Exercices résolus de mathématiques.

Algèbre

ALG 18

EXALG180 – EXALG189

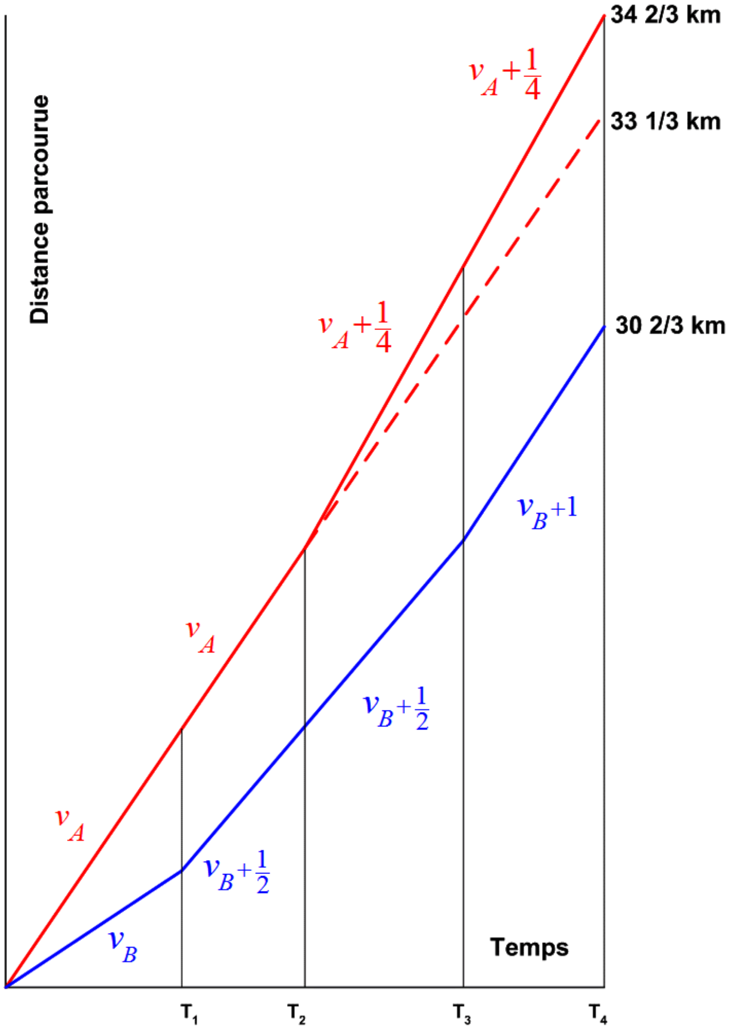
http://www.matheux.c.la

Jacques Collot

Juillet 08

EXALG180 – Louvain, juillet 2004, série 2.

Marc et Julien partent en même temps d'un même point et marchent dans la même direction. Chaque fois que la distance qui les sépare est un nombre pair de kilomètre, Marc augmente sa vitesse de ¼ de km/h et, chaque fois que cette distance est un nombre impair de kilomètre, Julien augmente sa vitesse de ½ km/h.
Quand Marc a 4 km d'avance sur Julien, le chemin qu'il a parcouru surpasse de 1 km 1/3 celui qu'il aurait fait si sa vitesse s'était maintenue uniforme et égale à la vitesse de départ ; de son côté Julien a parcouru, à ce moment une distance de 30 km 2/3.
Déterminer les vitesses de Marc et Julien au départ, notées respectivement v_A et v_B. On notera T_1, T_2, T_3 et T_4 les temps de chaque sous-trajet (au bout de T_1, l'avance de Marc sur Julien atteint un 1 km, ensuite au bout de T_2, elle atteint 2 km, etc..)



La figure résume les données du problème. Soit $\Delta v = v_A - v_B$, on a :

$$\begin{cases} \Delta v.T_1 = 1 & (1) \\ \left(\Delta v - \frac{1}{2}\right)(T_2 - T_1) = 1 & (2) \\ \left(\Delta v - \frac{1}{4}\right)(T_3 - T_2) = 1 & (3) \\ \left(\Delta v - \frac{3}{4}\right)(T_4 - T_3) = 1 & (4) \\ v_A.T_4 = \frac{100}{3} & (5) \\ v_A.T_2 + \left(v_A + \frac{1}{4}\right)(T_4 - T_2) = \frac{104}{3} & (6) \end{cases}$$

$$(6) \to v_A.T_2 + v_A.T_4 + \frac{T_4}{4} - v_A.T_2 - \frac{T_2}{4} = \frac{104}{3}$$

En tenant compte de (5), on a : $\frac{100}{3} + \frac{1}{4}(T_4 - T_2) = \frac{104}{3} \to T_4 - T_2 = \frac{16}{3} \quad (7)$

Transformons (4): $\left(\Delta v - \frac{3}{4}\right)\left[(T_4 - T_2) - (T_3 - T_2)\right] = 1$

Avec (3) et (7), on obtient : $\left(\Delta v - \frac{3}{4}\right)\left(\frac{16}{3} - \frac{1}{\Delta v - \frac{1}{4}}\right) = 1 \to 16\Delta v^2 - 25\Delta v + 9 = 0$

$\to \Delta v = 1 \quad \text{et} \quad \Delta v = 0.5625$

Soit $\Delta v = 1$, on obtient : $T_1 = 1 \to T_2 = 3 \to T_3 = \frac{13}{3} \to T_4 = \frac{25}{3} \to v_A = 4\ km/h \to v_B = 3\ km/h$

$\Delta v = 0.5625$ est à rejeter car on arrive à $T_4 < T_3$

Résolu le 2 février 2005.

EXALG181 – Louvain, septembre 2004.

Trouver les paires des valeurs réelles de x et y qui satisfont au système

$$x^2 + y^2 = 40$$
$$3x+3y=2xy$$

On addtionne les deux équations : $x^2 + y^2 + 2xy = 40 + 3x + 3y$

$$\to (x+y)^2 - 3(x+y) - 40 = 0 \to \begin{cases} x+y=8 \to xy = \dfrac{3}{2}(x+y) = 12 \\ x+y=-5 \to xy = -\dfrac{15}{2} \end{cases}$$

<u>Soit $x+y=8$ et $xy=12$</u>

x et y sont solutions de : $X^2 - 8X + 12 = 0 \to \begin{cases} x=6 \\ y=2 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x=2 \\ y=6 \end{cases}$

<u>Soit $x+y=-5$ et $xy=-\dfrac{15}{2}$</u>

x et y sont solutions de : $X^2 + 8X - \dfrac{15}{2} = 0 \to \begin{cases} x = \dfrac{-5-\sqrt{55}}{2} \\ y = \dfrac{-5+\sqrt{55}}{2} \end{cases}$ ou $\begin{cases} x = \dfrac{-5+\sqrt{55}}{2} \\ y = \dfrac{-5-\sqrt{55}}{2} \end{cases}$

<u>Note</u>

Le système revient à chercher l'intersection d'un cercle de centre O et de rayon $\sqrt{40}$ avec une hyperbole équilatère centrée en $\left(\dfrac{3}{2},\dfrac{3}{2}\right)$. On a bien quatre solutions.

Résolu le 2 février 2005.

EXALG182 – Polytech, UMONS, Mons, juillet 2011.

Soit c, un nombre complexe solution de l'équation suivante :

$$z^2 + \alpha z + 1 = 0$$

où α est une constante. Soit a, la partie réelle de c.

Ecrivez α en fonction de a afin que, sur le plan complexe, c appartienne au cercle de rayon unitaire centré à l'origine.

Soit $c = a + ib$ avec $|\,c\,|^2 = a^2 + b^2 = 1 \qquad (1)$

Si z est une solution de l'équation, alors $c^2 + \alpha c + 1 = 0 \Rightarrow (a + ib)^2 + \alpha(a + ib) + 1 = 0$

$$\rightarrow (a^2 - b^2 + \alpha a + 1) + (2a\alpha + b\alpha)i = 0 \Rightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 + \alpha a + 1 = 0 & (2) \\ 2ab + b\alpha = 0 \Rightarrow b(2a + \alpha) = 0 & (3) \end{cases}$$

On peut supposer $b \neq 0$ sinon c est alors réel et pas complexe comme supposé.

Ce qui implique en vertu de (1) que $a \in \left]-1, 1\right[$

Donc $(3) \Rightarrow \alpha = -2a$

D'autre part (1) et (2) donnent : $2a^2 + \alpha a = 0 \Rightarrow a(2a + \alpha) = 0 \qquad (4)$

On peut supposer $a \neq 0$ sinon c est alors imaginaire pur et pas complexe comme supposé.

Donc $(4) \Rightarrow \alpha = -2a$

Conclusion : $\boxed{\alpha = -2a}$ avec $a \in \left]-1, 1\right[$

Vérification :

Soit donc : $z^2 - 2az + 1 = 0 \Rightarrow c = a \pm \sqrt{a^2 - 1}$

or $c = a + bi \Rightarrow bi = \pm\sqrt{a^2 - 1} \Rightarrow -b^2 = a^2 - 1 \Rightarrow a^2 + b^2 = 1$

Le 26 septembre 2011

EXALG183 – Louvain, septembre 2004.

Donner toutes les racines complexes (y compris, bien entendu, les racines réelles). Sous la forme $a + bi$ de l'équation suivante :

$$x^2+(i-9)x+(20-17i)=0$$

Calculons le Δ de l'équation : $\Delta=(i-9)^2-4(20-17i)=50i$

$\rightarrow \sqrt{\Delta}=\sqrt{50i}=5\sqrt{2}\sqrt{i}$

Or $i=\text{cis}\dfrac{\pi}{2}\rightarrow\sqrt{i}=\text{cis}\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\rightarrow\sqrt{\Delta}=5(1+i)$

Par conséquent : $x=\dfrac{-i+9\pm5(1+i)}{2}\rightarrow\begin{cases}x=2-3i\\x=7+2i\end{cases}$

Résolu le 2 février 2005.

EXALG184 – Louvain, septembre 2004.

Le lavoir municipal est équipé de 3 robinets et d'un bac à remplir. Si l'on n'ouvre simultanément que le premier et le deuxième robinet, le bac du lavoir se remplit en 1h 10 m. Si l'on n'ouvre simultanément que le premier et le troisième robinet, le bac se remplit en 0h 50m. Si l'on ouvre simultanément que le deuxième et le troisième robinet, le bac se remplit en 0h 56m. En combien de temps le bac sera-t-il remplit, si l'on ouvre simultanément les trois robinets.

Soient R_1, R_2, R_3 les débits des trois robinets et R le débit total des trois robinets. Soit aussi V, le volume du bac et le T le temps si les trois robinets sont ouverts.

On a : $\begin{cases} R_1 + R_2 = \dfrac{V}{70} \\ R_1 + R_3 = \dfrac{V}{50} \\ R_2 + R_3 = \dfrac{V}{56} \\ R_1 + R_2 + R_3 = \dfrac{V}{T} \end{cases}$ $\rightarrow$ On fait la somme des trois premières équations

$$\rightarrow 2R_1 + 2R_2 + 2R_3 = V\left(\frac{1}{70} + \frac{1}{50} + \frac{1}{56}\right) \rightarrow T = \frac{V}{\frac{V}{2}\left(\frac{1}{70} + \frac{1}{50} + \frac{1}{56}\right)} = 38.3\ m$$

Résolu le 2 février 2005.

EXALG185 – Liège, septembre 2004.

a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$4z^3+4z+\frac{1}{z}=0$$

Suggestion : on donnera la forme algébrique et la forme trigonométrique de chaque racine.

b) Résoudre dans R l'équation

$$4x^3-6x^2-12x+9=0$$

sachant qu'elle admet une racine négative, ainsi que deux racines positives dont le quotient est $2+\sqrt{3}$.

---

a) $4z^3+4z+\frac{1}{z}=0 \to 4z^4+4z^2+1=0 \to \left(2z^2+1\right)^2=0$

Soit donc : $z^2=-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\operatorname{cis}(\pi+2k\pi) \to z=\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)$

$$\to \begin{cases} z_1=z_2=\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{cis}\frac{\pi}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}i \\ z_3=z_4=\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{cis}\frac{3\pi}{2}=-\frac{\sqrt{2}}{2}i \end{cases}$$

A priori, la méthode serait de considérer les racines x_1, x_2 et x_3, donc de développer $4(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$ et d'identifier avec le polynôme donné compte tenu des conditions données. Cette méthode conduit à des calculs compliqués.

Il est préférable de poser : $\begin{cases} x_2 = a-b \\ x_3 = a+b \end{cases}$ où x_2 et x_3 sont les racines positives.

On a $\begin{cases} x_2 = a-b \\ x_3 = a+b = x_2\left(2+\sqrt{3}\right) = (a-b)\left(2+\sqrt{3}\right) \end{cases}$

Donc $a+b = (a-b)\left(2+\sqrt{3}\right) \to b = \dfrac{\sqrt{3}}{3}a$

D'autre part, le coefficient en x^2est l'opposé de la somme des racines divisé par le coefficient en x^3 (puisque qu'on identifie le polynôme donné à $4(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$)

$$\to -\frac{6}{4} = -(x_1+x_2+x_3) \to 6 = 4(x_1+2a) \to x_1 = \frac{3}{2}-2a$$

En résumé, on arrive à : $\begin{cases} x_1 = \dfrac{3}{2}-2a \\ x_2 = \left(1-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)a \\ x_3 = \left(1+\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)a \end{cases}$

Le coefficient en x du polynôme est égale à : $\dfrac{1}{4}(x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3)$

$$\to \left(\frac{3}{2}-2a\right)\left(1-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)a + \left(1-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)a\left(1+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)a + \left(\frac{3}{2}-2a\right)\left(1+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)a = -3$$

$$\to 10a^2-9a-9=0 \to \begin{cases} a_1 = -\dfrac{1}{2} \text{ A rejeter car } a \text{ doit être positif} \\ a_2 = \dfrac{3}{2} \to b = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

Finalement : $\begin{cases} x_1 = -\dfrac{3}{2} \\ x_2 = \dfrac{3}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ x_3 = \dfrac{3}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

Et on a l'identité :

$$4x^3-6x^2-12x+9 = 4\left(x+\frac{3}{2}\right)\left(x-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(x-\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

Résolu le 5 mars 2005.

EXALG186 – Liège, septembre 2004.

c) Construire un polynôme du troisième degré P_1 tel que

$$\sum_{i=0}^{n} i(i+1) = P_1(n)$$

pour tout entier naturel n.
Justifier le résultat proposé, par exemple par la méthode par récurrence.

d) Généralisation : pour quelles valeurs de k existe-t-il un polynôme du troisième degré P_k tel que

$$\sum_{i=0}^{n} i(i+k) = P_k(n)$$

pour tout naturel n ?
Justifier la réponse.

Soit : $P_1(n) = an^3 + bn^2 + cn + d$

Puisque $\sum_{i=0}^{0} i(i+1) = 0$, on a $d = 0$. Il reste a déterminer a, b et c

$$\begin{cases} P_1(1) = 2 \\ P_1(2) = 8 \\ P_1(3) = 20 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a+b+c=2 \\ 8a+4b+2c=8 \\ 27a+9b+3c=20 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{3} \\ b = 1 \\ c = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Le polynôme serait donc : $P_1(n) = \frac{n^3}{3} + n^2 + \frac{2n}{3} = \frac{n}{3}(n+1)(n+2)$

Démontrons par récurrence que cette formule est valable pour tout n

1) Elle est valable pour $n = 0$, $\quad P_1(0) = 0$

2) Suposons la vraie pour n, démontrons qu'elle est vraie pour $n+1$

$$P_1(n+1) = P_1(n) + (n+1)(n+2) = \frac{n}{3}(n+1)(n+2) + (n+1)(n+2)$$
$$= \frac{n+1}{3}(n+2)(n+3)$$

b) Généralisation. On a de même $P_k(0)=0$ et

$$\begin{cases} P_k(1)=1+k \\ P_k(2)=5+3k \\ P_k(3)=14+6k \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a+b+c=1+k \\ 8a+4b+2c=5+3k \\ 27a+9b+3c=14+6k \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a=\dfrac{1}{3} \\ b=\dfrac{k+1}{2} \\ c=\dfrac{3k+1}{6} \end{cases}$$

$$\rightarrow P_k(n)=\frac{n^3}{3}+\frac{k+1}{2}n^2+\frac{3k+1}{6}n=\frac{n}{6}\left(2n^2+3(k+1)n+3k+1\right)$$
$$=\frac{n}{3}(n+1)\left(n+\frac{3k+1}{2}\right)$$

Si $k=1$, on retrouve $P_1(n)$

Démontrons par récurrence la validité de la formule trouvée

1) $P_k(0)=0$

2) $P_k(n+1)=P_k(n)+(n+1)(n+1+k)=\frac{n}{3}(n+1)\left(n+\frac{3k+1}{2}\right)+(n+1)(n+1+k)$
$$=\frac{n+1}{3}\left(n^2+\frac{3k+7}{2}n+3+3k\right)$$

Si la formule est valable, on peut penser que le deuxième facteur est divisible par $n+2$

En effet, par Horner :
$$\begin{array}{c|ccc} & 1 & \dfrac{3k+7}{2} & 3+3k \\ -2 & & -2 & -3-3k \\ \hline & 1 & \dfrac{3k+3}{2} & 0 \end{array}$$

$$\rightarrow P_k(n+1)=\frac{n+1}{3}(n+2)\left(n+1+\frac{3k+1}{2}\right) \qquad \text{cqfd}$$

Résolu le 5 mars 2005.

EXALG187 – Liège, juillet 2005.

Résoudre et discuter le système suivant, dans lequel a est un paramètre réel :

$$\begin{aligned} a^2x+y-az&=1\\ x-ay+a^2z&=-a\\ -ax+a^2y+z&=a^2 \end{aligned}$$

Ce système admet-il une solution (x, y, z) satisfaisant les conditions additionnelles :

$$\begin{aligned} xy+yz+zx&=-4\\ xyz&=-4 \end{aligned}$$

On justifiera la réponse.

---

1) $\Delta=\begin{vmatrix} a^2 & 1 & -a\\ 1 & -a & a^2\\ -a & a^2 & 1 \end{vmatrix}=-(a+1)^2(a^2-a+1)$

La seule racine réelle est : $a=-1$

Soit $a=-1$

$\rightarrow\begin{cases} x+y+z=1\\ x+y+z=1\\ x+y+z=1 \end{cases}$ Système doublement indéterminé

Soit $a\neq-1$

$\Delta_x=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -a\\ -a & -a & a^2\\ a^2 & a^2 & 1 \end{vmatrix}=0\quad \Delta_y=\begin{vmatrix} a^2 & 1 & -a\\ 1 & -a & a^2\\ -a & a^2 & 1 \end{vmatrix}=\Delta\quad \Delta_z=\begin{vmatrix} a^2 & 1 & 1\\ 1 & -a & -a\\ -a & a^2 & a^2 \end{vmatrix}=0$

Donc $\begin{cases} x=0\\ y=1\\ z=0 \end{cases}$

2) Remarquons que si on additionne les membres des trois équations du système, on obtient $x+y+z=1$ $\left(\text{On peut diviser par } a^2-a+1\right)$

Donc on a $\begin{cases} x+y+z=1 \\ xy+yz+xz=-4 \\ xyz=-4 \end{cases}$. Dès lors, x, y et z peuvent être considérés comme

solutions du polynôme : $X^3-X^2+4X-4=0 \rightarrow \left(X-1\right)\left(X^2+4\right)=0$

$\rightarrow X_1=1$ que l'on peut assimiler à y. Portons donc $y=1$ dans le système

Soit $a \neq -1$

$$\begin{cases} a^2x-az=0 \\ x+a^2z=0 \\ -ax+z=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=0 \\ z=0 \end{cases}$$

et donc il n'y a pas de solution satisfaisant les conditions additionnelles.

Soit $a \neq -1$

$\begin{cases} x+z=0 \\ x+z=0 \\ x+z=0 \end{cases} \rightarrow x=-z$. On a donc $\begin{cases} y=1 \\ x=-z \\ xy+yz+xz=-4 \\ xyz=-4 \end{cases}$

Ce dernier système est satisfait pour : $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \\ z=2 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x=-2 \\ y=1 \\ z=2 \end{cases}$

On a donc bien une solution satisfaisant les conditions additionnelles.

Résolu le 2 août 2005.

EXALG188 – Liège, juillet 2005.

Résoudre l'inéquation

$$\frac{x+\sqrt{3x+10}}{x-\sqrt{3x+10}} \leq \frac{x+1}{x-1}$$

Il convient de procéder avec méthode.
On étudiera d'abord les conditions d'existence. Ensuite, on considérera quatre cas compte tenu que nous avons deux dénominateurs, chaque dénominateur pouvant être positif ou négatif. Cela entraînera des conditions supplémentaires.

<u>Conditions d'existence.</u>

$1) x-1 \neq 0 \rightarrow x \neq 1$

$2) x-\sqrt{3x+10} \neq 0 \rightarrow x \neq \sqrt{3x+10} \rightarrow \begin{cases} x \neq -2 \\ x \neq 5 \end{cases}$

$3) 3x+10 \geq 0 \rightarrow x \geq -\dfrac{10}{3}$

$\underline{1\text{er cas}} : \begin{cases} x-\sqrt{3x+10} > 0 \\ x-1 > 0 \rightarrow x > 1 \end{cases}$

Etudions de plus près : $x-\sqrt{3x+10} > 0 \rightarrow x > \sqrt{3x+10} \quad (1)$.

Si $x < 0$, l'inégalité (1) est vérifiée, mais comme on doit aussi avoir $x > 1$, cette situation ne se présente pas ici.

Soit $x > 0$, $(1) \rightarrow x^2 > 3x+10 \rightarrow x^2-3x-10 > 0$. Le trinôme ayant -2 et 5 comme racines, on en déduit que $x > 5$.

En résumé, pour le premier cas, on doit donc avoir $x > 5$

On peut maintenant remettre l'inéquation de départ aux mêmes dénominateurs.

Le signe de l'inégalité de changera pas.

$\rightarrow (x-1)\left(x+\sqrt{3x+10}\right) \leq (x+1)\left(x-\sqrt{3x+10}\right)$

$\rightarrow x\sqrt{3x+10} \leq x \quad (2)$

On peut simplifier par x puisque $x > 5$

$\rightarrow \sqrt{3x+10} \leq 1 \rightarrow x \leq -3$ Cette solution doit être rejetée.

Il n'y a donc pas de solution acceptable dans le premier cas.

$\underline{\text{2ème cas}}: \begin{cases} x-\sqrt{3x+10}<0 \\ x-1<0 \rightarrow x<1 \end{cases}$

Etudions $x-\sqrt{3x+10}<0 \rightarrow x<\sqrt{3x+10} \quad (3)$

Si $x<0$, l'inéquation (3) est vérifiée.

Si $x>0$, $(3) \rightarrow x^2<3x+10 \rightarrow x^2-3x-10<0 \rightarrow x<5$

En résumé, cela nous donne $x<1$

Nous pouvons maintenant développer l'inéquation donnée. On aboutit à la même inéquation $(2): x\sqrt{3x+10} \leq x \quad (4)$

- Soit $x=0$, l'inéquation (4) est vérifiée.
- Soit $x>0$, divisons (4) par $x \rightarrow \sqrt{3x+10} \leq 1 \rightarrow x \leq -3$ qui est à rejeter.
- Soit $x<0$, division (4) par $x \rightarrow \sqrt{3x+10} \geq 1 \rightarrow x \geq -3$ qui est acceptable

Conclusion, le deuxième cas aboutit à la solution : $-3 \leq x \leq 0$

$\underline{\text{3ème cas}}: \begin{cases} x-\sqrt{3x+10}>0 \\ x-1<0 \rightarrow x<1 \end{cases}$

On a vu que : $x-\sqrt{3x+10}>0$ entraîne $x>5$.

Les conditions sont contradictoires.

Il n'y a donc pas de solution acceptable dans le 3ème cas.

$\underline{\text{4ème cas}}: \begin{cases} x-\sqrt{3x+10}<0 \\ x-1>0 \rightarrow x>1 \end{cases}$

On a vu que : $x-\sqrt{3x+10}<0$ entraîne $x<5$. Il faudra donc avoir : $1<x<5$

L'inéquation de départ aboutit à : $\sqrt{3x+10} \geq 1 \rightarrow x \geq -3$

La solution acceptable dans le quatrième cas est donc : $1<x<5$

<u>Conclusion</u>

Les solutions sont : $\boxed{-3 \leq x \leq 0 \text{ et } 1<x<5}$

Résolu le 2 août 2005.

EXALG189 – Mons, juillet 2003.

Soit le polynôme

$$P(x)=x^4-6x^3+mx^2+42x+40$$

1. On demande de déterminer m (réel sachant que la somme des deux racines de $P(x)$ est égale à la somme des deux autres racines.
2. On demande de déterminer toutes les racines du polynôme après avoir remplacé m par la valeur trouvée.

Soient x_1,x_2,x_3,x_4 les quatres racines

On a donc les relations, soit par hypothèse, soit compe tenu des coefficients du polynôme

$$\begin{cases} x_1+x_2=x_3+x_4 & (1) \\ x_1+x_2+x_3+x_4=6 & (2) \\ x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4=m & (3) \\ x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+x_1x_3x_4+x_2x_3x_4=-42 & (4) \\ x_1x_2x_3x_4=40 & (5) \end{cases}$$

De (1) et (2), on tire $x_1+x_2=x_3+x_4=3$

$\rightarrow (x_1+x_2)(x_3+x_4)=x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4=9 \qquad (6)$

Grâce à (6), on remplace dans $(3)\rightarrow x_1x_2+x_3x_4=m-9 \qquad (7)$

D'autres parts on peut réécrire (4) sous la forme :

$x_1x_2(x_3+x_4)+x_3x_4(x_1+x_2)=-42\rightarrow x_1x_2+x_3x_4=-14 \qquad (8)$

En comparant (7) et (8), on déduit : $m-9=-14\rightarrow \boxed{m=-5}$

On remplace dans l'équation de départ. Nous pouvons utiliser Horner.

Il est facile de voir que $(x+1)$ et $(x+2)$sont des diviseurs du polynôme.

$\left(\text{En effet, } -1 \text{ et -2 sont des diviseurs de 40, et } P(-1)=0,\ P(-2)=0\right)$

	4	3	2	1	0
	1	-6	-5	42	40
-1		-1	7	-2	-40
	1	-7	2	40	0
-2		-2	18	-40	
	1	-9	20	0	

$\rightarrow P(x)=(x+1)(x+2)(x^2-9x+20)$

Le troisième facteur donne $x^2-9x+20=(x-4)(x-5)$

Les racines sont donc : $\boxed{-2,-1,4,5}$

Autre méthode

Voici juste pour le plaisir une approche tout à fait différente.

On peut raisonnablement supposer que $P(x)$=0 est une équation diophantienne, c'est-à-dire une équation à coefficients entiers et dont les racines sont des entiers. (C'est souvent le cas dans ce genre de question).

Les racines de $P(x)$ sont donc à trouver parmi les diviseurs de 40, soit

$\{-40,-20,-10,-8,-5,-4,-2,-1,1,2,4,5,8,10,20,40\}$

Il est assez facile de trouver parmi toutes ces entiers les couples dont la somme vaut 3

Ce sont les combinaisons suivantes : $\{(1,2),(-1,4),(-2,5),(-5,8)\}$

Nous savons que le produit des racines vaut 40. Construisons donc un tableau représentant le produit des racines.

	$(1,2)$	$(-1,4)$	$(-2,5)$	$(-5,8)$	
$(1,2)$	4	-8	-20	-80	
$(-1,4)$	-8	16	40	160	$\rightarrow$ La combinaison $(-2,-1,4,5)$
$(-2,5)$	-20	40	100	400	
$(-5,8)$	-80	160	400	1600	

On vérifie que la somme des triples produits vaut -42

$4.(-1).5+4.1.(-2)+4.5.(-2)+5.(-1).(-2)=-42 \quad OK$

Et la somme des doubles produits nous donne m

$-2.(-1)+(-2).4+(-2).5+(-1).4+(-1).5+4.5=-5$

Résolu le 2 août 2005.