Exercices résolus de mathématiques.

Algèbre

ALG 19

EXALG190 – EXALG199

http://www.matheux.be.tf

Jacques Collot

Juillet 08

EXALG190 – Mons, juillet 2003.

Discuter et résoudre le système suivant

$$\begin{cases} x + my + 2mz = 1 \\ x + (1-m)y + (2-2m)z = 0 \\ 2mx + (2m+1)y + (2m^2+m)z = m \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & m & 2m \\ 1 & 1-m & 2(1-m) \\ 2m & 2m+1 & m(2m+1) \end{vmatrix} = (m-2)(1-2m)(1+2m)$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & m & 2m \\ 0 & 1-m & 2-2m \\ m & 2m+1 & 2m^2+m \end{vmatrix} = (1-m)(m-2)(1+2m)$$

$$\Delta_Y = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2m \\ 1 & 0 & 2-2m \\ 2m & m & 2m^2+m \end{vmatrix} = -m(2m-1)$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & m & 1 \\ 1 & 1-m & 0 \\ 2m & 2m+1 & m \end{vmatrix} = m+1$$

$\underline{m=2}$: Le système devient : $\begin{cases} x+2y+4z=1 \\ x-y-2z=0 \\ 4x+5y+10z=2 \end{cases}$ Impossible

$\underline{m=\frac{1}{2}}$: Le système devient : $\begin{cases} x+\frac{y}{2}+z=1 \\ x+\frac{y}{2}+z=0 \\ x+2y+z=\frac{1}{2} \end{cases}$ Impossible

$\underline{m=-\frac{1}{2}}$: Le système devient : $\begin{cases} x-\frac{y}{2}-z=1 \\ x+\frac{3y}{2}+3z=0 \\ -x=-\frac{1}{2} \end{cases}$ Impossible

Dans les autres cas : $x=\dfrac{1-m}{1-2m}$; $y=\dfrac{m}{(m-2)(1+2m)}$; $z=\dfrac{m+1}{(m-2)(1-2m)(1+2m)}$

Résolu le 15 août 2005.

EXALG191 – Mons, juillet 2003.

Soit l'inéquation

$$\log_4 2^{x-4} + \log_3 \left(a - 2^x\right)^{\log_4 3} < 1$$

1. Montrer que l'expression ci-dessus peut se mettre sous la forme d'une inéquation du second degré.
2. Déterminer l'ensemble des solutions pour x en fonction du paramètre réel a.

$CE : a - 2^x > 0 \rightarrow a > 0 \rightarrow x < \dfrac{\ln a}{\ln 2}$

Transformons l'inéquation :

$$\log_4 2^{x-4} + \log_3 \left(a - 2^x\right)^{\log_4 3} < 1 \rightarrow \log_4 2^{x-4} + \log_4 3 \frac{\log_4\left(a - 2^x\right)}{\log_4 3} < 1$$

$$\rightarrow \log_4 2^{x-4}\left(a - 2^x\right) < 1 \rightarrow 2^{x-4}\left(a - 2^x\right) < 4 \rightarrow 2^{2x} - a.2^x + 2^6 > 0 \quad (1)$$

Ce qui est bien une inéquation du second degré. Résolvons l'équation :

<u>1) $\Delta = a^2 - 2^8 > 0$</u> $\rightarrow \begin{cases} a < -2^4 & \text{à rejeter} \\ a > 2^4 = 16 & \text{Dans ce cas nous aurons deux solutions.} \end{cases}$

$$\rightarrow 2^x = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 16}}{2} \rightarrow x = \frac{\ln\left(a \pm \sqrt{a^2 - 16}\right)}{\ln 2} - 1$$

Donc pour notre inéquation : $\begin{cases} x < \dfrac{\ln\left(a - \sqrt{a^2 - 16}\right)}{\ln 2} - 1 \\ x > \dfrac{\ln\left(a + \sqrt{a^2 - 16}\right)}{\ln 2} - 1 \end{cases}$

Nous devons maintenant faire quelques vérifications puisque $x < \dfrac{\ln a}{\ln 2}$

$$\frac{\ln\left(a + \sqrt{a^2 - 16}\right)}{\ln 2} - 1 < \frac{\ln a}{\ln 2} \rightarrow \frac{a + \sqrt{a^2 - 16}}{2} < a \rightarrow a^2 - 16 < a^2 \text{ toujours vérifié.}$$

<u>2) $\Delta = a^2 - 2^8 = 0$</u> $\rightarrow a = 16$ Dans ce cas l'inéquation (1) est toujours vérifiée sauf $x = \dfrac{\ln a}{\ln 2} - 1 = 3$

<u>3) $\Delta = a^2 - 2^8 < 0$</u> $\rightarrow a < 16$ $\left(\text{En réalité } \ 0 < a < 16\right)$

Dans ce cas l'inéquation (1) est toujours vérifiée pour $x < \dfrac{\ln a}{\ln 2}$

Conclusions

$a \le 0$	Pas de solutions
$0 < a < 16$	$x < \dfrac{\ln a}{\ln 2}$
$a = 16$	$\begin{cases} x < 2 \\ 2 < x < 3 \end{cases}$
$a > 16$	$\begin{cases} x < \dfrac{\ln\left(a - \sqrt{a^2 - 16}\right)}{\ln 2} - 1 \\ \dfrac{\ln\left(a + \sqrt{a^2 - 16}\right)}{\ln 2} - 1 < x < \dfrac{\ln a}{\ln 2} \end{cases}$

Résolu le 8 août 2005.

EXALG192 – Mons, juillet 2003.

Résoudre

$$x^4 - 2x^3 + 14x^2 - 18x + 45 = 0$$

Sachant que 1 - 2*i* est une racine

Si $1-2i$ est une racine alors $1+2i$ est aussi une racine, et le polynôme est divisible par $(x-1+2i)(x-1-2i) = x^2-2x+5$

Effectuons la divisions:

$$\begin{array}{ccccc|c}
4 & 3 & 2 & 1 & 0 & x^2-2x+5 \\
\hline
1 & -2 & 14 & -18 & 45 & x^2 \\
\underline{1} & \underline{-2} & \underline{5} & & & +9 \\
0 & 0 & 9 & & & \\
 & & \underline{9} & \underline{18} & \underline{45} & \\
 & & 0 & 0 & 0 &
\end{array}$$

$\rightarrow P(x) = (x^2-2x+5)(x^2+9)$

Ce qui nous donne comme racines : $1+2i,\ 1-2i,\ 3i,\ -3i$

Résolu le 15 août 2005.

EXALG193 – Mons, juillet 2003.

Deux automobilistes se déplacent d'une ville *A* à une ville *B* éloignée d'une distance *d*. Le premier roule plus vite que le second. On suppose leur vitesse constante tout au long du trajet. La différence de vitesse est de 10 km/h et le second accuse un retard *R* à l'arrivée.
Si maintenant les deux automobilistes augmentent leur vitesse d'une constante *a*, le retard est réduit de moitié.
1 Déterminer une expression (la plus réduite possible) de la vitesse initiale du premier automobiliste et la distance entre les deux villes.
2. Vérifier votre résultat avec *R* = 10 h et *a* = 10 km/h

Soit *A* le premier et *B* le second. On a :

$$\begin{cases} t_A = \dfrac{d}{v_A} \\ t_B = \dfrac{d}{v_B} \\ R = t_B - t_A \\ v_A - v_B = 10 \end{cases} \quad \text{et après l'augmentation de vitesse} \quad \begin{cases} t'_A = \dfrac{d}{v'_A} = \dfrac{d}{v_A + a} \\ t'_B = \dfrac{d}{v'_B} = \dfrac{d}{v_B + a} \\ R' = t'_B - t'_A = \dfrac{R}{2} \\ v'_A - v'_B = 10 \end{cases}$$

Combinons les équations :

$$R = t_B - t_A = \frac{d}{v_B} - \frac{d}{v_A} = d\,\frac{v_A - v_B}{v_A v_B} = \frac{10d}{v_A v_B}$$

$$R' = t'_B - t'_A = \frac{R}{2} = \frac{d}{v_B + a} - \frac{d}{v_A + a} = \frac{10d}{(v_A + a)(v_B + a)}$$

$$\rightarrow \frac{1}{v_A v_B} = \frac{2}{(v_A + a)(v_B + a)} \rightarrow v_A v_B - a v_A - a v_B - a^2 = 0$$

$$\rightarrow v_A(v_A - 10) - a v_A - a(v_A - 10) - a^2 = 0 \rightarrow v_A{}^2 - 2(5 + a)v_A + 10a - a^2 = 0$$

$$\rightarrow v_A = 5 + a + \sqrt{25 + 2a^2} \quad \text{et} \quad d = \frac{R}{10}(v_A - 10)v_A$$

Nous pouvons éliminer la racine $5 + a - \sqrt{25 + 2a^2}$ car elle correspond à des vitesses trop faibles ou négatives.

Appliquons pour $R = 10$ et $a = 10 \rightarrow v_A = 30\,km/h$ et $d = 600\ km$

Résolu le 15 août 2005. Modifié le 9 septembre (Pierre Bernimont)

EXALG194 – Mons, juillet 2003.

Soit le polynôme :

$$P(x)=x^5+a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$$

Déterminer tous les coefficients *a* de *P* (*x*) soit divisible par sa dérivée première

---

La dérivée première est : $P'(x)=5x^4+4a_4x^3+3a_3x^2+2a_2x+a_1$

Effectuons la division :

$$\begin{array}{ccccccc|c}
5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & & P'(x) \\
\hline
1 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & & \frac{1}{5}x \\
1 & \frac{4a_4}{5} & \frac{3a_3}{5} & \frac{2a_2}{5} & \frac{a_1}{5} & & & \frac{a_4}{25} \\
0 & \frac{a_4}{5} & \frac{2a_3}{5} & \frac{3a_2}{5} & \frac{4a_1}{5} & & & \\
 & \frac{a_4}{5} & \frac{4a_4^{\ 2}}{25} & \frac{3a_3a_4}{25} & \frac{2a_2a_4}{25} & \frac{a_1a_4}{25} & & \\
 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & &
\end{array}$$

Ce qui nous conduit au système suivant :

$$\begin{cases}
\frac{2a_3}{5}=\frac{4a_4^{\ 2}}{25} \\
\frac{3a_2}{5}=\frac{3a_3a_4}{25} \\
\frac{4a_1}{5}=\frac{2a_2a_4}{25} \\
a_0=\frac{a_1a_4}{25}
\end{cases}
\rightarrow
\begin{cases}
a_3=\frac{2}{5}a_4^{\ 2} \\
a_2=\frac{a_3a_4}{5}=\frac{2}{25}a_4^{\ 3} \\
a_1=\frac{a_2a_4}{10}=\frac{1}{125}a_4^{\ 4} \\
a_0=\frac{1}{3125}a_4^{\ 5}
\end{cases}$$

Donc en posant : $a_4=a$

$$\rightarrow \boxed{P(x)=x^5+ax^4+\frac{2}{5}a^2x^3+\frac{2}{25}a^3x^2+\frac{1}{125}a^4x+\frac{1}{3125}a^5}$$

Résolu le 15 août 2005.

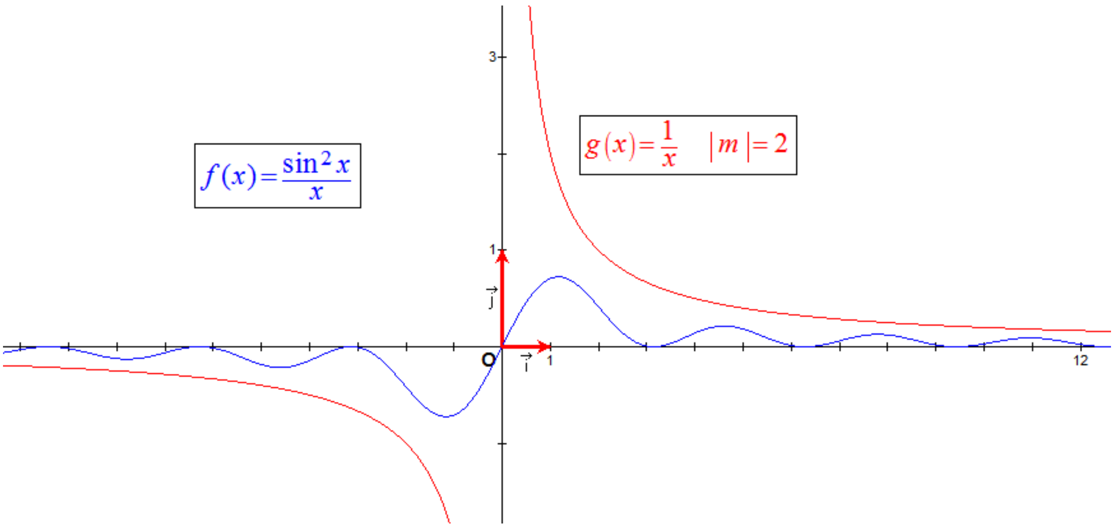
EXALG195 – Mons, juillet 2003.

On demande de discuter des solutions de l'inéquation suivante, en fonction du paramètre m

$$\frac{\sin^2 x}{x} > \frac{m^2}{x}$$

Soit $|m| > 1$

- $x > 0 \rightarrow$ On peut simplifier par x sans changer l'inégalité qui devient :
  $\sin^2 x > m^2$ Cette inégalité n'est jamais vérifiée.
- $x < 0 \rightarrow$ On peut simplifier par x mais en changeant le sens de l'ingalité.
  $\sin^2 x < m^2$ Cette ingalité est toujours vérifiée.



Soit $|m| = 1$

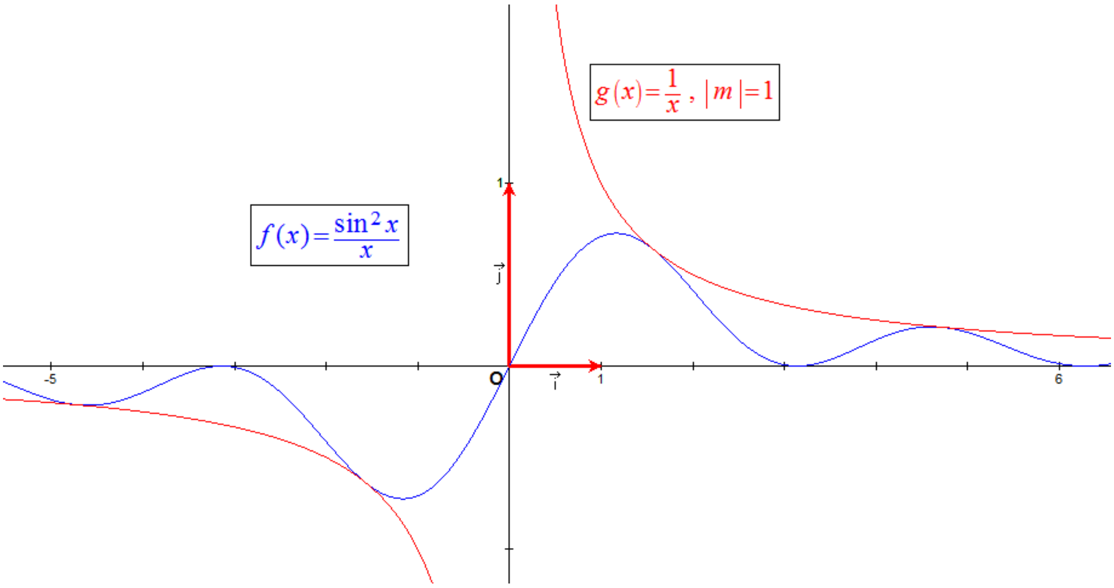
- $m = 1 \quad \rightarrow \quad$ Résolvons l'équation $\sin^2 x = 1 \rightarrow \sin^2 x - 1 = 0 \rightarrow (\sin x - 1)(\sin x + 1) = 0$

$\rightarrow \sin x = 1 \rightarrow x = k\frac{\pi}{2}$.

Par conséquent :

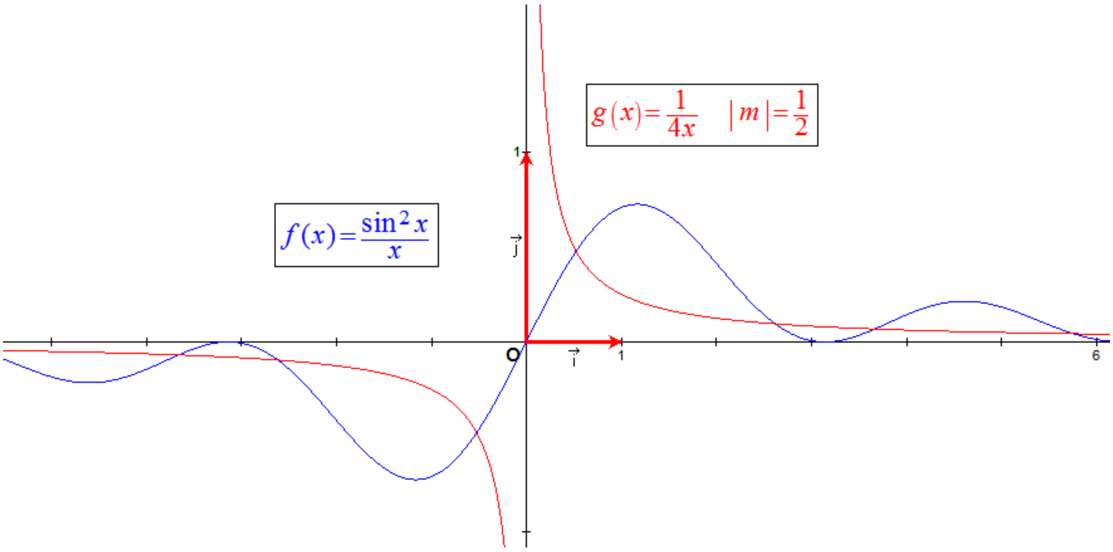
1) $x > 0$: l'inéquation n'est jamais vérifiée.

2) $x < 0$: l'inéquation est toujours vérfiée sauf pour $x = k\frac{\pi}{2}$



Soit $|m|<1$

- $x>0 \to$ L'inéquation sera vérifiée $\arcsin m + k\pi < x < \pi - \arcsin m + k\pi$
- $x<0 \to$ L'inéquation sera vérfiée pour $-\arcsin m + k\pi < x < \arcsin m + k\pi$



Résolu le 15 août 2005. Modifié le 28 mai 2006

EXALG196 – Mons, juillet 2003.

Soit l'équation :

$$2x^4+3x^3+Cx^2+3x+2=0$$

1. Montrer que cette expression peut se mettre sous la forme d'une équation du second degré en appliquant le changement de variable suivant : $y=x+\frac{1}{x}$
2. résoudre l'équation pour $C = 41/8$

---

1) Il suffit de diviser par x^2

$$2x^4+3x^3+Cx^2+3x+2=0 \to 2x^2+3x+C+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}=0$$

$$\to 2\left(x^2+2+\frac{1}{x^2}\right)+3\left(x+\frac{1}{x}\right)+C-4=0 \to 2\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+3\left(x+\frac{1}{x}\right)+C-4=0$$

Si $y=x+\frac{1}{x} \to 2y^2+y+C-4=0$

2) $C=\frac{41}{8} \to 2y^2+y+\frac{41}{8}-4=0 \to 16y^2+24y+9=0 \to 16\left(y+\frac{3}{4}\right)^2=0 \to y=-\frac{3}{4}$

Donc : $y=x+\frac{1}{x} \to x^2-xy+1=0 \to x=\frac{y\pm\sqrt{y^2-4}}{2} \to \begin{cases} x_1=-\frac{3-\sqrt{55}i}{8} \\ x_2=-\frac{3+\sqrt{55}i}{8} \end{cases}$

Résolu le 15 août 2005.

EXALG197 – Mons, juillet 2003.

Pour quelles valeurs de paramètre réel m l'équation admet-elle toujours au moins une solution ?

$$\cos x + \cos\frac{x}{2} = m$$

$\cos x + \cos\frac{x}{2} = m \to 2\cos^2\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2} - 1 - m = 0$

Pour que cette équation admette toujours au moins une solution il suffit que :

$\Delta = 1 + 4.2(1+m) = 9 + 8m \geq 0 \to m \geq -\frac{9}{8}$

Résolu le 15 août 2005.

EXALG198 – POLYTECH, UMons, Mons, juillet 2003.
EPB, ULB, Bruxelles, septembre 2019.

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$\left(\frac{z-2i}{z+2i}\right)^3+\left(\frac{z-2i}{z+2i}\right)^2+\left(\frac{z-2i}{z+2i}\right)+1=0$$

$$\text{Posons } t=\left(\frac{z-2i}{z+2i}\right)\to t^3+t^2+t+1=0\to(t+1)(t^2+1)=0$$

$$\underline{1)\ t=-1}\to\frac{z-2i}{z+2i}=-1\ \to z-2i=-z-2i\ \to z=0$$

$$\underline{2)\ t=i}\ \to\frac{z-2i}{z+2i}=i\quad\to z-2i=iz-2\quad\to(1-i)z=2(i-1)\to z=-2$$

$$\underline{3)\ t=-i}\ \to\frac{z-2i}{z+2i}=-i\quad\to z-2i=-iz+2\to(1+i)z=2(i+1)\to z=2$$

Le 7 novembre 2019

EXALG199 – POLYTECH, UMons, Mons, juillet 2005.

Déterminer m tel que l'inégalité soit vérifiée quelle que soit la valeur de $x \in \mathbb{R}$

$$(m+1)x^2 < (m-1)(2x-3)$$

$(m+1)x^2 < (m-1)(2x-3) \rightarrow (m+1)x^2 - 2(m-1)x - 3(m-1) < 0$

Il faut que le coefficient en x^2 soit toujours négatif $\rightarrow m < -1$

D'autre part, le coefficient de x étant pair, on calcule Δ'

$\Delta' = (m-1)^2 - 3(m-1)(m+1) = -2m^2 - 2m + 4 = -2(m+2)(m-1)$

Δ' doit toujours être négatif $\rightarrow \begin{cases} m < -2 \\ m > 1 \quad \text{à rejeter} \end{cases}$

Conclusion : $m < -2$

Résolu le 15 août 2005.