Exercices résolus de mathématiques.

Algèbre

ALG 2

EXALG020 – EXALG029

http://www.matheux.c.la

Jacques Collot

1 avril 03

EXALG020 – Mons, questions-types, 2000-2001.

Déterminer la relation liant les paramètres a et b pour que les valeurs (x, y, z) des solutions du système paramétrique suivant soient en progression géométrique.

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ ax+y+z=0 \\ x+y+bz=0 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & b \end{vmatrix} = a(1-b)$$

$$x = \frac{1}{a(1-b)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & b \end{vmatrix} = -\frac{1}{a}$$

$$y = \frac{1}{a(1-b)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & 0 & 1 \\ 1 & 0 & b \end{vmatrix} = -\frac{ab-1}{a(1-b)}$$

$$z = \frac{1}{a(1-b)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \frac{a-1}{a(1-b)}$$

Soit les trois solutions $x, y = rx, z = r^2x$. *On a :*

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{a} \\ rx = -\frac{ab-1}{a(1-b)} \\ r^2x = \frac{a-1}{a(1-b)} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} r = \frac{ab-1}{1-b} \\ r^2 = \frac{1-a}{1-b} \end{cases} \rightarrow \left(\frac{ab-1}{1-b}\right)^2 = \frac{1-a}{1-b}$$

$$\rightarrow \quad (ab-1)^2 = (1-a)(1-b) \quad \textit{avec}\ a \neq 0 \ \textit{ et } \ b \neq 1$$

Résolu le 19 mars 2003

EXALG021 – FSA, ULB, Bruxelles, septembre 1992.

Résoudre

$$\begin{cases} 2xy - y^2 - 5y = 0 \\ y = x^2 - 4x + 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y(2x - y - 5) = 0 \\ y = x^2 - 4x + 3 \end{cases}$$

1) $y = 0 \quad \rightarrow \quad (x-3)(x-1) = 0 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x = 3 \\ x = 1 \end{cases}$

2) $y \neq 0 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} 2x - y - 5 = 0 \\ y = x^2 - 4x + 3 \end{cases} \quad \rightarrow \quad 2x - x^2 + 4x - 3 - 5 = 0$

$$x^2 - 6x + 8 = 0 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x = 4 & \rightarrow \quad y = 3 \\ x = 2 & \rightarrow \quad y = -1 \end{cases}$$

Résolu le 19 mars 2003

EXALG022 – FACSA, ULG, Liège, septembre 2000.

Résoudre

$$\sqrt{\frac{6x-11}{3x-2}} \leq \frac{1}{x}$$

$CE:\quad * \, x \neq 0$

$\qquad * \, x \neq \dfrac{2}{3}$

$\qquad * \, \dfrac{6x-11}{3x-2} \geq 0 \quad \rightarrow \quad x < \dfrac{2}{2} \quad x \geq \dfrac{11}{6}$

$A)$ si $x < 0$ Jamais vérifié.

B) si $x > 0$ $\dfrac{6x-11}{3x-2} \leq \dfrac{1}{x^2} \quad \rightarrow \quad \dfrac{6x-11}{3x-2} - \dfrac{1}{x^2} \leq 0 \quad \rightarrow \quad \dfrac{6x^3-11x^2-3x+2}{x^2(3x-2)} \leq 0$

On décompose par Honer (car le dénominateur $=$ 0 pour $x = 2$),
et on résoud le trinôme du second degré.

$\rightarrow \quad \dfrac{(x-2)(2x+1)(3x+2)}{x^2(3x-2)} \leq 0$

Tableau des signes :

		$-\frac{1}{2}$		0		$\frac{1}{3}$		$\frac{2}{3}$		$\frac{11}{6}$		2	
x^2	+	+	+	0	+	+	+	+	+	+	+	+	+
$3x-2$	−	−	−	−	−	−	−	0	+	+	+	+	+
$x-2$	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	0	+
$2x+1$	−	0	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
$3x-1$	−	−	−	−	−	0	+	+	+	+	+	+	+
	+	0	−	∴	−	0	+	∴	−	−	−	0	+

Compte tenu des CE, on en déduit : $0 < x \leq \dfrac{1}{3}$ *et* $\dfrac{11}{6} \leq x \leq 2$

Résolu le 19 mars 2003, Modifié le 27 mai 2006

EXALG023 – FACSA, ULG, Liège, juillet 1999.

Résoudre

$$\frac{1}{1+x} < \frac{1}{|1+x|}$$

$CE: x \neq 1 \quad x \neq -1$

$A) \;\; x < -1$ toujours vérifié.

B) $x > -1 \rightarrow \dfrac{1}{1-x} < \dfrac{1}{1+x} \rightarrow \dfrac{2x}{(1-x)(1+x)} < 0$

Tableau des signes :

$$\begin{array}{cccccccc}
 & & -1 & & 0 & & 1 & \\
x & - & - & - & 0 & + & + & + \\
1-x & + & + & + & + & + & 0 & - \\
1+x & - & 0 & + & + & + & + & + \\
 & + & \therefore & - & 0 & + & \therefore & -
\end{array} \rightarrow -1 < x < 0 \;\; et \;\; x > 1$$

Note : Les valeurs $<$-1 ne doivent pas être considérées.

Conclusion : $x < 0$ et $x > 1$ avec $x \neq -1$

Résolu le 19 mars 2003

EXALG024 – FACSA, ULG, Liège, juillet 2000.

Résoudre

$$\frac{1}{x^2-4x+3}\leq\frac{2}{x^2-4x+4}$$

$$\frac{1}{(x-3)(x-1)}\leq\frac{2}{(x-2)^2}$$

$CE: x\neq 1 \quad x\neq 2 \quad x\neq 3$

$$\frac{(x-2)^2-2(x-3)(x-1)}{(x-1)(x-2)^2(x-3)}=\frac{-x^2+4x-2}{(x-1)(x-2)^2(x-3)}\leq 0$$

$$\frac{(x-(2+\sqrt{2}))(x-(2-\sqrt{2}))}{(x-1)(x-2)^2(x-3)}\geq 0$$

Tableau des signes :

		$2-\sqrt{2}$		1		2		3		$2+\sqrt{2}$	
$x-(2+\sqrt{2})$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$x-(2-\sqrt{2})$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$(x-2)^2$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x-3$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
	$+$	0	$-$	$\therefore$	$+$	$\therefore$	$+$	$\therefore$	$-$	0	$+$

Conclusions: $x\leq 2-\sqrt{2} \quad 1<x<2 \quad 2<x<3 \quad x\geq 2+\sqrt{2}$

ou bien : $\{\leftarrow,\ 2-\sqrt{2}\,]\} \cup \{\ ]1,2[\ \} \cup \{\ ]2,3[\ \} \cup \{\ 2+\sqrt{2}\,], \rightarrow\}$

EXALG025 – FACSA, ULG, Liège, juillet 2000.

Résoudre

$$\frac{1}{x} \leq \frac{1}{\sqrt{2-x}}$$

$CE : x < 2$

1) si $x < 0$ toujours vérifié.

2) si $x > 0$ donc $0 < x < 2$

Elevons au carré :

$$\frac{1}{x^2} \leq \frac{1}{2-x} \rightarrow \frac{2-x-x^2}{x^2\left(2-x\right)} \leq 0 \rightarrow -\frac{\left(x+2\right)\left(x-1\right)}{x^2\left(2-x\right)\right)} \leq 0$$

		-2		0		1		2	
$-\left(x+2\right)$	+	0	–	–	–	–	–	–	–
$x-1$	–	–	–	–	–	0	+	+	+
x^2	+	+	+	0	+	+	+	+	+
$2-x$	+	+	+	+	+	+	+	0	–
	–	0	+	∴	+	0	–	∴	–

Compte tenu des CE :

$\rightarrow \quad x < 0 \quad$ et $\quad 1 \leq x < 2 \quad$ ou $\quad \left\{ \leftarrow ; 0 \left[\right. \right\} \cup \left\{ \left[1 ; \rightarrow \right\} \right.$

EXALG026 – **FACSA, ULG, Liège, septembre 1998.**

Résoudre

$$\left(\frac{3-2x}{x-1}\right)^2 \leq \left(\frac{6-5x}{x+2}\right)^2$$

$CE: x \neq 1 \quad x \neq -2$

$$\left(\frac{3-2x}{x-1}\right)^2 - \left(\frac{6-5x}{x+2}\right)^2 = \left(\frac{3-2x}{x-1} - \frac{6-5x}{x+2}\right)\left(\frac{3-2x}{x-1} + \frac{6-5x}{x+2}\right) \leq 0$$

$$\frac{3\,x\,(x-2)^2\,(10-7x)}{(x-1)^2\,(x+2)^2} \leq 0$$

Tableau des signes :

		-2		0		1		$\frac{10}{7}$		2	
$(x-2)^2$	+	+	+	+	+	+	+	+	+	0	+
x	−	−	−	0	+	+	+	+	+	+	+
$10-7x$	+	+	+	+	+	+	+	0	−	−	−
$(x-1)^2$	+	+	+	+	+	0	+	+	+	+	+
$(x+2)^2$	+	0	+	+	+	+	+	+	+	+	+
	−	$\therefore$	−	0	+	$\therefore$	+	0	−	0	−

Conclusions : $\quad x < -2 < x \leq 0 \quad$ et $\quad x \geq \dfrac{10}{7}$

EXALG027 – FACSA, ULG, Liège, septembre 1997.

Résoudre

$$\frac{\sqrt{x^3-2x^2+x}}{2-x} \le \frac{1}{\sqrt{x}}$$

CE :

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ x>0 \\ 2)\ x^3-2x^2+x = x(x-1)^2 \ge 0 \rightarrow x \ge 0 \\ 3)\ x \ne 2 \end{array}\right\} \rightarrow x \in \mathbb{R}_0 \setminus \{2\}$$

$$\frac{\sqrt{x(x-1)^2}}{2-x} \le \frac{1}{\sqrt{x}} \quad \rightarrow \frac{x-1}{2-x}\sqrt{x} \le \frac{1}{\sqrt{x}}$$

On peut multiplier les deux membres par $\sqrt{x}$ car $\sqrt{x}>0$

$$\rightarrow \frac{x(x-1)}{2-x} - 1 \le 0 \rightarrow \frac{x^2-2}{2-x} \le 0$$

Tableau des signes :

		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		2	
x^2-2	+	0	−	−	−	0	+	+	+
$2-x$	+	+	+	+	+	+	+	0	−
$\frac{x^2-2}{2-x}$	+	0	−	−	−	0	+	/	−

Conclusion : $\boxed{x \in \left[\, 0; \sqrt{2} \,\right[\cup \left]2; \rightarrow\right.}$

EXALG028 – FACSA, ULG, Liège, juillet 1996.

Résoudre

$$\frac{x-2}{\sqrt{x^2-5x+6}} \leq \frac{\sqrt{x^2-3x+2}}{x-4}$$

$$\frac{x-2}{\sqrt{(x-3)(x-2)}} \leq \frac{\sqrt{(x-1)(x-2)}}{x-4}$$

CE:

$A)\ x<2 \quad x>3$

$B)\ x\leq 1 \quad x\geq 2$

$C)\ x\neq 4$

$\rightarrow \quad x\leq 1$ et $x>3$ avec $x\neq 4$

1) Soit $x>4$

$$\rightarrow \quad \frac{(x-2)^2}{(x-3)(x-2)} \leq \frac{(x-1)(x-2)}{(x-4)^2}$$

$$\rightarrow \quad \frac{(x-2)^2(x-4)^2-(x-1)(x-2)^2(x-3)}{(x-2)(x-3)(x-4)^2} \leq 0$$

$$\rightarrow \quad \frac{(x-2)(13-4x)}{(x-3)(x-4)^2} \leq 0$$

On voit immédiatement que cette inéquation est vérifiée pour $x\geq 4$

2) $3<x<4$

Inéquation impossible (car du positif $<$ du négatif).

3) $x\leq 1$

L'inéquation à vérifier devient:

$$\frac{(x-2)(13-4x)}{(x-3)(x-4)^2} \geq 0$$

Celle-ci est toujours vérifiée si $x\leq 1$

Conclusions: $x\leq 1$ et $x\geq 4$

EXALG029 – FACSA, ULG, Liège, septembre 1999.

Déterminer les valeurs réelles de m pour lesquelles le trinôme :

$$mx^2 + mx + (1 + m)$$

possède deux racines réelles de même signe.

---

1) Le produit des racines : $\dfrac{1+m}{m} > 0$

2) Racines reélles : $\Delta \geq 0 \ \rightarrow \ m^2 - 4m(1+m) = -3m^2 - 4m \geq 0$

A) Si $m > 0 \ \rightarrow \ \begin{cases} 1+m > 0 \\ -3m^2 - 4m \geq 0 \end{cases}$

Ce qui est impossible, car si $m > 0$, on a $-3m^2 - 4m < 0$

B) Si $m < 0 \ \rightarrow \ \begin{cases} 1+m < 0 \\ -3m^2 - 4m \geq 0 \end{cases}$

Le tableau des signes suivant :

		$-\frac{4}{3}$		-1		0	
$1+m$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$-3m^2 - 4m$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$
	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

0

permet de conclure : $-\dfrac{4}{3} \leq m < -1$