Exercices résolus de mathématiques.

Algèbre

ALG 21

EXALG210 – EXALG219

http://www.matheux.be.tf

Jacques Collot

Juillet 08

EXALG210 – Liège, septembre 2005.

Pour quels $a \in \mathbb{R}$ a − t − on

$$0 \le x \le 1 \;\Rightarrow\; ax^2 + (a+1)x - 1 \le 0$$

Nous reprenons la solution proposée par l'université.

Nous donnons deux moyens pour déterminer l'ensemble S des valeurs de a pour lesquelles l'inégalité $ax^2 + (a+1)x - 1 \le 0$ est vraie pour $x \in [\,0,1\,]$

<u>Première solution</u>

On distingue deux cas :

1. $a > 0$: la propriété est fausse car pour $x = 1$ le trinôme $ax^2 + (a+1)x - 1$ vaut $2a$, qui est strictement positif
2. $a \le 0$: la propriété est vraie car, pour tout x appartenant à l'intervalle $[\,0,1\,]$, on a $ax^2 \le 0$ et $(a+1)x \le x \le 1$, d'où $ax^2 + (a+1)x - 1 \le 0$

On a donc $S =]-\infty, 0\,]$

<u>Deuxième solution</u>

On observe d'abord que l'inégalité $ax^2 + (a+1)x - 1 \le 0$ est toujours vérifiée en $x = 0$. On note ensuite que, sur l'intervalle semi-ouvert $]\,0,1\,]$, l'inégalité peut se récrire en $\quad a \le \dfrac{1-x}{x^2+x}$

Sur le même intervalle, le second membre est une fonction continue; le numérateur et le dénominateur sont positifs, le numérateur est décroissant et le numérateur est croissant, donc la fonction est décroissante et atteint son minimum 0 pour $x = 1$.

L'ensemble S est donc $]-\infty, 0\,]$

Le 15 novembre 2005.
Référence : http://www.montefiore.ulg.ac.be/services/ia/Algebre.pdf

EXALG211 – Liège, septembre 2005.

Résoudre dans C l'équation

$$z^4 - 9z^3 + 33z^2 - 54z + 36 = 0$$

Sachant qu'aucune racine n'est réelle et que l'une est double de l'autre

---

Nous reprenons la solution proposée par l'université

Une équation à coefficients réels n'admettant aucune racine réelle est nécessairement de degré pair, soit $2n$, et admet n paires de racines complexes conjuguées. Dans le cas présent, il doit donc exister un réel a et un réel strictement positif b tels que les racines soient $a+bi,\ a-bi,\ 2(a+bi),\ 2(a-bi)$

L'équation peut donc se récrire

$$\left(z^2 + 2az + \left[a^2+b^2\right]\right)\left(z^2 - 4az + 4\left[a^2+b^2\right]\right) = 0$$

En identifiant les termes du troisème degré, on trouve $a = 3/2$; en identifiant les termes indépendants, on trouve $4\left(a^2+b^2\right)^2 = 36$, d'où $a^2+b^2 = 3$ et $b = \sqrt{3}/2$

A titre de vérification, on remultiplie; on a bien

$$\left(z^2 - 3z + 3\right)\left(z^2 - 6z + 12\right) = z^4 - 9z^3 + 33z^2 - 54z + 36$$

Le 15 novembre 2005.
Référence : http://www.montefiore.ulg.ac.be/services/ia/Algebre.pdf

EXALG212 – Bruxelles, juillet 2005.

La somme des trois chiffres d'un nombre est 17.
En ajoutant le chiffre des dizaines au double du chiffre des centaines on obtient 22.
La différence entre le nombre et celui obtenu en inversant l'ordre des chiffres est 495.
Quels sont les nombres possibles qui vérifient ces propriétés ?

Soit le nombre cherché écrit sous la forme : XYZ

La première condition donne : $X + Y + Z = 17 \quad (1)$

La deuxième condition donne : $2X + Y = 22 \quad (2)$

La troisième condition donne : $100X + 10Y + Z - 100Z - 10Y - X = 495$

$\rightarrow \ 99X - 99Z = 495 \rightarrow X - Z = 5 \quad (3)$

On peut constater que $(3) = (2) - (1)$. (3) est donc une combinaison linéaire de (1) et (2)

Résolvons le système formé par (1) et (2)

$$\begin{cases} X + Y + Z = 17 \\ 2X + Y = 22 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} X = 5 + Z \\ Y = 12 - 2Z \end{cases}$$

On peut alors construire le tableau

$X = 5 + Z$	$Y = 12 - 2Z$	Z
5	12	0
6	10	1
7	8	2
8	6	3
9	4	4
10	2	5

et comme X, Y, Z doivent être compris entre 0 et 9

Les solutions acceptables sont 782, 863, 944

Le 15 décembre 2005.

EXALG213 – Bruxelles, juillet 2005.

Simplifier au maximum :

$$\frac{\frac{1}{x}+x+2}{\frac{1}{x^2}}.\frac{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^3}} \qquad x\in\mathbb{R}^0$$

$$\frac{\frac{1}{x}+x+2}{\frac{1}{x^2}}.\frac{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^3}} = x^2\,\frac{1+x^2+2x}{x}.x^3\,\frac{\frac{x^2-x+1}{x^2}}{x^3+1}$$

$$= x^2\left(1+x\right)^2\frac{x^2-x+1}{\left(x+1\right)\left(x^2-x+1\right)}$$

$$= x^2\left(1+x\right)$$

Le 15 décembre 2005.

EXALG214 – Bruxelles, juillet 2005.

Résoudre dans C l'équation :

$$iz^2-(1+i)z=2(i-1)$$

$iz^2-(1+i)z=2(i-1)$

On réarrange et on multiplie par $i \rightarrow z^2+(i-1)z-2(i+1)=0 \quad (1)$

Calculons le Δ : $\Delta=(i-1)^2+8(i+1)=8+6i$

Trouvons la racine carrée de Δ

$$\begin{cases} a^2-b^2=8 \rightarrow |\,a\,|>|\,b\,| \\ 2ab=6 \rightarrow a \text{ et } b \text{ de même signe} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a^2+b^2=10 \\ a^2b^2=9 \end{cases}$$

$\rightarrow X^2-10X+9=0 \rightarrow (X-1)(X-9)=0$

$$\rightarrow \begin{cases} X=1 \rightarrow b^2=1 \rightarrow b=\pm 1 \\ X=3 \rightarrow a^2=3 \rightarrow a=\pm 3 \end{cases} \rightarrow \text{une racine est } 3+i$$

Nous pouvons maintenant résoudre (1)

$$z=\frac{-i+1\pm(3+i)}{2} \rightarrow \begin{cases} z_1=2 \\ z_2=-1-i \end{cases}$$

Le 15 décembre 2005.

EXALG215 – Bruxelles, juillet 2005.

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

$$4^x - 3^{x+\frac{1}{2}} = 3^{x-\frac{1}{2}} - 2^{2x}$$

$$4^x - 3^{x+\frac{1}{2}} = 3^{x-\frac{1}{2}} - 2^{2x}$$

$$2^{2x} - \sqrt{3}.3^x = \frac{3^x}{\sqrt{3}} - 2^{2x}$$

$$2.2^{2x} = \frac{4\sqrt{3}}{3}3^x$$

$$2x\ln 2 = \ln\frac{2\sqrt{3}}{3} + x\ln 3$$

$$x\left(2\ln 2 - \ln 3\right) = \ln\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$x = \frac{\ln\frac{2\sqrt{3}}{3}}{\ln\frac{2^2}{3}} = \frac{\ln\frac{2\sqrt{3}}{3}}{\ln\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{\ln\frac{2}{\sqrt{3}}}{2\ln\frac{2}{\sqrt{3}}} = \frac{1}{2}$$

Le 15 décembre 2005.

EXALG216 – Bruxelles, juillet 2005.

Résoudre dans $\mathbb{R}^3$, en discutant par rapport au paramètre rèel m, le système :

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ x-y+z+1=0 \\ m^2x+my+z=m^3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ x-y+z+1=0 \\ m^2x+my+z=m^3 \end{cases} \rightarrow \text{Le système s'écrit : } \begin{cases} x+y+z=1 \\ x-y+z=-1 \\ m^2x+my+z=m^3 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ m^2 & m & 1 \end{vmatrix} = 2(m-1)(m+1) \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ m^3 & m & 1 \end{vmatrix} = 2m(m-1)$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ m^2 & m^3 & 1 \end{vmatrix} = 2(m-1)(m+1) \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ m^2 & m & m^3 \end{vmatrix} = -2m(m-1)(m+1)$$

1) $m=1$

Le système devient : $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x-y+z=-1 \\ x+y+z=1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x+y=1-z \\ x-y=-1-z \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=-z \\ y=1 \end{cases}$

Système simplement indéterminé

2) $m=-1$

Le système devient : $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x-y+z=-1 \\ x-y+z=-1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x+y=1-z \\ x-y=-1-z \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=-z \\ y=1 \end{cases}$

Système simplement indéterminé

3) Dans les autres cas

$$\begin{cases} x=\dfrac{\Delta_x}{\Delta}=\dfrac{m}{m+1} \\ y=\dfrac{\Delta_y}{\Delta}=1 \\ z=\dfrac{\Delta_z}{\Delta}=-m \end{cases}$$

Le 15 décembre 2005. Modifié le 12 juillet 2006 (Coomans Geoffrey)

EXALG217 – **Bruxelles, septembre 2005.**

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation

$$21x^3 - 36x^2 - 14x + 24 = 0$$

en utilisant la propriété que deux racines sont opposées.

Développons le polynôme : $(x-a)(x+a)(x-c)$

et identifions avec le polynôme de départ.

$(x-a)(x+a)(x-c) = x^3 - cx^2 - a^2x + ca^2$

Il vient le système : $\begin{cases} 21c = 36 \\ 21a^2 = 14 \\ 21ca^2 = 24 \end{cases} \to \begin{cases} c = \dfrac{12}{7} \\ a = \pm\sqrt{\dfrac{2}{3}} \end{cases}$

Les trois racines sont donc :

$$\begin{cases} x_1 = \sqrt{\dfrac{2}{3}} \\ x_2 = +\sqrt{\dfrac{2}{3}} \\ x_4 = \dfrac{12}{7} \end{cases}$$

Le 15 décembre 2005.

EXALG218 – Bruxelles, septembre 2005.

Résoudre dans $\mathbb{C}$:

$$z^7 - \frac{2+i}{i-3} z^4 - z3 + \frac{2+i}{i-3} = 0$$

Représenter les solutions dans le plan de Gauss.

$$z^4 - \frac{2+i}{i-3} z^4 - z^3 + \frac{2+i}{i-3} = 0 \to z^4\left(z^3 - \frac{2+i}{i-3}\right) - z^3 + \frac{2+i}{i-3} = 0$$

$$\to \left(z^3 - \frac{2+i}{i-3}\right)\left(z^4 - 1\right) = 0 \to \left(z^3 - \frac{2+i}{i-3}\right)\left(z^2+1\right)(z+1)(z-1) = 0$$

Les trois derniers facteurs nous donnent quatre racines : $(\pm i, \pm 1)$

Mettons le premier facteur sous forme trigonométrique :

$$z^3 - \frac{2+i}{i-3} = 0 \to z^3 = \frac{2+i}{i-3} = -\frac{1}{2}(1+i) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{4} + 2k\pi\right) + i\sin\left(-\frac{3\pi}{4} + 2k\pi\right)\right)$$

$$\to z = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{2}}{2}}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{3}\right)\right)$$

Soit $k = 0$

$$z = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{2}}{2}}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{2}}{2}}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{2}}{2}}.\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$$

$$= \frac{\sqrt[3]{2}}{2}(1-i) \simeq 063 - 063i$$

Soit $k = 1$

$$z = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{2}}{2}}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3}\right)\right) = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{2}}{2}}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right)$$

$$= \sqrt[3]{\frac{\sqrt{2}}{2}}\left[\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\left(-1+\sqrt{3}\right) + i\left(1+\sqrt{3}\right)\right)\right] = \frac{\sqrt[3]{2}}{2}\left[\left(-1+\sqrt{3}\right) + i\left(1+\sqrt{3}\right)\right]$$

$$\simeq 0.23058 + 086054i$$

Soit $k = 2$

$$z = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{2}}{2}}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4} + \frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4} + \frac{4\pi}{3}\right)\right) = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{2}}{2}}\left(\cos\left(\frac{13\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{13\pi}{12}\right)\right)$$

$$= \sqrt[3]{\frac{\sqrt{2}}{2}}\left[-\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\left(1+\sqrt{3}\right) + i\left(-1+\sqrt{3}\right)\right)\right] = -\frac{\sqrt[3]{2}}{2}\left[\left(1+\sqrt{3}\right) + i\left(-1+\sqrt{3}\right)\right]$$

$$\simeq -0.86054 - 0.23058i$$

En résumé :

$$z_1 = 1 \qquad z_2 = -1 \qquad z_3 = i \qquad z_4 = -i$$

$$z_5 = \frac{\sqrt[3]{2}}{2}(1-i) \simeq 063 - 063i$$

$$z_6 = \frac{\sqrt[3]{2}}{2}\left[\left(-1+\sqrt{3}\right)+i\left(1+\sqrt{3}\right)\right] \simeq 0.23058 + 086054i$$

$$z_7 = -\frac{\sqrt[3]{2}}{2}\left[\left(1+\sqrt{3}\right)+i\left(-1+\sqrt{3}\right)\right] \simeq -0.86054 - 0.23058i$$

Le 15 décembre 2005.

EXALG219 – Bruxelles, septembre 2005.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation :

$$\ln(4x^2 - 1) - \ln 7 \geq 0$$

$$CE : 4x^2 - 1 > 0 \rightarrow \begin{cases} x < -\dfrac{1}{2} \\ x > \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

L'équation est simple à résoudre :

$$\ln\left(4x^2-1\right) - \ln 7 \geq 0 \rightarrow \ln\frac{4x^2-1}{7} \geq 0 \rightarrow \frac{4x^2-1}{7} \geq 1$$

$$\rightarrow 4x^2 - 1 \geq 7 \rightarrow 4x^2 \geq 8 \rightarrow x^2 \geq 2 \rightarrow \begin{cases} x \leq -\sqrt{2} \\ x \geq \sqrt{2} \end{cases}$$

Le 15 décembre 2005. Modifié le 27 juin 06 (Benoît Baudelet)