

**Exercices résolus de mathématiques.**

# Algèbre

## **ALG 23**

**EXALG230 – EXALG239**

<http://www.matheux.be.tf>

Jacques Collot

Juillet 08

## EXALG230 – Liège, juillet 2006.

Résoudre et discuter le système suivant, dans lequel  $a$  est un paramètre réel.

$$\begin{cases} x - y + z = 1-a \\ x + y + az = 0 \\ ax + y + z = a-1 \end{cases}$$

---

Calculons tous les  $\Delta$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & a \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix} = -(a-1)(a-3) \quad , \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} 1-a & -1 & 1 \\ 0 & 1 & a \\ a-1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2(a-1)$$
$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 1-a & 1 \\ 1 & 0 & a \\ a & a-1 & 1 \end{vmatrix} = -(a-1)^2(a+2) \quad , \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1-a \\ 1 & 1 & 0 \\ a & 1 & a-1 \end{vmatrix} = (a-1)(a+1)$$

1)  $a=1$

Le système devient :  $\begin{cases} x - y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -z \\ y = 0 \end{cases}$  Système simplement indéterminé.

2)  $a=-3$

Le système devient :

$$\begin{cases} x - y + z = 4 \\ x + y - 3z = 0 \\ -3x + y + z = -4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x - z = 2 \\ x - z = 1 \end{cases} \text{ Système impossible.}$$

3) Dans les autres cas

$$\begin{cases} x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{2}{a+3} \\ y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{(a-1)(a+2)}{a+3} \\ z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = -\frac{a+1}{a+3} \end{cases}$$

---

Le 18 juillet 2006.

## EXALG231 – Liège, juillet 2006.

- Trouver tous les nombres  $z \in \mathbb{C}$  tels que

$$(z + 2 \cos \alpha)^2 = \frac{1}{z^2}$$

- Trouver tous les nombres  $z \in \mathbb{C}$  tels que

$$(z + 2 \cos \alpha)^4 = \frac{1}{z^4}$$

1) Il nous suffit de résoudre :  $z + 2 \cos \alpha = \pm \frac{1}{z}$

$$\bullet z + 2 \cos \alpha = \frac{1}{z} \rightarrow z^2 + 2 \cos \alpha \cdot z - 1 = 0 \rightarrow \begin{cases} z_1 = -\cos \alpha + \sqrt{\cos^2 \alpha + 1} & \text{Toujours réel} \\ z_2 = -\cos \alpha - \sqrt{\cos^2 \alpha - 1} & \text{Toujours réel} \end{cases}$$

$$\bullet z + 2 \cos \alpha = -\frac{1}{z} \rightarrow z^2 + 2 \cos \alpha \cdot z + 1 = 0 \rightarrow \begin{cases} z_3 = -\cos \alpha + \sqrt{\cos^2 \alpha - 1} = -\cos \alpha + i \sin \alpha \\ z_4 = -\cos \alpha - \sqrt{\cos^2 \alpha - 1} = -\cos \alpha - i \sin \alpha \end{cases}$$

2) L'équation devient :  $(z + 2 \cos \alpha)^2 = \pm \frac{1}{z^2}$

$$\bullet (z + 2 \cos \alpha)^2 = +\frac{1}{z^2} \quad \text{Voir la résolution au point 1)}$$

$$\bullet (z + 2 \cos \alpha)^2 = -\frac{1}{z^2} \rightarrow z + 2 \cos \alpha = \pm \frac{i}{z}$$

$$* z + 2 \cos \alpha = \frac{i}{z} \rightarrow z^2 + 2 \cos \alpha \cdot z - i = 0 \rightarrow \begin{cases} z_5 = -\cos \alpha + \sqrt{\cos^2 \alpha + i} \\ z_6 = -\cos \alpha - \sqrt{\cos^2 \alpha + i} \end{cases}$$

$$* z + 2 \cos \alpha = -\frac{i}{z} \rightarrow z^2 + 2 \cos \alpha \cdot z + i = 0 \rightarrow \begin{cases} z_7 = -\cos \alpha + \sqrt{\cos^2 \alpha - i} \\ z_8 = -\cos \alpha - \sqrt{\cos^2 \alpha - i} \end{cases}$$

Cependant, laisser un  $i$  en dessous d'une racine n'est pas vraiment une bonne idée.

Calculons :  $\sqrt{\cos^2 \alpha + i}$

$$\sqrt{\cos^2 \alpha + i} = a + bi \rightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = \cos^2 \alpha \\ 2ab = i \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = \sqrt{\cos^4 \alpha + 1} \\ a^2 + b^2 = \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\rightarrow X^2 - \sqrt{\cos^4 \alpha} + \frac{1}{4} = 0 \rightarrow X = \frac{\sqrt{\cos^2 + 1} \pm \cos^2 \alpha}{2}$$

$$\rightarrow a + ib = \pm \left( \sqrt{\frac{\sqrt{\cos^2 + 1} + \cos^2 \alpha}{2}} + i \sqrt{\frac{\sqrt{\cos^2 + 1} - \cos^2 \alpha}{2}} \right)$$

De même pour  $\sqrt{\cos^2 \alpha + i}$

$$a + ib = \pm \left( \sqrt{\frac{\sqrt{\cos^2 + 1} + \cos^2 \alpha}{2}} - i \sqrt{\frac{\sqrt{\cos^2 + 1} - \cos^2 \alpha}{2}} \right)$$

Finalement, les huit solutions de la deuxième équation sont

$$z_1 = -\cos \alpha + \sqrt{\cos^2 \alpha + 1} \quad z_5 = -\cos \alpha + \left( \sqrt{\frac{\sqrt{\cos^2 + 1} + \cos^2 \alpha}{2}} + i \sqrt{\frac{\sqrt{\cos^2 + 1} - \cos^2 \alpha}{2}} \right)$$

$$z_2 = -\cos \alpha - \sqrt{\cos^2 \alpha + 1} \quad z_6 = -\cos \alpha - \left( \sqrt{\frac{\sqrt{\cos^2 + 1} + \cos^2 \alpha}{2}} + i \sqrt{\frac{\sqrt{\cos^2 + 1} - \cos^2 \alpha}{2}} \right)$$

$$z_3 = -\cos \alpha + i \sin \alpha \quad z_7 = -\cos \alpha + \left( \sqrt{\frac{\sqrt{\cos^2 + 1} + \cos^2 \alpha}{2}} - i \sqrt{\frac{\sqrt{\cos^2 + 1} - \cos^2 \alpha}{2}} \right)$$

$$z_4 = -\cos \alpha - i \sin \alpha \quad z_8 = -\cos \alpha - \left( \sqrt{\frac{\sqrt{\cos^2 + 1} + \cos^2 \alpha}{2}} - i \sqrt{\frac{\sqrt{\cos^2 + 1} - \cos^2 \alpha}{2}} \right)$$

---

Le 18 juillet 2006.. Modifié le 21 septembre 06

## EXALG232 – Liège, juillet 2006.

- Trouver des nombres  $A$ ,  $B$  et  $C$  tel que

$$\frac{1}{(x-1)x(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x+1}$$

- Ces nombres sont-ils uniques ? On justifiera la réponse.
- Dédurre de ce qui précède la valeur de

$$\frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \dots + \frac{1}{(k-1)k(k+1)} \quad \text{pour } k \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$$

---

On met le deuxième membre au même dénominateur, et on extrait le numérateur obtenu

$$Ax(x+1) + B(x-1)(x+1) + Cx(x-1)$$

$$= Ax^2 + AX + Bx^2 - B + Cx^2 - Cx$$

$$= (A+B+C)x^2 + (A-C)x - B$$

Ce polynôme doit être identique à 1, ce qui conduit au système

$$\begin{cases} A+B+C=0 \\ A-C=0 \\ -B=1 \end{cases} \quad \text{Le déterminant de ce système est : } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

Il n'y a donc qu'une seule solution  $\begin{cases} A=C=\frac{1}{2} \\ B=-1 \end{cases}$  et elle est unique

Construisons le tableau suivant

$$\frac{1}{1.2.3} = \boxed{\frac{1}{2}} \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{2.3.4} = \boxed{\frac{1}{2}} \frac{1}{4} - \frac{1}{3} \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{3.4.5} = \frac{1}{3} \frac{1}{5} - \frac{1}{4} \frac{1}{5}$$

$$\frac{1}{4.5.6} = \frac{1}{4} \frac{1}{6} - \frac{1}{5} \frac{1}{6}$$

$$\frac{1}{5.6.7} = \frac{1}{5} \frac{1}{7} - \frac{1}{6} \frac{1}{7}$$

$$\frac{1}{(k-3)(k-2)(k-1)} = \frac{1}{2} \frac{1}{k-3} - \frac{1}{k-2} + \frac{1}{2} \frac{1}{k-1}$$

$$\frac{1}{(k-2)(k-1)k} = \frac{1}{2} \frac{1}{k-2} - \frac{1}{k-1} + \boxed{\frac{1}{2}} \frac{1}{k}$$

$$\frac{1}{(k-1)k(k-1)} = \frac{1}{2} \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} + \boxed{\frac{1}{2}} \frac{1}{k+1}$$

Si on fait la somme, on voit que toute une série de termes disparaissent. Il reste seulement les termes encadrés. Soit  $S$  la somme cherchée

$$S = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2k} - \frac{1}{k} + \frac{1}{2} \frac{1}{k+1} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2k} + \frac{1}{2(k+1)}$$

$$= \frac{k(k+1) - 2(k+1) + 2k}{4k(k+1)} = \frac{k^2 + k - 2k - 2 + 2k}{4k(k+1)} = \frac{k^2 + k - 2}{4k(k+1)} = \boxed{\frac{(k+2)(k-1)}{4k(k+1)}}$$

Note : Remarquons que cette suite est convergente et  $\lim_{k \rightarrow \infty} S = \frac{1}{4}$

## EXALG233 – Mons juillet 2006.

Résoudre le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} 4x^2 + 3|y| = 31 \\ -2x^2 + 7|y| = 27 \end{cases}$$

---

Solution proposée par Steve Tumson

- Si  $y > 0$

$$\begin{cases} 4x^2 + 3y = 31 \\ -2x^2 + 7y = 27 \end{cases} \xrightarrow{L_1 + 2L_2} 17y = 85 \Leftrightarrow y = 5$$

Et donc

$$4x^2 + 3 \cdot \frac{85}{17} = 31 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2$$

$$\rightarrow S = \{(2; 5); (-2; 5)\}$$

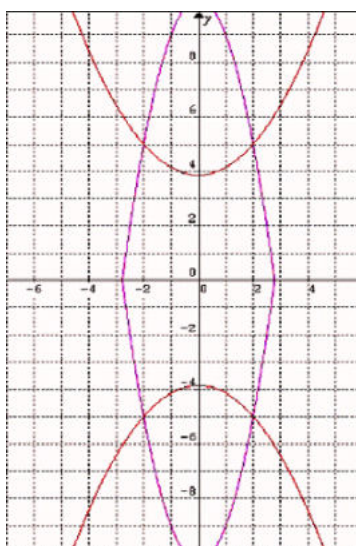
- Si  $y < 0$  (n'a de sens que pour la première équation, la deuxième étant un second degré toujours positif)

$$\begin{cases} 4x^2 - 3y = 31 \\ -2x^2 - 7y = 27 \end{cases} \xrightarrow{L_1 + 2L_2} -17y = 85 \Leftrightarrow y = -\frac{85}{17} = -5$$

Et donc

$$4x^2 + 3 \cdot 5 = 31 \Leftrightarrow 4x^2 = 16 \Leftrightarrow x = \pm 2$$

$$\rightarrow S = \{(-2, -5); (2; -5)\}$$



---

Le 16 septembre 2006. Modifié le 24 février 07. (Steve Tumson)

## EXALG234 – Liège, septembre 2006.

Résoudre le système d'équations suivant, dans lequel  $a$  est un paramètre réel :

$$\begin{cases} x + ay - (a-2)z = 1 \\ ax + a^2y - 3z = a \\ (a-1)x + 6y + (a-5)z = 2 \end{cases}$$

---

Calculons les  $\Delta$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & a & -(a-2) \\ a & a^2 & -3 \\ a-1 & 6 & a-5 \end{vmatrix} = (a+1)(a+2)(a-3)^2$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & a & -(a-2) \\ a & a^2 & -3 \\ 2 & 6 & a-5 \end{vmatrix} = 2(a+1)(a-3)^2$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -(a-2) \\ a & a & -3 \\ a-1 & 2 & a-5 \end{vmatrix} = (a+1)(a-3)^2$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ a & a^2 & a \\ a-1 & 6 & 2 \end{vmatrix} = a(a-2)(a-3)$$

### Discussion

1)  $a = -1$  Le système devient : 
$$\begin{cases} x - y + 3z = 1 \\ -x + y - 3z = -1 \\ -2x + 6y - 6z = 2 \end{cases}$$

ce qui donne un système simplement indéterminé : 
$$\begin{cases} x = 2 - 3z \\ y = 1 \end{cases}$$

2)  $a = -2$  Le système devient : 
$$\begin{cases} x - 2y + 4z = 1 \\ -2x + 4y - 3z = -2 \\ -3x + 6y - 7z = 2 \end{cases}$$

$\rightarrow \begin{cases} -3x + 6y - 7z = -3 \\ -3x + 6y - 7z = 2 \end{cases}$  C'est-à-dire un système impossible.

3)  $a = 3$  Le système devient : 
$$\begin{cases} x + 3y - z = 1 \\ 3x + 9y - 3z = 3 \\ 2x + 6y - 2z = 2 \end{cases}$$

ce qui donne un système doublement indéterminé : 
$$\{x = 1 - 3y + z$$



d) Dans les autres cas ( $a \in \mathbb{R} \setminus \{-2; -1; 3\}$ )

$$\begin{cases} x = \frac{2(a+1)(a-3)^2}{(a+1)(a+2)(a-3)^2} = \frac{2}{a+2} \\ y = \frac{(a-3)^2(a+1)}{(a+1)(a+2)(a-3)^2} = \frac{1}{a+2} \\ z = \frac{a(a-2)(a-3)}{(a+1)(a+2)(a-3)^2} = \frac{a(a-2)}{(a+1)(a+2)(a-3)} \end{cases}$$

---

Le 24 décembre 2006

## EXALG234 – Liège, septembre 2006.

Dans  $\mathbb{R}$ , résoudre l'inéquation:

$$\frac{1}{1+\sqrt{|x-1|}} < x$$


---

Le premier membre est toujours positif. Il n'y a donc pas de conditions d'existence et cela entraîne aussi que  $x > 0$ .

a) Soit  $x > 1$   $\rightarrow \frac{1}{1+\sqrt{|x-1|}} = \frac{1}{1+\sqrt{x-1}} < \frac{1}{1+\sqrt{1-1}} < x$

L'inéquation est donc toujours vérifiée

b) Soit  $x = 1$   $\rightarrow \frac{1}{1+\sqrt{|x-1|}} = 1$ ; Et l'inéquation n'est pas vérifiée.

c) Soit  $0 < x < 1$  Dans ce cas :  $|x-1| = 1-x$

$$\rightarrow \frac{1}{1+\sqrt{1-x}} < x \rightarrow 1 < x + x\sqrt{1-x} \rightarrow 1-x < x\sqrt{1-x} \rightarrow (1-x)^2 < (x\sqrt{1-x})^2$$

$$\rightarrow 1-2x+x^2 < x^2-x^3 \rightarrow x^3-2x+1 < 0$$

On factorise par Horner :  $\rightarrow \begin{array}{r|rrr} & 1 & -2 & 1 \\ & 1 & 1 & 1 \\ \hline & 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}$

$$\rightarrow (x-1)(x^2+x-1) < 0 \rightarrow (x-1)\left(x+\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x+\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) < 0$$

D'où le tableau de signe :

		$-\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	$-\frac{1-\sqrt{5}}{2} \approx 0.618$	1	
$x-1$	-	-	-	-	0 +
$x^2+x-1$	+	0	-	0	+ + +
	-	0	+	0	- 0 0

Autrement dit :  $\frac{\sqrt{5}-1}{2} < x < 1$

Conclusion :  $S : ]0.618; \rightarrow \setminus \{1\}$



## EXALG237 – Bruxelles, juillet 2006.

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'inéquation  $|2x| > |2 - x^2|$

---

Construisons un tableau de signe pour définir les différents cas.

	$-\sqrt{2}$	0	$\sqrt{2}$				
$2x$	-	-	0	+	+	+	
$2-x^2$	-	0	+	+	0	-	
Cas	1	2	3	4	5	6	7

Cas 1 :  $x < -\sqrt{2}$

L'inéquation peut s'écrire :  $-2x > x^2 - 2 \rightarrow x^2 + 2x - 2 > 0$

Le premier membre a pour racines :  $x = -1 \pm \sqrt{3}$ .

On en déduit la solution :  $-1 - \sqrt{3} < x < -\sqrt{2}$

Cas 2 :  $x = -\sqrt{2}$

L'inéquation est vérifiée :  $2\sqrt{2} > 0$

Cas 3 :  $-\sqrt{2} < x < 0$

L'inéquation peut s'écrire :  $-2x > 2 - x^2 \rightarrow x^2 - 2x - 2 > 0$

Le premier membre a pour racines :  $x = 1 \pm \sqrt{3}$ .

On en déduit la solution :  $-\sqrt{2} < x < 1 - \sqrt{3}$

Cas 4 :  $x = 0$  L'inéquation n'est pas vérifiée car  $0 < 2$

Cas 5 :  $0 < x < \sqrt{2}$

L'inéquation peut s'écrire :  $2x > 2 - x^2 \rightarrow x^2 + 2x - 2 > 0$

Le premier membre a pour racines :  $x = -1 \pm \sqrt{3}$ .

On en déduit la solution :  $-1 + \sqrt{3} < x < \sqrt{2}$

Cas 6 :  $x = \sqrt{2}$  L'inéquation est vérifiée car  $2\sqrt{2} > 0$

Cas 7 :  $x > \sqrt{2}$

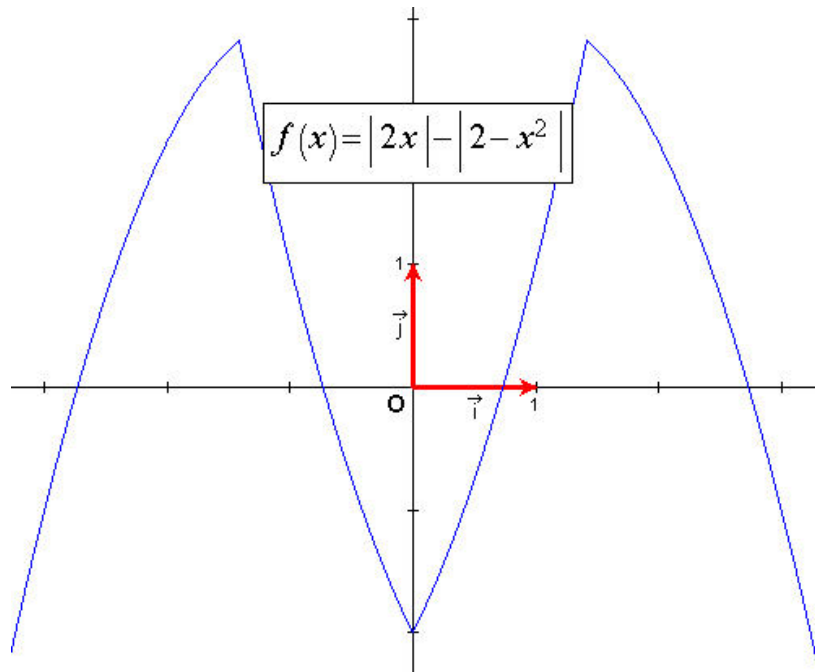
L'inéquation peut s'écrire :  $2x > x^2 - 2 \rightarrow x^2 - 2x - 2 < 0$

Le premier membre a pour racines :  $x = 1 \pm \sqrt{3}$ .

On en déduit la solution :  $\sqrt{2} < x < 1 + \sqrt{3}$

Conclusion

$$S : x \in ]-1 - \sqrt{3}; -\sqrt{2}[ \cup ]-\sqrt{2}; -1 + \sqrt{3}[$$



---

Le 22 janvier 2007.

## EXALG238 – Bruxelles, juillet 2006.

On considère

$$f(x) = \left( \frac{x^4 - 1}{16x^4 - 9x^2} : \frac{2x^2 + 2}{4x + 3} \right) \left( 4x + \frac{x}{x-1} \right) + 2(x+2) - \frac{5}{x}$$

- Déterminer le domaine de définition de  $f$
- Résoudre  $f(x)$  dans  $\mathfrak{R}$

### Domaine

$$a) 16x^4 - 9x^2 \neq 0 \rightarrow x^2(4x-3)(4x+3) \neq 0 \rightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq \frac{3}{4} \\ x \neq -\frac{3}{4} \end{cases}$$

$$b) 2x^2 + 2 \neq 0 \quad \text{Toujours vrai}$$

$$c) 4x + 3 \neq 0 \rightarrow x \neq -\frac{3}{4}$$

$$d) x - 1 \neq 0 \rightarrow x \neq 1$$

$$e) x \neq 0$$

Conclusion : Si  $P(x)$  désigne la polynôme donné

$$\text{Dom } P(x) : \mathfrak{R} \setminus \left\{ -\frac{3}{4}; 1; 0; \frac{3}{4} \right\}$$

Factorisons et réduisons :

$$\begin{aligned} P(x) &= \frac{x^4 - 1}{16x^4 - 9x^2} \cdot \frac{4x + 3}{2x^2 + 2} \cdot \left( 4x + \frac{x}{x-1} \right) + 2(x+2) - \frac{5}{x} \\ &= \frac{\cancel{(x^2+1)} \cancel{(x-1)} (x+1) \cancel{(4x+3)}}{x^2(4x-3) \cancel{(4x+3)} \cdot 2 \cdot \cancel{(x^2+1)}} \left( \frac{4x \cancel{(x-1)} + x}{\cancel{x-1}} \right) + 2(x+2) - \frac{5}{x} \\ &= \frac{(x+1) \cancel{x} \cancel{(4x-3)}}{2x^2 \cancel{(4x-3)}} + 2(x+2) - \frac{5}{x} = \frac{x+1}{2x} + 2(x+2) - \frac{5}{x} \\ &= \frac{1}{2x} (x+1+4x^2+8x-10) = \frac{1}{2x} (4x^2+9x-9) \end{aligned}$$

$$\text{Donc : } P(x) = 0 \rightarrow 4x^2 + 9x - 9 = 0 \rightarrow x = \frac{-9 \pm \sqrt{81+144}}{8} \rightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = \frac{3}{4} \end{cases} \quad \text{A rejeter}$$

$$\text{Conclusion : } \boxed{x = -3}$$

Le 22 janvier 2007.

## EXALG239 – Bruxelles, juillet 2006.

Déterminer toutes les valeurs du paramètre  $m$  pour lesquelles la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2m^2 - 1 & 1 - m^2 & -1 \\ 1 - 2m^2 & m^2 & m^2 \\ -1 & m^2 & 1 \end{pmatrix}$$

est inversible.

Calculer l'inverse de cette matrice dans le cas où  $m = 2$

---

Pour que la matrice soit inversible, il faut que son déterminant soit différent de zéro.

Calculons ce déterminant :

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 2m^2 - 1 & 1 - 2m^2 & -1 \\ 1 - 2m^2 & m^2 & m^2 \\ -1 & m^2 & 1 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 2m^2 - 1 & 1 - 2m^2 & -1 \\ 2(1 - m^2) & 0 & m^2 - 1 \\ -1 & m^2 & 1 \end{vmatrix} \\ &= (m^2 - 1) \begin{vmatrix} 2m^2 - 1 & 1 - 2m^2 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \\ -1 & m^2 & 1 \end{vmatrix} = (m+1)(m-1) \begin{vmatrix} 2m^2 - 3 & 1 - 2m^2 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & m^2 & 0 \end{vmatrix} \\ &= -(m+1)(m-1) \begin{vmatrix} 2m^2 - 3 & 1 - 2m^2 \\ 1 & m^2 \end{vmatrix} = -(m+1)(m-1)(2m^4 - m^2 - 1) \\ &= -(m+1)^2 (m-1)^2 (2m^2 + 1) \end{aligned}$$

Donc la matrice est inversible si  $x \neq \pm 1$

b) Première méthode

Soit donc la matrice  $M = \begin{pmatrix} 7 & -7 & -1 \\ -7 & 4 & 4 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ . Utilisons la méthode de Gauss

Ligne	Opération						
$L_1$		7	-7	-7	1	0	0
$L_2$		-7	4	4	0	1	0
$L_3$		-1	4	1	0	0	1
$L_4$	$L_1/7$	1	-1	$-1/7$	$1/7$	0	0
$L_5$	$L_2/7$	-1	$4/7$	$4/7$	0	$1/7$	0
$L_6$		-1	4	1	0	0	1
$L_7$		1	-1	$-1/7$	$1/7$	0	0
$L_8$	$L_5 + L_4$	0	$-3/7$	$3/7$	$1/7$	$1/7$	0
$L_9$	$L_6 + L_4$	0	3	$6/7$	$1/7$	0	1
$L_{10}$		1	-1	$-1/7$	$1/7$	0	0
$L_{11}$	$-3.L_8/7$	0	1	-1	$-1/3$	$-1/3$	0
$L_{12}$	$\frac{7}{27}(L_9 + 7.L_8)$	0	0	1	$8/27$	$7/27$	$7/27$
$L_{13}$	$L_{10} + L_{11}$	1	0	$-8/7$	$-4/21$	$-1/3$	0
$L_{14}$	$L_{11} + L_{12}$	0	1	0	$-1/27$	$-2/27$	$7/27$
$L_{15}$		0	0	1	$8/27$	$7/27$	$7/27$
$L_{16}$	$L_{13} + \frac{8}{7}L_{15}$	1	0	0	$4/27$	$-1/27$	$8/27$
$L_{17}$		0	1	0	$-1/27$	$-2/27$	$7/27$
$L_{18}$		0	0	1	$8/27$	$7/27$	$7/27$

Et finalement :  $M^{-1} = \begin{pmatrix} 4/27 & -1/27 & 8/27 \\ -1/27 & -2/27 & 7/27 \\ 8/27 & 7/27 & 7/27 \end{pmatrix}$

On vérifie facilement que  $M^{-1}.M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$



### Deuxième méthode

Si  $M$  est la matrice donnée, alors  $M^{-1} = \frac{1}{\det M} \mathfrak{M}^T$

Avec  $\mathfrak{M}^T$  la matrice transposée des cofacteurs de  $M$  :

Chaque élément de  $\mathfrak{M}$  est donné par  $\mathfrak{M}_{ij} = (-1)^{i+j} \det U_{ik}$

où  $\det U_{ik}$  est le mineur c'est-à-dire le déterminant d'ordre  $n-1$  obtenu en supprimant la range  $i$  et la colonne  $k$ .

$$\text{Donc : } M = \begin{pmatrix} 7 & -7 & -1 \\ -7 & 4 & 4 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \mathfrak{M} = \begin{pmatrix} -12 & +3 & -24 \\ +3 & +6 & -21 \\ -24 & -21 & -21 \end{pmatrix}$$

Ici  $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}^T$  car la matrice est symétrique

D'autre part :  $\det M = -(m+1)(m-1)(2m^4 - m^2 - 1) = -81$

$$\rightarrow M^{-1} = \frac{1}{\det M} \mathfrak{M}^T = \begin{pmatrix} -12/81 & +3/81 & -24/81 \\ +3/81 & +6/81 & -21/81 \\ -24/81 & -21/81 & -21/81 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/27 & -1/27 & 8/27 \\ -1/27 & -2/27 & 7/27 \\ 8/27 & 7/27 & 7/27 \end{pmatrix}$$

---

Le 23 janvier 2007.