

Exercices résolus de mathématiques.

Algèbre

ALG 24

EXALG240 – EXALG249

<http://www.matheux.be.tf>

Jacques Collot

Juillet 08

EXALG240 – FACS, ULB, Bruxelles, septembre 2006.

Déterminer l'ensemble S de tous les nombres complexes $x + iy$ ($x, y \in \mathbb{R}$) tels que $(x + iy)^3$ est un réel strictement supérieur à 8.

Représenter dans le plan de Gauss l'ensemble S

Soit donc $(x + iy)$ le nombre cherché tel que $(x + iy)^3 = X > 8$
où X désigne un nombre réel.

$$\text{On a : } (x + iy)^3 = x^3 + 3ix^2y - 3xy^2 - iy^3 = (x^3 - 3xy^2) + (3x^2y - y^3)i$$

$$\text{Il faut donc : } \begin{cases} x^3 - 3xy^2 > 8 \\ 3x^2y - y^3 = 0 \end{cases}$$

On factorise la deuxième équation : $3x^2y - y^3 = y(\sqrt{3}x - y)(\sqrt{3}x + y)$

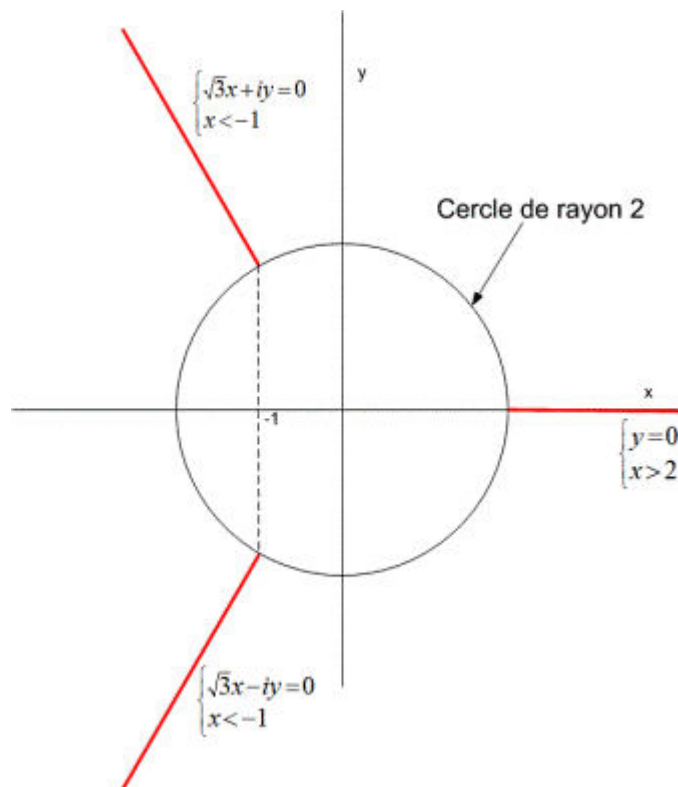
$$\text{Cas 1 : } y = 0 \rightarrow x > 2$$

$$\text{Cas 2 : } y = +\sqrt{3}x \rightarrow x^3 - 9x^3 > 8 \rightarrow -8x^3 > 8 \rightarrow x < -1$$

$$\text{Cas 3 : } y = -\sqrt{3}x \rightarrow x^3 - 9x^3 > 8 \rightarrow -8x^3 > 8 \rightarrow x < -1$$

L'ensemble S se représente dans le plan de Gauss par trois demi-droites

$$\begin{cases} y = 0 \text{ avec } x > 2 \\ y = \sqrt{3}x \text{ avec } x < -1 \\ y = -\sqrt{3}x \text{ avec } x < -1 \end{cases}$$



Le 18 juillet 2006.

EXALG241 – Bruxelles, septembre 2006.

Résoudre dans \mathfrak{R}^3 , en discutant en fonction du paramètre réel m , le système

$$\begin{cases} mx + y = 1 \\ x - y = mz \\ x + y = 2mz - 1 \end{cases}$$

Indiquer un résumé final de la discussion de ce système.

$$\text{Soit donc le système : } \begin{cases} mx + y & = & 1 \\ x - y - mz & = & 0 \\ x + y - 2mz & = & -1 \end{cases}$$

Calculons les Δ

$$\Delta = \begin{vmatrix} m & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -m \\ 1 & 1 & -2m \end{vmatrix} = -m(3m+1) \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -m \\ -1 & 1 & -2m \end{vmatrix} = 4m$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} m & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -m \\ 1 & -1 & -2m \end{vmatrix} = m(1-m) \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1+m$$

Cas 1 : $m = 0$

$$\text{Le système devient : } \begin{cases} y = 1 \\ x - y = 0 \\ x + y = -1 \end{cases} \quad \text{Système impossible}$$

Cas 2 : $m = -\frac{1}{3}$

$$\text{Le système devient : } \begin{cases} -\frac{x}{3} + y = 1 \\ x - y + \frac{z}{3} = 0 \\ x + y + \frac{2z}{3} = -1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -x + 3y = 3 \\ 3x - 3y + z = 0 \\ 3x + 3y + 2z = -3 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} 2x + z = 3 \\ 6x + 3z = -3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x + z = 3 \\ 2x + z = -1 \end{cases} \quad \text{Système impossible.}$$

Dans les autres cas : $m \neq 0$; $m \neq -\frac{1}{3}$

$$\begin{cases} x = \frac{4}{3m+1} \\ y = \frac{1-m}{3m+1} \\ z = \frac{1+m}{m(3m+1)} \end{cases}$$

Le 25 janvier 2007.

EXALG242 – Bruxelles, septembre 2006.

Simplifier au maximum l'expression réelle

$$\frac{\left(\frac{4a^5b^2 - 9b^4a^3}{4a^4b^3 + 12a^3b^4 + 9b^5a^2} \right)}{\left(\frac{8a^5b - 27a^2b^4}{2a^4b^2 - 2a^2b^4 + 3a^3b^3 - 3ab^5} \right)}$$

La réponse finale doit être factorisée au maximum

$$\begin{aligned} E &= \frac{\left(\frac{4a^5b^2 - 9b^4a^3}{4a^4b^3 + 12a^3b^4 + 9b^5a^2} \right)}{\left(\frac{8a^5b - 27a^2b^4}{2a^4b^2 - 2a^2b^4 + 3a^3b^3 - 3ab^5} \right)} = \frac{a^3b^2(4a^2 - 9b^2)}{a^2b^3(4a^2 + 12ab + 9b^2)} \cdot \frac{ab^2(2a^3 - 2ab^2 + 3a^2b - 3b^3)}{a^2b(8a^3 - 27b^3)} \\ &= \frac{a^4b^4 \cancel{(2a+3b)} \cancel{(2a-3b)} [2a(a^2 - b^2) + 3b(a^2 - b^2)]}{a^4b^4 \cancel{(2a+3b)} \cancel{(2a-3b)} (4a^2 + 6ab + 9b^2)} \\ &= \frac{(a+b)(a-b) \cancel{(2a+3b)}}{\cancel{(2a+3b)} (4a^2 + 6ab + 9b^2)} = \frac{(a+b)(a-b)}{4a^2 + 6ab + 9b^2} \end{aligned}$$

Si on travaille dans le corps des réels, on s'arrête ici.

Si on travaille dans le corps des complexes, on peut continuer.

Factorisons le dénominateur :

$$4a^2 + 6ab + 9b^2 = 0 \rightarrow a = \frac{-3b \pm 3\sqrt{3}ib}{4} \rightarrow 4a^2 + 6ab + 9b^2 = 4 \left(a + \frac{3b + 3\sqrt{3}ib}{4} \right) \left(a + \frac{3b - 3\sqrt{3}ib}{4} \right)$$

Et finalement :

$$E = \frac{4(a+b)(a-b)}{(4a+3b+3\sqrt{3}ib)(4a+3b-3\sqrt{3}ib)}$$

Le 25 janvier 2007.

EXALG243 – Bruxelles, septembre 2006.

Résoudre dans \mathfrak{R} l'équation

$$\sqrt{4x+8} - \sqrt{1-x} = \sqrt{5+x}$$

CE

1) $x \geq -2$

2) $x \leq 1$

3) Comme le membre de gauche doit être positif ou nul, on a aussi

$$4x+8 \geq 1-x \rightarrow x \geq -\frac{7}{5}$$

Conclusion : $-\frac{7}{5} \leq x \leq 1$

Résolvons maintenant l'équation par des carrés successifs.

$$4x+8 - 2\sqrt{(4x+8)(1-x)} + 1-x = 5+x$$

$$\rightarrow 2x+4 = 2\sqrt{-4x^2-4x+8} \rightarrow x^2+4x+4 = -4x^2-4x+8$$

$$\rightarrow 5x^2+8x-4=0 \rightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{16+4 \times 5}}{5} = \frac{-4 \pm 6}{5} \rightarrow \begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = \frac{2}{5} \end{cases} \quad \text{A rejeter}$$

Conclusion : $x = \frac{2}{5}$

Le 25 janvier 2007.

EXALG244 – EPL, UCL, LLN, juillet, série 1- 2006.

Soit l'équation en x où m est un paramètre réel

$$x^4 - mx^2 + m$$

Déterminer le nombre de racines réelles distinctes selon les valeurs de m .

Solution proposée par Jan Frans Broeckx

Transformation de l'équation

L'équation (1) est une équation *bicarrée*. Posons :

$$x^2 = y \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm\sqrt{y} \quad \text{avec comme condition : } y \geq 0$$

L'équation en y est alors :

$$y^2 - my + m = 0 \tag{2}$$

Discussion

Le discriminant de (2) est :

$$\Delta = m^2 - 4m = m(m - 4) \tag{3}$$

(1) $0 < m < 4$

$\Delta < 0 \Rightarrow$ l'équation (2) en y n'a pas de racines réelles

\Rightarrow l'équation (1) en x n'a aucune racine réelle

(2) $m = 0$

$\Delta = 0$ et l'équation (2) devient $y^2 = 0$ avec comme solution unique $y = 0$

\Rightarrow l'équation (1) a une seule solution réelle $x = 0$

(3) $m = 4$

$\Delta = 0$ et l'équation (2) devient $(y - 2)^2 = 0$ avec comme solution unique $y = +2$

\Rightarrow l'équation (1) a deux solutions réelles $x = \pm\sqrt{2}$

(4) $m < 0$

$$\Delta > 0 \Rightarrow y_1 = \frac{1}{2}(m + \sqrt{m(m-4)}) \quad \text{et} \quad y_2 = \frac{1}{2}(m - \sqrt{m(m-4)})$$

Puisque m est négatif, la racine y_2 est négative ; elle ne contribue donc pas aux racines réelles de l'équation (1).

La racine y_1 sera positive à condition que :

$$\sqrt{m(m-4)} > |m| \Leftrightarrow m(m-4) > m^2 \Leftrightarrow -4m > 0$$

Cette condition est vérifiée puisque m est négatif.

\Rightarrow l'équation (1) a deux solutions réelles $x = \pm\sqrt{y_1}$

(5) $m > 4$

$$\Delta > 0 \Rightarrow y_1 = \frac{1}{2}(m + \sqrt{m(m-4)}) \quad \text{et} \quad y_2 = \frac{1}{2}(m - \sqrt{m(m-4)})$$

Puisque m est positif, la racine y_1 est positive ; elle contribue donc deux racines réelles $x = \pm\sqrt{y_1}$ à l'équation (1).

La racine y_2 sera positive à condition que :

$$\sqrt{m(m-4)} < m \Leftrightarrow m(m-4) < m^2 \Leftrightarrow +4m > 0$$

Cette condition est vérifiée puisque m est positif.

\Rightarrow l'équation (1) a quatre solutions réelles $x = \pm\sqrt{y_1}$ et $x = \pm\sqrt{y_2}$

Résumé final

Soit N le nombre de racines réelles distinctes de l'équation (1) ; alors :

si $m < 0$, alors $N = 2$;

si $m = 0$, alors $N = 1$;

si $0 < m < 4$, alors $N = 0$;

si $m = 4$, alors $N = 2$;

si $m > 4$, alors $N = 4$.

Solution proposée par Nicole BERCKMANS

Pour $y = x^2$, on a $y^2 - my + m = 0$ dont le discriminant $\Delta = m(m-4)$,

produit $P = m$, somme $S = m$ et $y_i = \frac{m \pm \sqrt{\Delta}}{2}$

$m < 0$	$\Delta > 0, P = S = m, y_1 < 0 < y_2$	2 racines
	$x_1 = \sqrt{y_2}, x_2 = -\sqrt{y_2}$	
$m = 0$	$D = P = S = 0, x^4 = 0, x = 0$	1 racine
$0 < m < 4$	$\Delta < 0,$	Pas de racine
$m = 4$	$\Delta = 0, P = S = 4, y_1 = y_2 = 2$	2 racines
	$x_1 = \sqrt{2}, x_2 = -\sqrt{2}$	
$4 < m$	$\Delta > 0, P = S > 0$	4 racines
	y_1 et $y_2 > 0$	
	$x_1 = \sqrt{y_1}, x_2 = -\sqrt{y_1}, x_3 = \sqrt{y_2}, x_4 = -\sqrt{y_2}$	

Le 4 mars 2007. Modifié le 27 janvier 2012 (Jan Frans Broeckx). Modifié le 5 septembre 2014 (Nicole Berckmans)

EXALG245 – Louvain, juillet, série 1- 2006.

Résoudre dans les complexes, l'équation suivante

$$z^4 - 2z^3 + 14z^2 - 18z + 45 = 0$$

sachant que $(1+2i)$ est une racine

Si $1+2i$ est une racine alors $1-2i$ est également une racine.

Le polynôme $P(x)$ est donc divisible par $(x-1+2i)(x-1-2i) = x^2 - 2x + 5$

Effectuons la division

$$\begin{array}{r|rrrrr} 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & \\ \hline 1 & -2 & 14 & -18 & 45 & \frac{x^2 - 2x + 5}{x^2 + 9} \\ \frac{1}{0} & \frac{-2}{0} & \frac{5}{9} & & & \\ & & \frac{9}{0} & \frac{-18}{0} & \frac{45}{0} & \end{array}$$

On a donc

$$P(x) = (x-1+2i)(x-1-2i)(x-3i)(x+3i)$$

Les solutions sont alors : $S = \{1+2i; 1-2i; -3i; 3i\}$

Le 4 mars 2007.

EXALG246 – Louvain, juillet, série 1- 2006.

Sous quelle condition sur les paramètres réels m et n , le système suivant en x et y réels admet-il une solution ?

$$\begin{cases} mx + 3y + 2 = 0 \\ x - 3y = 2 \\ 2mx - ny + 2 = 0 \\ 2x - 3y + 10 = 0 \end{cases}$$

Méthode 1

C'est un système linéaire de 4 équations à 2 inconnues

Pour que le système admette 1 solution il faut que deux équations soient la combinaison linéaire des deux autres.

$$\begin{cases} mx + 3y + 2 = 0 & (1) \\ x - 3y = 2 & (2) \\ 2mx - ny + 2 = 0 & (3) \\ 2x - 3y + 10 = 0 & (4) \end{cases}$$

Exprimons que l'équation (1) est combinaison linéaire de (2) et (4)

$$mx + 3y + 2 = kx - 3ky - 2k + 2hx - 3hy + 10h = (k + 2h)x + (-3k - 3h)y + (-2k + 10h)$$

$$\rightarrow \begin{cases} k + 2h = m & (5) \\ -3k - 3h = 3 & (6) \\ -2k + 10h = 2 & (7) \end{cases} \rightarrow \text{avec (6) et (7)} \rightarrow \begin{cases} k = -1 \\ h = 0 \end{cases}$$

On remplace dans (5) $\rightarrow \boxed{m = -1}$

Exprimons que l'équation (3) est combinaison linéaire de (2) et (4)

$$2mx - ny + 2 = (k + 2h)x + (-3k - 3h)y + (-2k + 10h)$$

$$\rightarrow \begin{cases} k + 2h = 2m = -2 & (8) \\ -3k - 3h = -n & (9) \\ -2k + 10h = 2 & (10) \end{cases} \rightarrow \text{avec (8) et (10)} \rightarrow \begin{cases} k = -\frac{12}{7} \\ h = -\frac{1}{7} \end{cases}$$

On remplace dans (9) $\rightarrow \boxed{n = -\frac{39}{7}}$

Méthode 2

$$\begin{cases} mx + 3y + 2 = 0 & (1) \\ x - 3y = 2 & (2) \\ 2mx - ny + 2 = 0 & (3) \\ 2x - 3y + 10 = 0 & (4) \end{cases}$$

Exprimons que la solution de (2) et (4) est aussi solution de (1) et (3)

$$\rightarrow \begin{cases} x - 3y = 2 \\ 2x - 3y + 10 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -12 \\ y = -\frac{14}{3} \end{cases}$$

On remplace dans (1) et (3)

$$\rightarrow \begin{cases} m(-12) + 3\left(-\frac{14}{3}\right) + 2 = 0 \\ 2m(-12) - n\left(-\frac{14}{3}\right) + 2 = 0 \end{cases} \rightarrow \boxed{\begin{cases} m = -1 \\ n = -\frac{39}{7} \end{cases}}$$

Le 4 mars 2007.

EXALG247 – EPL, UCL, LLN, juillet, série 1- 2006.

On considère un cylindre de longueur L et de diamètre Φ .

Déterminer les valeurs de x dont il faut à la fois diminuer la longueur et augmenter le diamètre pour obtenir d'autres cylindres dont le volume serait identique à celui d'origine. Discuter les solutions en fonction du diamètre et de la longueur.

Soit x la valeur, avec $x > 0$. (1)

Soit $L' = L - x$ la nouvelle longueur et $\Phi' = \Phi + x$ le nouveau diamètre

Ce qui impose une deuxième condition : $L' > 0 \rightarrow x < L$ (2)

$$\text{Nous devons avoir : } V = \frac{\pi L \Phi^2}{4} = \frac{\pi L' \Phi'^2}{4} = \frac{\pi (L-x)^2 (\Phi+x)^2}{4}$$

$$\rightarrow L \Phi^2 = (L-x)^2 (\Phi+x)^2 \rightarrow x^2 + (2\Phi - L)x - 2L\Phi + \Phi^2 = 0$$

Calculons le Δ de cette équation du second degré :

$$\Delta = (2\Phi - L)^2 + 8L\Phi - 4\Phi^2 = L(L + 4\Phi) \text{ qui est toujours positif}$$

$$\text{Il y a donc en principe deux solutions : } x = \frac{-(2\Phi - L) \pm \sqrt{L(L + 4\Phi)}}{2}$$

Mais nous devons vérifier que les conditions (1) et (2) sont remplies

$$\underline{\underline{1) Etude de } x = \frac{1}{2} \left(-(2\Phi - L) - \sqrt{L(L + 4\Phi)} \right)}$$

1.1 $x > 0$

$$\frac{1}{2} \left(-(2\Phi - L) - \sqrt{L(L + 4\Phi)} \right) > 0 \rightarrow -(2\Phi - L) > \sqrt{L(L + 4\Phi)}$$

Comme second membre est positif, cela implique que $L > 2\Phi$

Élevons l'équation au carré. Il vient : $4\Phi^2 - 4\Phi L + L^2 > L^2 + 4L\Phi$

$$\rightarrow 4\Phi(\Phi - 2L) > 0 \rightarrow \text{Ce qui est impossible puisque } \begin{cases} \Phi > 0 \\ L > 2\Phi \end{cases}$$

$$\underline{\underline{2. Etude de x = \frac{1}{2} \left(-(2\Phi - L) + \sqrt{L(L + 4\Phi)} \right)}}$$

2.1 $x > 0$

$$\frac{1}{2} \left(-(2\Phi - L) + \sqrt{L(L + 4\Phi)} \right) > 0 \rightarrow \sqrt{L(L + 4\Phi)} > 2\Phi - L$$

Elevons l'equation au carré. Il vient : $L^2 + 4L\Phi > 4\Phi^2 - 4\Phi L + L^2$
 $\rightarrow 8\Phi L - 4\Phi^2 > 0 \rightarrow 4\Phi(2L - \Phi) > 0$ et comme $\Phi > 0$, on obtient
la condition : $\Phi < 2L$

2.2 $x < L$

$$\frac{1}{2} \left(-(2\Phi - L) + \sqrt{L(L + 4\Phi)} \right) < L \rightarrow \sqrt{L(L + 4\Phi)} < L + 2\Phi$$
$$\rightarrow L^2 + 4L\Phi < L^2 + 4L\Phi + 4\Phi^2 \rightarrow 0 < 4\Phi^2 \text{ Ce qui est toujours vérifié.}$$

Conclusion

Pour $\Phi < 2L$, une solution donnée par $x = \frac{1}{2} \left(-2\Phi + L + \sqrt{L(L + 4\Phi)} \right)$

Exemple

$$\begin{cases} L = 4 \\ \Phi = 3 \end{cases} \rightarrow x = 3 \rightarrow \begin{cases} L' = 1 \\ \Phi' = 6 \end{cases} \text{ et on vérifie } V = \frac{\pi \times 4 \times 3^2}{4} = \frac{\pi \times 1 \times 6^2}{4} = 9\pi$$

Le 4 mars 2007.

EXALG248 – Louvain, juillet, série 2- 2006.

Soit m un paramètre réel. Résoudre et discuter l'équation suivante (dans les réels)

$$\sin^2 x + 4m \cos x - 2m - 3 = 0$$

$$\begin{aligned} \sin^2 x + 4m \cos x - 2m - 3 = 0 &\rightarrow 1 - \cos^2 x + 4m \cos x - 2m - 3 = 0 \\ &\rightarrow \cos^2 x - 4m \cos x + 2(m+1) = 0 \end{aligned}$$

Calculons le Δ' puisque le coefficient du $\cos x$ est pair :

$$\Delta' = 4m^2 - 2m - 2$$

Ce réalisant doit être positif :

$$m = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} m_1 = 1 \\ m_2 = -\frac{1}{2} \end{array} \right. \rightarrow m \in \left[-\frac{1}{2}; 1 \right] \cup [1; \rightarrow] \quad (C1)$$

$$\text{Et donc : } \cos x = 2m \pm \sqrt{4m^2 - 2m - 2}$$

Cependant, il faut : $-1 \leq \cos x \leq 1$

1) Etude de $-1 \leq 2m + \sqrt{4m^2 - 2m - 2} \leq 1$

$$\begin{aligned} 1.1 \quad -1 \leq 2m + \sqrt{4m^2 - 2m - 2} &\rightarrow -1 - 2m \leq \sqrt{4m^2 - 2m - 2} \\ &\rightarrow 1 + 4m + 4m^2 \leq 4m^2 - 2m - 2 \rightarrow m \leq -\frac{1}{2} \end{aligned} \quad (C2)$$

$$1.2 \quad 2m + \sqrt{4m^2 - 2m - 2} \leq 1 \rightarrow \sqrt{4m^2 - 2m - 2} \leq 1 - 2m \quad (1)$$

Comme la racine est positive, on a donc comme condition

$$1 - 2m \geq 0 \rightarrow m \leq \frac{1}{2} \quad \text{On retrouve la condition (C2)}$$

Elevons maintenant (1) au carré $\rightarrow 4m^2 - 2m - 2 \leq 1 - 4m + 4m^2$

$$\rightarrow 2m \leq 3 \rightarrow m \leq \frac{3}{2} \quad (C3)$$

En résumé, Les conditions (C1), (C2) et (C3) doivent être vérifiées simultanément

$$\rightarrow \boxed{m \leq -\frac{1}{2}}$$

2) Etude de $-1 \leq 2m - \sqrt{4m^2 - 2m - 2} \leq 1$

$$\begin{aligned} 2.1 \quad -1 \leq 2m - \sqrt{4m^2 - 2m - 2} &\rightarrow \sqrt{4m^2 - 2m - 2} \leq 2m + 1 \\ &\rightarrow 4m^2 - 2m - 2 \leq 4m^2 + 4m + 1 \rightarrow 6m \geq -3 \rightarrow m \geq -\frac{1}{2} \end{aligned} \quad (C4)$$

$$\begin{aligned} 2.2 \quad 2m - \sqrt{4m^2 - 2m - 2} &\leq 1 \rightarrow 2m - 1 \leq \sqrt{4m^2 - 2m - 2} \\ &\rightarrow 4m^2 - 4m + 1 \leq 4m^2 - 2m - 2 \rightarrow 2m \geq 3 \rightarrow m \geq \frac{3}{2} \end{aligned} \quad (C5)$$

En résumé, Les conditions (C1), (C4) et (C5) doivent être vérifiées simultanément

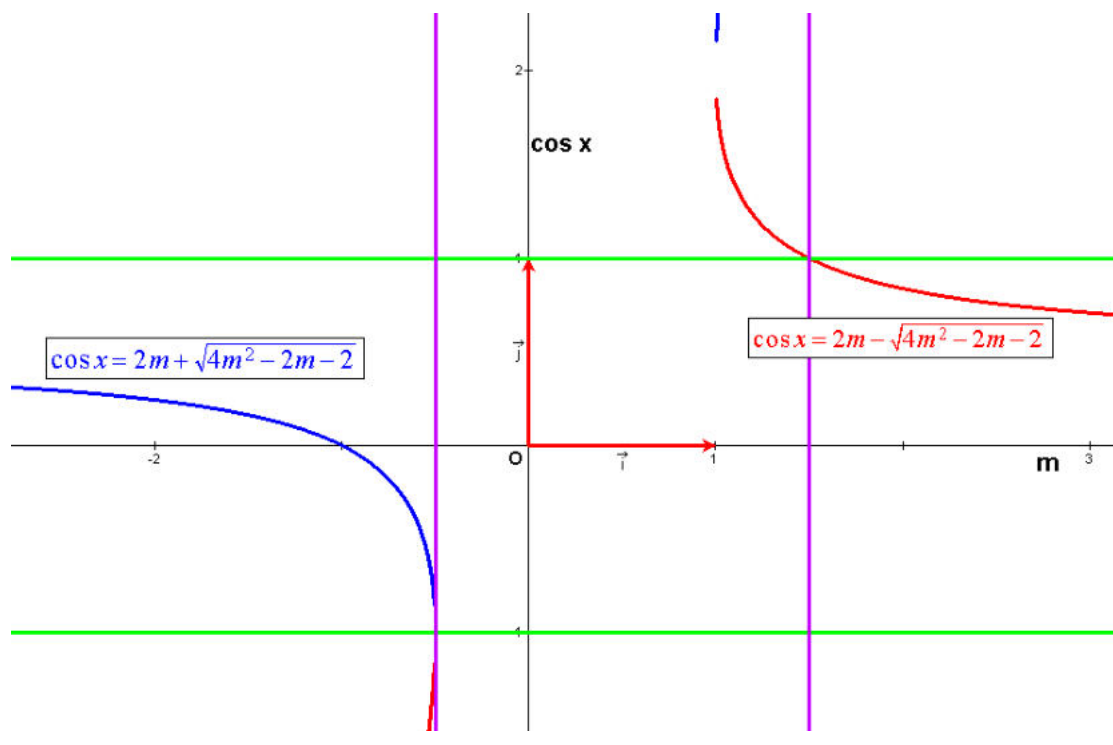
$$\rightarrow \boxed{m \leq \frac{3}{2}}$$

Récapitulatif

$$m \leq -\frac{1}{2} \quad x = \pm \arccos\left(2m + \sqrt{4m^2 - 2m - 2} + 2k\pi\right)$$

$$m \geq \frac{3}{2} \quad x = \pm \arccos\left(2m + \sqrt{4m^2 - 2m - 2} + 2k\pi\right)$$

Le graphique suivant résume la situation



Le 24 mars 2007.

EXALG249 – Louvain, juillet, série 2- 2006.

Déterminez a, b, c pour que le polynôme :

$$ax^5 + bx^4 + cx^3 + 1$$

soit divisible par $(x-1)^3$

Soit $P(x) = ax^5 + bx^4 + cx^3 + 1$

On doit avoir :

$$P(x) = (x-1)^3(mx^2 + nx + p) = (x^3 - 3x^2 + 3x - 1)(mx^2 + nx + p)$$

$$= mx^5 + (-3m + n)x^4 + (3m - 3n + p)x^3 + (-3 + 3n - 3p)x^2 + (-n + 3p)x - p$$

Ce qui par identification donne :

$$\begin{cases} m = a \\ -3m + n = b \\ 3m + 3n - 3p = c \\ -m + 3n - 3p = 0 \\ -n + 3p = 0 \\ -p = 1 \end{cases} \quad \text{Ce qui se résoud facilement pour donner} \quad \begin{cases} a = -6 \\ b = 15 \\ c = -10 \\ m = -6 \\ n = -3 \\ p = -1 \end{cases}$$

$$\rightarrow \boxed{P(x) = -6x^5 + 15x^4 - 10x^3 + 1}$$

Effectuons la division

5	4	3	2	1	0	
-6	15	-10	0	0	1	$x^3 - 3x^2 + 3x - 1$
<u>-6</u>	<u>18</u>	<u>-18</u>	<u>6</u>			$-6x^2 - 3x - 1$
0	-3	8	-6			
	<u>-3</u>	<u>9</u>	<u>-9</u>	<u>3</u>		
	0	-1	3	-3		
		<u>-1</u>	<u>3</u>	<u>-3</u>	<u>1</u>	
		0	0	0	0	

$$\rightarrow P(x) = -(x-1)^3(6x^2 + 3x + 1)$$

Le 4 mars 2007.