac{3}{2}}+i\sqrt{\dfrac{1}{2}}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{i}{2}$

$$\to \begin{cases} z_3 = 1-\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{i}{2}\right)=\dfrac{1}{2}\left(2-\sqrt{3}-i\right) \\ z_4 = 1+\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{i}{2}\right)=\dfrac{1}{2}\left(2+\sqrt{3}+i\right) \end{cases}$$

$\underline{3)\ t=-\dfrac{1}{2}-i\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$

Il n'est pas nécessaire de faire les calculs. Il suffit de prendre les conjugués de

$$z_3 \text{ et } z_4 \to \begin{cases} z_5 = \dfrac{1}{2}\left(2-\sqrt{3}+i\right) \\ z_6 = \dfrac{1}{2}\left(2+\sqrt{3}-i\right) \end{cases}$$

Résolu le 2 février 2005.