Exercices résolus de mathématiques.

Algèbre

ALG 25

EXALG250 – EXALG259

http://www.matheux.be.tf

Jacques Collot

Juillet 08

EXALG250 – Louvain, juillet, série 2- 2006.

Résoudre, dans les nombres réels, le système d'équation suivant en *x* et *y* :

$$\begin{cases} \dfrac{x}{x-a}+\dfrac{y}{y-b}=2 \\ (a+b)(x-3y)=a^2+3b^2 \end{cases}$$

où *a* et *b* sont deux paramètres réels.

CE : $x \neq a$ et $y \neq b$

Transformons le système : $\begin{cases} \dfrac{x}{x-a}+\dfrac{y}{y-b}=2 \\ (a+b)(x-3y)=a^2+3b^2 \end{cases}$

$\rightarrow \begin{cases} x(y-b)+y(x-a)=2(x-a)(y-b) \\ (a+b)(x-3y)=a^2+3b^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} bx+ay=2ab \\ x-3y=\dfrac{a^2+3b^2}{a+b} \end{cases}$

Ce qui suppose que $a+b \neq 0$ (Voir Cas 1)

Utilisons la méthode de Cramer.

$\Delta = \begin{vmatrix} b & a \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -(3b+a) \rightarrow 3b+a \neq 0$ (Voir Cas 2)

$\Delta_x = \begin{vmatrix} 2ab & a \\ \dfrac{a^2+3b^2}{a+b} & -3 \end{vmatrix} = -6ab - \dfrac{a(a^2+3b^2)}{a+b} = -\dfrac{a(3b+a)^2}{a+b}$

$\Delta_y = \begin{vmatrix} b & 2ab \\ 1 & \dfrac{a^2+3b^2}{a+b} \end{vmatrix} = \dfrac{b(a^2+3b^2)}{a+b} - 2ab = \dfrac{b}{a+b}(3b^2-a^2-2ab)$

Nous remarquons que $3b^2-a^2-2ab=0$ si $a=b$. Nous pouvons donc le factoriser : $3b^2-a^2-2ab=(b-a)(3b+a)$.

Finalement : $\Delta_y = \dfrac{b(b-a)(3b+a)}{a+b}$

<u>Cas 1 : $a+b=0$</u>

<u>1.1 $a=b=0$</u>

Le système devient : $\begin{cases} 1+1=2 \\ 0=0 \end{cases} \rightarrow$ Système doublement indéterminé

<u>1.2 $a=-b\neq 0$</u>

Le système devient $\begin{cases} \dfrac{x}{x-a}+\dfrac{y}{y+a}=2 \\ 0\times(x-3y)=4a^2 \end{cases} \rightarrow$ Système impossible

Cas 2 : $a+3b=0$

Le cas $a=b=0$ a déjà été étudié. Soit donc $a=-3b\neq 0$

Le système devient :

$$\begin{cases} \dfrac{x}{x+3b}+\dfrac{y}{y-b}=2 \\ -2b(x-3y)=12b^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x(y-b)+y(x+3b)=2(x+3b)(y-b) \\ x-3y=-6b \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x-3y=-6b \\ x-3y=-6b \end{cases} \rightarrow x=3y-6b \quad \text{Système simplement indéterminé.}$$

Solution

Ces cas étant éliminés, nous avons

$$\begin{cases} x=\dfrac{\Delta_x}{\Delta}=\dfrac{a(3b+a)}{a+b} \\ y=\dfrac{\Delta_y}{\Delta}=\dfrac{b(a-b)}{a+b} \end{cases}$$

Cependant, en vertu des CE, il nous reste à vérifier

$$\begin{cases} \dfrac{a(3b+a)}{a+b}\neq a \quad (1) \\ \dfrac{b(a-b)}{a+b}\neq b \quad (2) \end{cases}$$

Etudions la condition (1) : $\dfrac{a(3b+a)}{a+b}=a \rightarrow 3ab+a^2=a^2 \rightarrow 3ab=0$

Soit $a=0,\quad b\neq 0$

Le système devient : $\begin{cases} 1+\dfrac{y}{y-b}=2 \\ b(x-3y)=3b^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y=y-b \\ x-3y=3b \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b=0 \\ x-3y=3b \end{cases}$

Ce qui est impossible puisque par hypothèse $b\neq 0$

Soit $a\neq 0,\quad b=0$

Le système devient : $\begin{cases} \dfrac{x}{x-a}+1=2 \\ a(x-3y)=a^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=x-a \\ x-3y=a \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a=0 \\ x-3y=3b \end{cases}$

Ce qui est impossible puisque par hypothèse $a\neq 0$

Soit $a=b=0$: Voir Cas 1.1

Etudions la condition $(2): \dfrac{b(a-b)}{a+b} = b \rightarrow ab - b^2 = ab + b^2 \rightarrow b^2 = 0$
Les cas $a = b = 0$ et $a \neq 0, b = 0$ ont déjà été étudiés

Récapitulatif

$a = b = 0$	Système doublement indéterminé
$a = -b \neq 0$	Système impossible
$a = -3b \neq 0$	Système simplement indéterminé
$a = 0; b \neq 0$	Système impossible
$a \neq; b = 0$	Système impossible

Dans les autres cas :

$$\begin{cases} x = \dfrac{a(3b+a)}{a+b} \\ y = \dfrac{b(a-b)}{a+b} \end{cases}$$

Le 4 mars 2007.

EXALG251 – Louvain, juillet, série 2- 2006.

Un peindre en bâtiment commence son travail tôt le matin. Au bout d'un certain temps, un deuxième peintre vient l'aider. Au bout du même temps, un troisième peintre arrive ; et ainsi de suite jusqu'à ce que toute l'équipe, formée au total de 9 peintres, termine le travail. Les peintres travaillent à la même vitesse. Le premier a travaillé 3 fois plus de temps que le dernier arrivé et il n'aurait travaillé que 8 heures si l'équipe avait travaillé dès le début. Combien de temps a travaillé le premier peintre ?

Soit
x : L'intervalle de temps entre l'arrivée de chaque peintre
y : L'intervalle de temps entre l'arrivée du dernier peintre et la fin du travail.
Q : La quantité de travail fournit par heure et par peintre
W : La quantité totale de travail à fournir

Temps de travail du premier peintre : $t_1 = 8x + y$
Temps de travail du dernier peintre : $t_9 = y$
Nous avons donc : $8x + y = 3y \to 4x = y \quad (1)$

Quantité de travail fournie par l'ensemble des peintres :
$W = (t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5 + t_6 + t_7 + t_8 + t_9).Q$
$\to \frac{W}{Q} = 8x + 7x + 6x + 5x + 4x + 3x + 2x + x + 9y = 36x + 9y \quad (2)$
Si les 9 peintres avaient commencé en même temps, ils auraient travaille 8 h
$\to W = 8 \times 9 \times Q \to \frac{W}{Q} = 72 \quad (3)$

$(1), (2)$ et (3) conduisent au système : $\begin{cases} 4x = y \\ 36x + 9y = 72 \end{cases} \to \begin{cases} x = 1 \\ y = 4 \end{cases}$
Le temps travaillé par le premier peintre est alors : $t_1 = 8x + y = \boxed{12h}$
On comprend pourquoi il a commencé tôt.

Le 4 mars 2007.

EXALG252 – Louvain, septembre- 2006.

Soit a un paramètre réel. Discuter et résoudre, dans les nombres réels, l'équation suivante :

$$\sqrt{e^{-x}-3}+\sqrt{e^{-x}}-a=0$$

$\sqrt{e^{-x}-3}+\sqrt{e^{-x}}-a=0 \qquad (1)$

Une première condition d'existence est : $e^{-x}-3\geq 0 \rightarrow e^{-x}\geq 3 \rightarrow x\leq -\ln 3$

Reprenons $(1)\rightarrow a=\sqrt{e^{-x}-3}+\sqrt{e^{-x}}$

Vu de cette façon, en en déduit que a est une fonction décroissante de x.

Soit donc $e^{-x}=3$, (1) devient $\sqrt{3}-a=0\rightarrow a=\sqrt{3}$.

En conclusion, l'équation (1) n'est possible que si $a\geq\sqrt{3}$

Nous pouvons maintenant résoudre l'équation :

$\sqrt{e^{-x}-3}+\sqrt{e^{-x}}-a=0\rightarrow\sqrt{e^{-x}-3}=-\sqrt{e^{-x}}+a\rightarrow e^{-x}-3=e^{-x}-2a\sqrt{e^{-x}}+a^2$

$\rightarrow\sqrt{e^{-x}}=\dfrac{3+a^2}{2a}\rightarrow e^{-x}=\left(\dfrac{3+a^2}{2a}\right)^2\rightarrow x=-2\ln\dfrac{3+a^2}{2a}$

<u>Résumé</u> $\boxed{x=-2\ln\dfrac{3+a^2}{2a}\quad\text{avec}\quad a\geq\sqrt{3}}$

Le 15 avril 2007.

EXALG253 – Louvain, septembre- 2006.

Déterminez, dans les nombres complexes, les valeurs de z (sous la forme $a + ib$) pour lesquelles on a :

$$z^7 - \frac{2+i}{i-3} z^4 - z^3 + \frac{2+i}{i-3} = 0$$

Remarquons que $\frac{2+i}{i-3} = \frac{(2+i)(i+3)}{(i-3)(i+3)} = -\frac{1}{10}(2i-1+6+3i) = -\frac{1}{10}(5i+5) = -\frac{1}{2}(i+1)$

L'équation devient :

$$z^7 + \frac{i+1}{2} z^4 - z^3 - \frac{i+1}{2} = 0 \rightarrow z^4\left(z^3 + \frac{i+1}{2}\right) - \left(z^3 + \frac{i+1}{2}\right) = 0 \rightarrow \left(z^3 + \frac{i+1}{2}\right)\left(z^4 - 1\right) = 0$$

$$\rightarrow \left(z^3 + \frac{i+1}{2}\right)(z+i)(z-i)(z+1)(z-1) = 0$$

Etudions le premier facteur

$$z^3 + \frac{i+1}{2} = 0 \rightarrow z^3 = -\frac{1}{2} - \frac{i}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{4} + 2k\pi\right) + i\sin\left(-\frac{3\pi}{4} + 2k\pi\right)\right)$$

Et par la formule de Moivre, nous obtenons :

$$z = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{2}}{2}}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{3}\right)\right)$$

Ce qui donne

$$k = 0 \quad \rightarrow \quad z_1 = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{2}}{2}}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} i\right) = \frac{1}{\sqrt[3]{2^2}}(1-i) \simeq 0.6300 - 0.6300i$$

$$k = 1 \quad \rightarrow \quad z_2 = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{2}}{2}}\left(\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12}\right) \simeq 0.2306 + 0.8605i$$

$$k = 2 \quad \rightarrow \quad z_3 = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{2}}{2}}\left(\cos\frac{13\pi}{12} + i\sin\frac{13\pi}{12}\right) \simeq -08605 - 02306i$$

<u>Récapitulatif</u> : les 7 solutions sont

$z_1 = 0.6300 - 0.6300i$	$z_4 = i$
$z_2 = 0.2306 + 0.8605i$	$z_5 = -i$
$z_3 = -0.8605 - 0.2306i$	$z_6 = 1$
	$z_7 = -1$

Le 15 avril 2007.

EXALG254 – Louvain, septembre- 2006.

Trouvez un polynôme $P(x)$ sachant que :

- il est du 4ème degré
- le reste de sa division par $(x - 1)$ vaut -30
- le reste de sa division par $(x - 2)$ vaut -54
- il est divisible par x
- il est divisible par $(x^2 + 5)$

et calculez les 4 racines de ce polynôme.

Compte tenu de l'énoncé, le polynôme cherché peut se mettre sous la forme :

$P(x) = x(x^2 + 5)(ax + b)$

De plus, le reste de la division de $P(x)$ par $x - 1$ vaut -30

$\rightarrow P(1) = -30 \rightarrow 6(a + b) = -30 \rightarrow a + b = -5 \qquad (1)$

Et le reste de la division par $x - 2$ vaut -54

$\rightarrow P(2) = -54 \rightarrow 18(2a + b) = -54 \rightarrow 2a + b = -3 \qquad (2)$

(1) et (2) forment un système:

$\begin{cases} a + b = -5 \\ 2a + b = -3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -7 \end{cases}$

Le polynôme est donc :

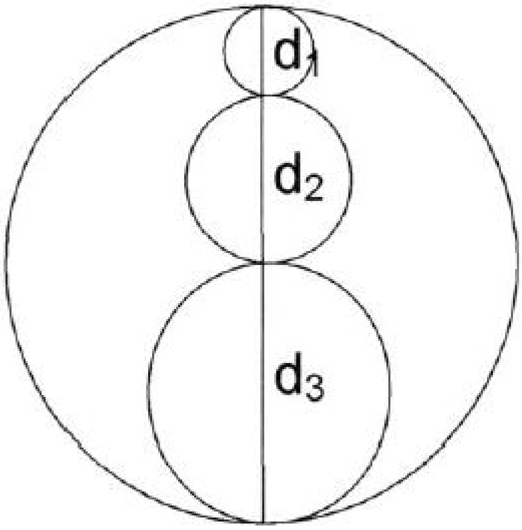
$\boxed{P(x) = x(x^2 + 5)(2x - 7) = 2x^4 - 7x^3 + 10x^2 - 35x}$

Et ces racines sont

$$\boxed{\begin{array}{ll} x_1 = 0 & x = i\sqrt{5} \\ x_2 = \dfrac{7}{2} & x = -i\sqrt{5} \end{array}}$$

Le 15 avril 2007.

EXALG255 – Louvain, septembre- 2006.



Dans sa pizzeria du centre de Palerme, Tino confectionne d'imposantes pizzas circulaires de 74 cm de diamètre, suffisamment copieuses pour satisfaire toute une famille. Pour répondre à une demande de certains clients, Tino décide de commercialiser des pizzas plus petites. Il les vendra par lots de 3 unités, de diamètres différents. En les mettant bout à bout, ces 3 pizzas entrent exactement dans les emballages des pizzas de diamètre 74 cm (voir figure). Le lot de 3 pizzas est vendu au prix d'une grande, ce qui lui procure un bénéfice appréciable, puisque la surface totale de ces 3 disques est exactement la moitié de celle d'une grande pizza de diamètre 74 cm. Par ailleurs, il se trouve que le carré de la différence entre le diamètre du plus petit disque et du disque de taille intermédiaire coïncide exactement avec le diamètre du plus grand disque.
Quels sont les diamètres des 3 pizzas ?

La somme des diamètre vaut 74 cm $\rightarrow d_1 + d_2 + d_3 = 74$ (1)

La surface des trois pizzas vaut la moitié de la grande $\rightarrow \frac{\pi d_1^2}{4} + \frac{\pi d_2^2}{4} + \frac{\pi d_3^2}{4} = \frac{\pi 74^2}{8}$ (2)

Le carré de la différence entre le diamètre du plus petit disque et du disque de taille intermèdiaire vaut le diamètre du plus grand disque $\rightarrow \left(d_2 - d_1\right)^2 = d_3$ (3)

$(1),(2)$ et (3) forment un sytème d'équation qui peut s'écrire :

$$\begin{cases} d_1 + d_2 + d_3 = 74 & (4) \\ d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 = \dfrac{74^2}{2} & (5) \\ \left(d_2 - d_1\right)^2 = d_3 & (6) \end{cases}$$

Calculons d_1 et d_2 en fonction de d_3 à partir de (4) et (6)

$$\begin{cases} d_1 + d_2 + d_3 = 74 \\ \left(d_2 - d_1\right)^2 = d_3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} d_1 + d_2 = 74 - d_3 \\ -d_1 + d_2 = \sqrt{d_3} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} d_1 = \dfrac{1}{2}\left(74 - \sqrt{d_3} - d_3\right) & (7) \\ d_2 = \dfrac{1}{2}\left(74 + \sqrt{d_3} - d_3\right) & (8) \end{cases}$$

Injectons (7) et (8) dans (5)

$$\rightarrow \frac{1}{4}\left(74 - \sqrt{d_3} - d_3\right)^2 + \frac{1}{4}\left(74 + \sqrt{d_3} - d_3\right)^2 + d_3^2 = \frac{74^2}{2}$$

$$\rightarrow \cancel{\frac{74^2}{4}} + \frac{d_3}{4} + \frac{d_3^2}{4} \cancel{-37\sqrt{d_3}} - 37d_3 + \cancel{\frac{74^2}{4}} + \frac{d_3}{4} + \frac{d_3^2}{4} + \cancel{37\sqrt{d_3}} - 37d_3 + d_3^2 = \cancel{\frac{74^2}{2}}$$

$$\rightarrow \frac{3d_3^2}{2} - \frac{147d_3}{2} = 0 \rightarrow d_3\left(3d_3 - 147\right) = 0$$

On rejete la solution $d_3 = 0,$ il reste $3d_3 - 147 = 0 \rightarrow d_3 = 49\ cm$

$$\text{Et donc} \begin{cases} (7) \rightarrow d_1 = \dfrac{1}{2}\left(74 - 7 - 49\right) = 9\ cm \\ (8) \rightarrow d_2 = \dfrac{1}{2}\left(74 + 7 - 49\right) = 16\ cm \end{cases}$$

<u>Conclusion</u> : $\boxed{d_1 = 9\ cm; \quad d_2 = 16\ cm, \quad d_3 = 49\ cm}$

Le 15 avril 2007.

EXALG256 – Liège, juillet 2007.

Résoudre le système suivant, pour toute valeur du paramètre réel a :

$$\begin{cases} ax + a^2y + z = a \\ x + a^2y + az = a \\ (a+1)x + 8y + (a+1)z = 4 \end{cases}$$

Solution proposée par Steve Tumson

Nous utiliserons bien sûr la traditionnelle méthode de Cramer.

Le système doit être remis sous la forme canonique : $A\vec{x} = \vec{b}$

$$\begin{pmatrix} a & a^2 & 1 \\ 1 & a^2 & a \\ a+1 & 8 & a+1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ a \\ 4 \end{pmatrix}$$ et on calcule $\Delta = \det A = 2\left(a^4 - 5a^2 + 4\right)$

C'est une équation bicarrée qui admet pour racines les valeurs $a = \pm 1$ et $a = \pm 2$

- Si $a \neq 1, a \neq -1, a \neq 2, \ a \neq -2$

$$\begin{aligned} \Delta_x &= 4a(a-2)(a-1) \\ \Delta_y &= 2(a+1)(a-1)(a-2) \\ \Delta_z &= 4a(a-2)(a-1) \end{aligned} \Rightarrow \text{ Solution unique } \boxed{\begin{aligned} x &= \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{2a}{(a+2)(a+1)} \\ y &= \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{1}{(a+2)} \\ z &= \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{2a}{(a+2)(a+1)} \end{aligned}}$$

- Si $a = 1$

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + y + z = 1 \\ 2x + 8y + 2z = 4 \end{cases} \Rightarrow \text{Système simplement indéterminé : } \boxed{S = \left\{\lambda, \frac{1}{3}, \frac{2}{3} - \lambda\right\}}$$

- Si $a = -1$

$$\begin{cases} -x + y + z = -1 \\ x + y - z = -1 \\ 8y = 4 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} -x + z = -1{,}5 \\ x - z = -1{,}5 \\ y = 0{,}5 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x - z = +1{,}5 \\ x - z = -1{,}5 \\ y = 0{,}5 \end{cases} \Rightarrow \text{Système impossible : } \boxed{S = \varnothing}$$

• Si $a=2$

$$\begin{cases} 2x+4y+z=2 \\ x+4y+2z=2 \\ 3x+8y+3z=4 \end{cases} \Rightarrow \text{ Système doublement indéterminé : } \boxed{S=\left\{\lambda,\frac{2-3\lambda}{4},\lambda\right\}}$$

En effet :

-la 3e équation est redondante aux deux premières car $L1+L2=L3$

-les deux premières équations imposent $x=z$ et sont donc redondantes entre elles

• Si $a=-2$

$$\begin{cases} -2x+4y+z=-2 \\ x+4y-2z=-2 \\ -x+8y-z=4 \end{cases} \xrightarrow{L1+L2} \begin{cases} -2x+4y+z=-2 \\ -x+8y-z=-4 \\ -x+8y-z=4 \end{cases} \Rightarrow \text{ Système impossible : } S=\varnothing$$

---

6 juillet 07. (Relu par Benoit Baudelet)

EXALG257 – Liège, juillet 2007.

Soit n un entier naturel.

1. En utilisant la formule de DE MOIVRE et celle du binôme de NEWTON, donner deux expressions différentes de
$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n$$
2. En déduire la formule suivante :
$$\tan(n\theta) = \tan\theta.\frac{n - C_n^3\tan^2\theta + C_n^5\tan^4\theta - ...}{1 - C_n^2\tan^2\theta + C_n^4\tan^4\theta - ...}$$
3. En déduire que les racines du polynôme
$$p(x) = x^6 - 21x^4 + 35x^2 - 7$$
Sont les réels $-\tan\frac{\pi}{7}$, $\tan\frac{\pi}{7}$, $-\tan\frac{2\pi}{7}$, $\tan\frac{2\pi}{7}$, $-\tan\frac{3\pi}{7}$ et $\tan\frac{3\pi}{7}$
4. En conclure que si α est une racine du polynôme $p(x)$ dont il est question au point précédent, alors $\frac{2\alpha}{1-\alpha^2}$ est également racine de $p(x)$

Solution proposée par Steve Tumson

1) De Moivre : $\boxed{(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)}$

Newton : $\boxed{(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (\cos\theta)^{n-k}(i\sin\theta)^k} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (\cos\theta)^n (i\tan\theta)^k$

2) On peut donc égaler ces deux relations : $\sum_{k=0}^{n} C_n^k (\cos\theta)^n (i\tan\theta)^k = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$

Deux nombres complexes sont égaux si leur partie réelle et imaginaire sont égales entre elles. L'expression de gauche est purement réelle quand k est paire et purement imaginaire quand k est impaire. On peut donc écrire :

- Pour k pair : $\cos(n\theta) = \sum_{kp=0}^{n} C_n^{kp} (\cos\theta)^n (\tan\theta)^{kp}\, sign(i^{kp})$
- Pour k impair : $\sin(n\theta) = \sum_{ki=0}^{n} C_n^{ki} (\cos\theta)^n (\tan\theta)^{ki}\, sign(i^{ki})$

Où " *sign* " est une fonction qui reprend le signe de son argument :

$sign(x) = 1$ si $x > 0$ $\qquad$ $sign(x) = -1$ si $x < 0$

Finalement :

$$\tan(n\theta) = \frac{\sin(n\theta)}{\cos(n\theta)} = \frac{\sum_{ki=0}^{n} C_n^{ki} \cancel{(\cos\theta)^n} (\tan\theta)^{ki}\, sign(i^{ki})}{\sum_{kp=0}^{n} C_n^{kp} \cancel{(\cos\theta)^n} (\tan\theta)^{kp}\, sign(i^{kp})} = \boxed{\tan\theta.\frac{n - C_n^3\tan^2\theta + C_n^5\tan^4\theta - ...}{1 - C_n^2\tan^2\theta + C_n^4\tan^4\theta - ...}}$$

3) Appliquons la formule trouvée dans le cas de $\tan 7\theta$

$$\tan 7\theta = \tan\theta.\frac{7 - C_7^3 \tan^2\theta + C_7^5 \tan^4\theta - C_7^7 \tan^6\theta}{1 - C_7^2 \tan\theta + C_7^4 \tan^4\theta - C_7^6 \tan^6\theta}$$

$$\to \tan 7\theta = \tan\theta.\frac{7 - 35\tan^2\theta + 21\tan^4\theta - \tan^6\theta}{1 - 21\tan^2\theta + 35\tan^4\theta - 7\tan^6\theta}$$

On reconnaît le polynôme $p(x)$ au numérateur du deuxième facteur.

Si θ est solution de $p(x)$, alors θ est aussi solution de $\tan 7\theta$, à condition que $\tan\theta \neq 0$ (qui n'est manifestement pas une solution) et que le dénominateur ne soit pas nul en même temps.

Résolvons $\tan 7\theta = 0 \to 7\theta = k\pi$

Les valeurs de θ sont alors

$k = 0 \quad \theta = 0$ A rejeter car alors $\tan\theta = 0$

$k = 1 \quad \theta = \frac{\pi}{7}$

$k = 2 \quad \theta = \frac{2\pi}{7}$

$k = 3 \quad \theta = \frac{3\pi}{7}$

$k = 4 \quad \theta = \frac{4\pi}{7} \to \theta = -\frac{3\pi}{7}$

$k = 5 \quad \theta = \frac{5\pi}{7} \to \theta = -\frac{2\pi}{7}$

$k = 6 \quad \theta = \frac{6\pi}{7} \to \theta = -\frac{\pi}{7}$

On vérifie facilement qu'aucune de ses valeurs n'annule le dénominateur.

Les solutions sont donc : $\boxed{\pm\frac{\pi}{7}; \pm\frac{2\pi}{7}; \pm\frac{3\pi}{7}}$

4) On remarque que $\frac{2\alpha}{1-\alpha^2}$ fait référence à la formule $\tan 2x = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$

De fait si $\tan\frac{k\pi}{7}\ (k = 1,....6)$ est solution alors $\tan\frac{2k\pi}{7}\ (k = 1,....6)$ est aussi solution.

Conclusion si α est solution alors $\frac{2\alpha}{1-\alpha^2}$ est également solution.

6 juillet 07

EXALG258 – Liège, juillet 2007.

Résoudre (en nombres réels) l'inéquation

$$1-\sqrt{\frac{3-x}{x}} \leq \frac{2}{x-1}$$

En précisant au préalable le plus grand domaine de définition de cette inéquation.

Solution proposée par Steve Tumson

Posons d'abord les conditions d'existence : CE : $x \in \left]0,3\right] \setminus \{1\}$

On réécrit l'inéquation : $\dfrac{x-3}{x-1} \leq \sqrt{\dfrac{3-x}{x}}$

Pour pouvoir élever au carré, il faut que les deux termes soient de même signe.
La racine carrée étant par définition toujours positive, il faut :

$$\frac{x-3}{x-1} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \left]-\infty,1\right[\cup \left[3,+\infty\right[$$

Ou encore en tenant compte des conditions d'existence : $x \in \left]0,1\right[$

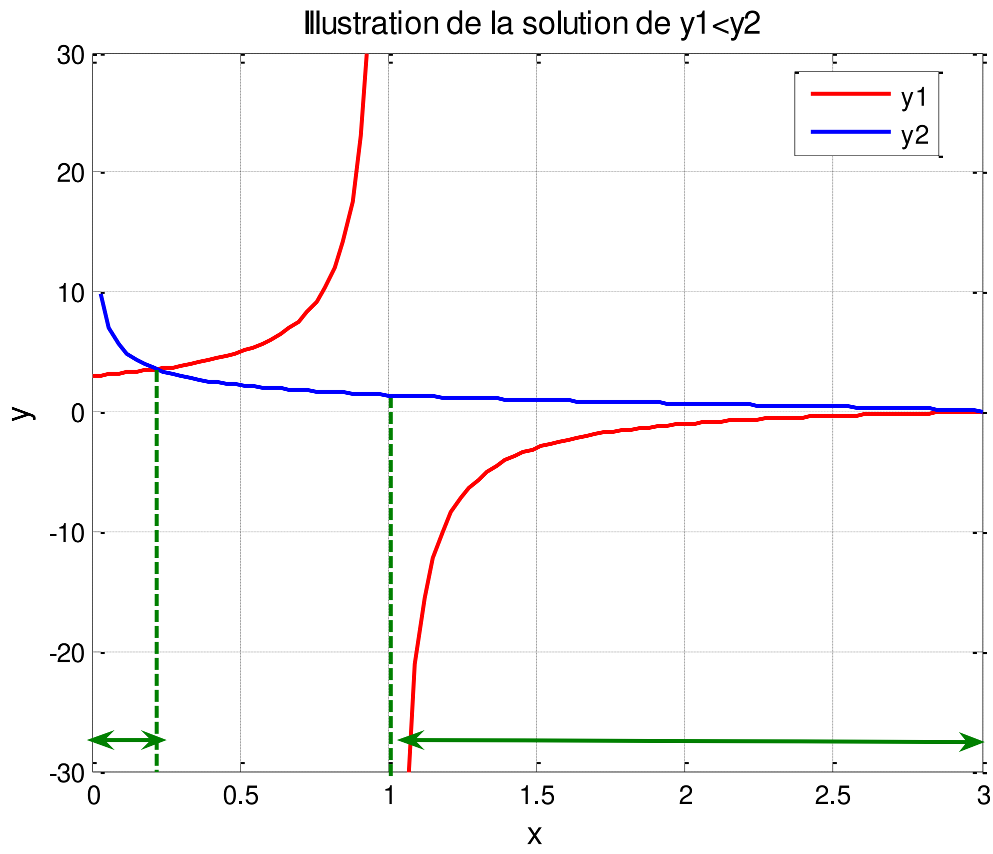
La résolution est maintenant immédiate :

- Si $x \in \left]1,3\right]$
  Le terme de gauche est toujours négatif et l'inéquation est toujours satisfaite
- Si $x \in \left]0,1\right[$
  On peut élever les termes au carré, ce qui donne :

$$\left(\frac{x-3}{x-1}\right)^2 \leq \frac{3-x}{x} \Leftrightarrow \frac{2x^3-11x^2+16x-3}{x(x-1)^2} \leq 0 \xrightarrow{HORNER} \frac{(x-3)(2x^2-5x+1)}{x(x-1)^2} \leq 0$$

Une étude de signe nous donne : $x \in \left]0,\dfrac{5-\sqrt{17}}{4}\right]$

Conclusion : La solution de l'inéquation est : $\boxed{x \in \left]0,\dfrac{5-\sqrt{17}}{4}\right] \cup \left]1,3\right]}$



6 juillet 07 (Relu par Benoît Baudelet). Modifié le 14 janvier 08.

EXALG259 – Louvain, juillet 2007, série 1.

Soit m un paramètre réel, discutez et résoudre, dans les nombres réels, l'équation :

$$\frac{m-1}{x}-\frac{3}{x^2}=3$$

Solution proposée par Steve Tumson

CE : $x \neq 0$

L'équation peut se réécrire sous la forme sympathique d'un second degré :

$$3x^2+(1-m)x+3=0$$

Le discriminant est : $\rho=(1-m)^2-36=(m+5)(m-7)$

Il reste à discuter les éternelles conditions du second degré :

- $\rho=0 \quad\Rightarrow\quad$ La solution est double : $x_1=x_2=\dfrac{-(1-m)}{6}$
  - $m=7 \quad\Rightarrow x_1=x_2=1$
  - $m=-5 \quad\Rightarrow x_1=x_2=-1$
- $\rho<0 \quad\Rightarrow\quad$ Pas de solution réelle : $S=\{\ \}$
  - $-5<m<7 \quad\Rightarrow S=\{\ \}$
- $\rho>0 \quad\Rightarrow\quad$ Deux solutions réelles distinctes
  - $m\in\left]-\infty,-5\right[\cup\left]7,+\infty\right[\quad\Rightarrow\quad x_{1,2}=\dfrac{-(m-1)\pm\sqrt{\rho}}{6}$

---

6 juillet 07