Exercices résolus de mathématiques.

Algèbre

ALG 22

EXALG220 – EXALG229

http://www.matheux.be.tf

Jacques Collot
Benoit Baudelet. Steve Tumson.
Nicole Berckmans. Jan Frans Broeckx
Fabienne Zoetard.

Juillet 08

EXALG220 – EPB, ULB, Bruxelles, septembre 2005.

Calculer le terme indépendant dans :

$$\left(x^2 - \frac{1}{x}\right)^6$$

Le terme général du développement s'écrit :

$$C_6^i\left(-1\right)^i\left(x^2\right)^{6-i}\left(\frac{1}{x}\right)^i = C_6^i\left(-1\right)^i x^{12-3i}$$

Le terme sera indépendant si : $12-3i=0 \rightarrow i=4$

Le terme est donc $C_6^i\left(-1\right)^i x^{12-3i} = C_6^4\left(-1\right)^4 = 15$

Le 15 décembre 2005.

EXALG221 – Bruxelles, septembre 2005.

Résoudre dans $\mathbb{R}^2$, en discutant par rapport au paramètre réel *m*, le système :

$$\begin{cases} m^2(x - y) + m(2x + 3y) - 3 = 0 \\ m^2(x - y) - m(3x + 2y) + 2 = 0 \end{cases}$$

Eliminons directement le cas : $m = 0$, pour lequel le système est impossible.

Récrivons le système : $\begin{cases} \left(m^2 + 2m\right) x + \left(-m^2 + 3m\right) y = 3 \\ \left(m^2 - 3m\right) x - \left(m^2 + 2m\right) y = -2 \end{cases}$

Calculons les Δ

$$\Delta = \begin{vmatrix} m^2 + 2m & -m^2 + 3m \\ m^2 - 3m & -\left(m^2 + 2m\right) \end{vmatrix} = 5m^2\left(1 - 2m\right)$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 3 & -m^2 + 3m \\ -2 & -\left(m^2 + 2m\right) \end{vmatrix} = 5m\left(1 - m\right)$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} m^2 + 2m & 3 \\ m^2 - 3m & -2 \end{vmatrix} = 5m^2\left(1 - 2m\right)$$

Si : $m = \frac{1}{2}$ le système devient :

$$\begin{cases} \frac{5}{4} x + \frac{5}{4} y = 3 \\ -\frac{5}{4} x - \frac{5}{4} y = -2 \end{cases} \qquad \text{système impossible}$$

Si : $m \neq 0,\ m \neq \frac{1}{2}$

$$\begin{cases} x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-5m^2}{5m^2\left(1 - 2m\right)} = \frac{1}{2m - 1} \\ y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{5m\left(1 - m\right)}{5m^2\left(1 - 2m\right)} = \frac{1 - m}{m\left(1 - 2m\right)} \end{cases}$$

Le 15 décembre 2005.

EXALG222 – EPL, UCL, LLN, juillet 2005, série 1.

Résoudre dans les réels, en discutant par rapport aux paramètres réels a et b, l'équation suivante.

$$\frac{x-a}{2}=\frac{(x-b)^2}{2x-a}$$

$CE: x \neq \frac{a}{2}$

1) $\underline{\underline{a=b}}$

L'équation devient : $\frac{x-a}{2}=\frac{(x-a)^2}{2x-a}$

- si $x=a$, on obtient $0=0$ et l'équation est vérifiée
- si $x\neq a$, on peut simplifier par $x-a$

$\rightarrow \frac{1}{2}=\frac{x-a}{2x-a}\rightarrow 2x-a=2x-2a$

$*$ si $a=0$, l'équation est indéterminée

$*$ si $a\neq 0$, l'équation est impossible

2) $\underline{\underline{a\neq b}}$

L'équation devient : $2x^2-2ax-ax=a^2=2x^2-4bx-2b^2$

$\rightarrow 4bx-3ax=2b^2-a^2\rightarrow (4b-3a)x=2b^2-a^2$

- si $b=\frac{3}{4}a\rightarrow 0x=\frac{a^2}{8}$

  $*$ si $a=0$ (donc $b=0$), cas déjà traité

  $*$ si $a\neq 0$, équation impossible

- si $b\neq \frac{3}{4}a \rightarrow x=\frac{2b^2-a^2}{4b-3a}$

Mais on doit avoir $x\neq\frac{a}{2}$ en vertu de la CE

$\rightarrow \frac{2b^2-a^2}{4b-3a}=\frac{a}{2}\rightarrow 4b^2-2a^2=4ab-3a^2\rightarrow 4b^2-4ab+a^2=0\rightarrow (2b-a)^2=0$

Ce qui donne $b=\frac{a}{2}$ comme valeur particulière.

On remplace dans l'équation de départ: $\frac{x-a}{2}=\frac{\left(x-\frac{a}{2}\right)^2}{2x-a}$

$\rightarrow 2x^2-2ax-ax+a^2=2x^2-2ax+\frac{a^2}{2}\rightarrow x=\frac{a}{2}$ ce qui est interdit

et donc il faut comme condition : $b\neq\frac{a}{2}$

Conclusion

$a = b = 0$			éq indéterminée
$a = b \neq 0$			éq impossible
$a \neq b$			
	$b = \frac{3}{4}a$	$a = 0$	voir $a = b = 0$
		$a \neq 0$	éq impossible
	$b \neq \frac{3}{4}a$	$b = \frac{a}{2}$	éq impossible (CE)
		$b \neq \frac{a}{2}$	$x = \frac{2b^2 - a^2}{4b - 3a}$

Le 1 avril 2005.

EXALG223 – EPL, UCL, LLN, juillet 2005, série 1.

Résoudre dans les réels, l'inéquation suivante :

$$x - |5x - 2| < 0$$

---

1) $\underline{5x-2>0} \rightarrow x > \frac{2}{5} \quad (1)$

Dans ce cas : $|5x-2| = 5x-2$

L'inéquation devient : $x - 5x + 2 < 0 \rightarrow -4x < -2 \rightarrow x > \frac{1}{2}$

Ce qui vérifie la condition (1) : $x > \frac{1}{2}$

2) $\underline{5x-2<0} \rightarrow x < \frac{5}{2} \quad (2)$

Dans ce cas : $|5x-2| = -5x+2$

L'inéquation devient : $x + 5x - 2 < 0 \rightarrow 6x < 2 \rightarrow x < \frac{1}{3}$

Ce qui vérifie la condition (2)

Conclusion : $x \in \mathbb{R} : \left]-\infty; \frac{1}{3}\right[\cup \left]\frac{1}{2}; +\infty\right[$

Le 1 avril 2005.

EXALG224 – EPL, UCL, LLN, juillet 2005, série 1.

Soit $P(z) = z^2 + pz + q$ un polynôme en z, où z appartient à l'ensemble des complexes et, où les coefficients p et q sont réels.
Déterminez la relation qui doit exister entre p et q pour que $P(z)$ ait une racine complexe z dont la partie imaginaire est égale à 20. Exprimez q comme une fonction de p.

Solution proposée par Nicole Berckmans

$z = x + 20i$ où $x \in \mathbb{R}$ est racine de $P(z)$ si et seulement si

$$(x+20i)^2 + p(x+20i) + q = 0$$

Partie réelle : $x^2 - 400 + px + q = 0$ (1)

Partie imaginaire : $40x + 20p = 0$ (2)

De (2) on ture la valeur réelle de x que l'on introduit dans (1).

On obtient : $\boxed{q = \dfrac{p^2 + 1600}{4}}$

Solution proposée par Jacques COLLOT

Soit donc le polynôme : $P(z) = z^2 + pz + q$

Ces racines sont données par : $z = \dfrac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2} = -\dfrac{p}{2} \pm \dfrac{\sqrt{p^2 - 4q}}{2}$ (1)

Puisque p est réel la partie imaginaire est donc générée par le deuxième terme.

$\rightarrow \dfrac{p^2 - 4q}{4} = -20^2 \rightarrow \boxed{q = \dfrac{p^2 + 1600}{4}}$

En remplaçant dans (1), on trouve bien : $z = -\dfrac{p}{2} \pm 20i$

Le 1 avril 2005. Modifié le 28 aout 2012 (Nicole Berckmans)

EXALG225 – Louvain, juillet 2005, série 2.

Résoudre dans les réels, en discutant par rapport au paramètre réel a, l'équation :

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{x-2}=a$$

CE : $\begin{cases} x \geq -1 \\ x \geq 2 \end{cases} \rightarrow x \geq 2$

1) <u>soit $a<0$</u>

Il faut donc : $\sqrt{x+1} < \sqrt{x-2} \rightarrow x+1 < x-2$: ce qui est impossible

2) <u>soit $a=0$</u>

Il faut donc : $\sqrt{x+1} = \sqrt{x-2} \rightarrow x+1 = x-2$: ce qui est impossible

3) <u>soit $a>0$</u> (1)

Remettons l'équation sous la forme : $\sqrt{x+1} = a+\sqrt{x+2}$

$\rightarrow x+1 = a^2+2a\sqrt{x-2}+x-2 \rightarrow 2a\sqrt{x-2} = 3-a^2 \quad (2)$

Cette relation implique : $3-a^2 \geq 0 \rightarrow -\sqrt{3} \leq a \leq \sqrt{3}$

Ce qui avec la condition (1) donne : $0 < a \leq \sqrt{3}$

Elevons (2) au carré : $\rightarrow 4a^2(x-2) = (3-a^2)^2 \rightarrow x = \dfrac{(3-a^2)^2}{4a^2}+2$

Mais on doit encore vérifié : $x \geq 2$

$\rightarrow \dfrac{(3-a^2)^2}{4a^2}+2 \geq 2$ ce qui est toujours vérifié.

<u>Conclusion</u> : $x = \dfrac{(3-a^2)^2}{4a^2}+2 \quad$ avec $\; 0 < a \leq \sqrt{3}$

Le 1 avril 2005.

EXALG226 – Louvain, juillet 2005, série 2.

Résoudre dans les complexes, l'équation

$$z^2 = z\big(2i-1)\big)+2i$$

Exprimez votre réponse sous la forme $a + ib$.

Calculons le Δ : $\quad \Delta = (2i-1)^2 + 8i = -3+4i$

Il nous faut calculer la racine carrée de ce Δ

$$\begin{cases} a^2-b^2=-3 \\ 2ab=4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a^2+b^2=5 \\ a^2b^2=4 \end{cases} \rightarrow X^2-5X+4=0 \rightarrow (X-1)(X-4)=0$$

1) $X^2=1$

- $\rightarrow X=1 \rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=2 \end{cases} \rightarrow \sqrt{\Delta}=1+2i$
- $\rightarrow X=-1 \rightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=-2 \end{cases} \rightarrow \sqrt{\Delta}=-1-2i$

2) $X^2=4$

- $\rightarrow X=2 \rightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=1 \end{cases}$ A rejeter car $a^2-b^2=-3$ donc $|\,a\,|<|\,b\,|$
- $\rightarrow X=-2 \rightarrow \begin{cases} a=-2 \\ b=-1 \end{cases}$ A rejeter car $|\,a\,|<|\,b\,|$

Finalement, la solution de l'équation est :

$$z=\frac{+(2i-1)\pm(1+2i)}{2} \rightarrow \begin{cases} z_1=-1 \\ z_2=2i \end{cases}$$

Le 1 avril 2005.

EXALG227 – Louvain, juillet 2005, série 2.

Résoudre, dans les nombres réels, le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} x-|\,y+1\,|=1 \\ x^2+y=10 \end{cases}$$

---

1) $\underline{y>-1}$

Dans ce cas le système s'écrit : $\begin{cases} x-y-1=1 \\ x^2+y=10 \end{cases} \to \begin{cases} y=x-2 \\ x^2+x-12=0 \end{cases}$

$\to (x-3)(x+4)=0 \to \begin{cases} x=3 \to y=1 \\ x=-4 \to y=-6 \quad \text{A rejeter} \end{cases}$

2) $\underline{y<-1}$

Dans ce cas le système s'écrit : $\begin{cases} x+y+1=1 \\ x^2+y=10 \end{cases} \to \begin{cases} y=-x \\ x^2-x-10=0 \end{cases}$

$\to x=\dfrac{1\pm\sqrt{41}}{2} \to \begin{cases} x=\dfrac{1+\sqrt{41}}{2} \to y=-\dfrac{1+\sqrt{41}}{2} \\ x=\dfrac{1-\sqrt{41}}{2} \to y=-\dfrac{1-\sqrt{41}}{2}>-1 \quad \text{A rejeter} \end{cases}$

Le 1 avril 2005.

EXALG228 – Louvain, juillet 2005, série 2.

Michel part du point A vers le point B au même instant où Charles part du point B vers le point A. Ils marchent à vitesses constantes. Quand ils se croisent, Michel a parcouru 200 m de plus que Charles. Ils poursuivent leur marche sans s'arrêter, mais avec des vitesses respectives diminuées de moitié. Après leur rencontre, il faut encore 8 minutes pour que Michel arrive ainsi en B tandis qu'il faut encore 18 minutes pour que Charles arrive en A.
Quelle distance y a t il entre A et B et combien de temps après le départ se croisent-ils ?

Soient :

a	La distance parcourue par Michel jusque au point de croissement
b	La distance parcourue par Charles jusque au point de croissement
c	La distance entre A et B
v_a	La vitesse de Michel jusqu'au point de croissement $(m/\min)$
v_b	La vitesse de Charles jusqu'au point de croissement $(m/\min)$
t	Le temps jusqu'au point de croissement

On a

$a+b=z \rightarrow 2b+200=z \quad (1)$ Michel a parcouru $200m$ de plus que Charles

$v_a t+\frac{v_a}{2}.8=z \quad (2)$ Michel met 8 minutes pour faire le reste du trajet à la vitesse $\frac{v_a}{2}$

$v_b t+\frac{v_b}{2}.18=z \quad (3)$ Charles met 18 minutes pour faire le reste du trajet à la vitesse $\frac{v_b}{2}$

De (2) et $(3) \rightarrow v_a t+4v_a=v_b+9v_b \quad (4)$

Or le trajet b que Charles fait en t minutes, Michel le fait en 8 minutes

$$\rightarrow tv_b=8.\frac{v_a}{2} \rightarrow t=\frac{4v_a}{v_b} \quad (5)$$

On remplace dans $(4) \rightarrow \frac{4v_a^{\ 2}}{v_b}+4v_a=v_b\frac{4v_a}{v_b}+9v_b \rightarrow 4v_a^{\ 2}=9v_b^{\ 2} \rightarrow v_a=\frac{2v_b}{3} \quad (6)$

On injecte (6) dans $(5) \rightarrow t=4\frac{\frac{3}{2}v_b}{v_b}=6 \min$

D'autre part, $b=tv_b=6.\frac{2}{3}v_a=4v_a$

De (1) et $(2) \rightarrow 2b+200=v_a t+4v_a \rightarrow 8v_a+200=6v_a+4v_a \rightarrow v_a=100\ m/\min$

Le reste est facile $\rightarrow v_b=66.7\ m/\min$

et $a=6*100=600\ m$; $b=8*50=400\ m$; $c=1000\ m$

Le 1 avril 2005.