

**Exercices résolus de mathématiques.**

# Algèbre

## ALG 28

**EXALG280 – EXALG289**

<http://www.matheux.be.tf>

Jacques Collot

Juillet 08

## EXALG280 – FPMS – Mons, Juillet 2004 (ALG01.10).

Soit  $p(x)$  un polynôme de degré 5 à coefficients réels.

- Déterminer ses coefficients, en sachant que :
  - $p(x)$  s'annule, ainsi que sa dérivée première, en  $x = 3$
  - $p(x)$  possède une racine en  $x = i$
  - $p(x)$  possède un minimum en  $x = 0$ , de valeur 27.Enfin lister toutes les racines de ce polynôme  
*Indice : considérez  $p(x)$  sous forme factorisée*
- Représenter l'allure de ce polynôme sans utiliser la dérivée seconde. Si nécessaire, vous pouvez calculer la valeur du polynôme en des valeurs entières de  $x$

---

Nous reprenons la solution proposée par l'université.

**Solution** Reprenons les indices un par un:

- $p(3) = 0$  et  $p'(3) = 0$ : le polynôme est divisible par  $(x - 3)^2$
- $p(i) = 0$  donc  $p(-i) = 0$  car les coefficients de  $p(x)$  sont réels (si une racine est complexe, le complexe conjugué est racine également)
- $p'(0) = 0$  et  $p(0) = 27$

Le polynôme étudié peut s'écrire:

$$p(x) = a(x - 3)(x - 3)(x - i)(x + i)(x + b)$$

$$p(0) = 27, \text{ donc } ab = 3;$$

$$p(x) = (x - 3)^2(x^2 + 1)(ax + 3);$$

En effectuant:

$$p(x) = ax^5 + (3 - 6a)x^4 + (10a - 18)x^3 + (30 - 6a)x^2 + (9a - 18)x + 27.$$

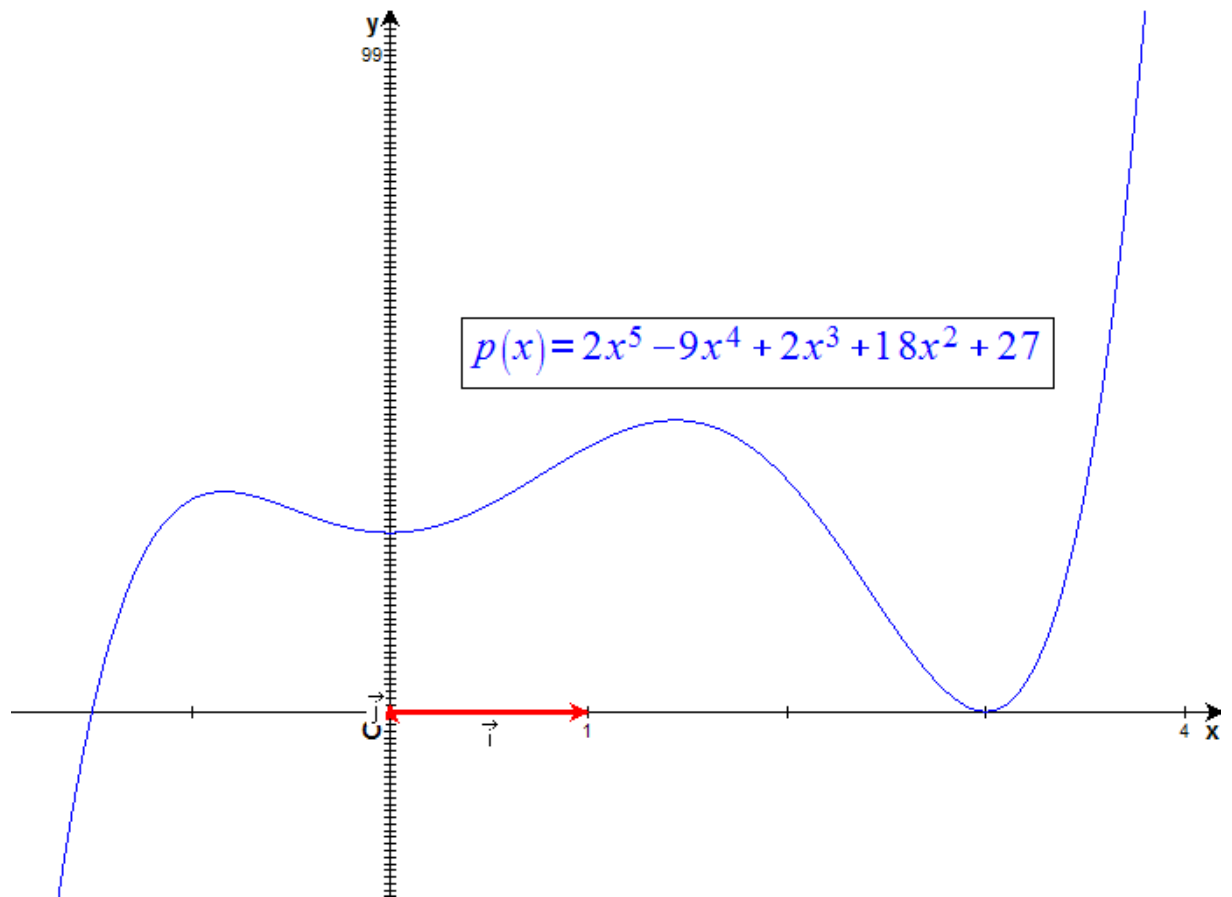
La dérivée première s'annule en zéro:

$$9a - 18 = 0$$

Donc  $a = 2$ ; on a :

$$p(x) = 2x^5 - 9x^4 + 2x^3 + 18x^2 + 27.$$

Représentation graphique: voir figure 1 (évaluation de  $p(1) = 40$  et  $p(-1) = 32$ ).



---

28 juillet 07.

## EXALG281 – FPMS – Mons, Juillet 2004 (ALG04.08).

Résoudre et discuter l'inéquation suivante :

$$x^2 - 7x + 18 + \sqrt{x^2 - 7x + 18} \leq 42$$

Avec  $x \in \mathbb{R}$

---

**Nous reprenons la solution proposée par l'université.**

**Solution** Il faut vérifier que  $x^2 - 7x + 18 \geq 0$ . Si on calcule le discriminant  $\Delta$  ( $\Delta = -23 < 0$ ), on constate que  $x^2 - 7x + 18 > 0$  est toujours vrai.

Posons  $t^2 = x^2 - 7x + 18$  avec  $t > 0$ . On peut écrire l'inéquation sous la forme:  $t^2 + t - 42 \leq 0$ , c'est-à-dire:

$$(t - 6)(t + 7) \leq 0.$$

Il faut donc que  $-7 \leq t \leq 6$ . Or, on a aussi  $t > 0$ , donc  $t \in ]0, 6]$ .

Revenons à la variable  $x$ ; on a  $x^2 - 7x + 18 = t^2$  avec  $t \in ]0, 6]$ . Il en résulte une condition sur  $x$  qui est:

$$0 < x^2 - 7x + 18 \leq 36.$$

La première inéquation est vérifiée pour tout  $x$  comme on l'a vu au début. La seconde donne  $x^2 - 7x - 18 \leq 0$ . Cette condition est satisfaite lorsque  $x$  est situé entre les racines du trinôme, soit  $x \in [-2, 9]$ .

---

28 juillet 07.

## EXALG282 – FPMS – Mons, Juillet 2005 (ALG05.05).

Résoudre :

$$\ln(x+2) + \ln(4x-1) < \ln(x+6)$$

---

Nous reprenons la solution proposée par l'université.

### Solution

**Conditions d'existence** : le logarithme est défini sur l'intervalle  $]0, +\infty[$

$$\begin{cases} x + 2 > 0 \\ 4x - 1 > 0 \\ x + 6 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > -2 \\ x > \frac{1}{4} \\ x > -6 \end{cases} \Rightarrow x > \frac{1}{4}$$

Le domaine de validité correspond donc à l'intervalle  $]\frac{1}{4}, +\infty[$

### Résolution de l'inéquation

$$\begin{aligned} \ln(x+2)(4x-1) &< \ln(x+6) \\ (x+2)(4x-1) &< x+6 \\ 4x^2 + 6x - 8 &< 0 \end{aligned}$$

Les racines du trinôme valent :

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-3 - \sqrt{41}}{4} \approx -2.35 \\ x_2 &= \frac{-3 + \sqrt{41}}{4} \approx 0.85 \end{aligned}$$

Le trinôme est négatif pour les valeurs de  $x$  comprises dans l'intervalle  $] -2.35, 0.85[$ .  
En tenant compte de la condition d'existence, les valeurs de  $x$  vérifiant l'inéquation appartiennent à l'intervalle  $]0.25, 0.85[$

## EXALG283 – FPMS – Mons, Juillet 2004 (ALG04.07).

Trouver les valeurs de  $x$  pour que l'inégalité suivante soit vraie :

$$\sqrt{2-x} + \sqrt{3+x} \geq 1$$

---

Nous reprenons la solution proposée par l'université.

**Solution** Les radicaux des racines doivent être positifs:

$$\begin{aligned}x &\leq 2 \\x &\geq -3\end{aligned}$$

Ces deux conditions sont compatibles et donnent:

$$-3 \leq x \leq 2$$

Il reste à trouver dans cet intervalle les valeurs de  $x$  qui répondent à l'inégalité. En élevant au carré, on trouve:

$$\begin{aligned}2 - x + 2\sqrt{2-x}\sqrt{3+x} + 3 + x &\geq 1 \\ \sqrt{2-x}\sqrt{3+x} &\geq -2\end{aligned}$$

Cette dernière relation étant toujours vraie pour  $x \in [-3, 2]$ , on en déduit que l'inégalité est aussi vraie pour  $x \in [-3, 2]$ .

## EXALG284 – FPMS – Mons, Juillet 2005 (ALG05.09).

Soient  $a, b, c, d$  les quatre racines du polynôme

$$x^4 - 2x^3 + mx^2 + 32x + 240$$

Le coefficient de  $x^2$  est un paramètre  $m$  ; déterminez  $m$  sachant que  $a + b = c + d$

---

Nous reprenons la solution proposée par l'université.

**Solution** Connaissant les quatre racines, le polynôme s'écrit sous la forme:

$$\begin{aligned}(x - a)(x - b)(x - c)(x - d) &= x^4 \\ &\quad - x^3(a + b + c + d) \\ &\quad + x^2(ab + ac + ad + bc + bd + cd) \\ &\quad - x(abc + abd + acd + bcd) \\ &\quad + abcd\end{aligned}\tag{1}$$

En identifiant les coefficients, on obtient le système d'équations:

$$a + b + c + d = 2\tag{2}$$

$$ab + ac + ad + bc + bd + cd = m\tag{3}$$

$$abc + abd + acd + bcd = -32\tag{4}$$

$$abcd = 240\tag{5}$$

La relation (2) peut s'écrire:

$$a + b = c + d = 1\tag{6}$$

Les relations (4) et (6) donnent:

$$abc + abd + acd + bcd = -32$$

$$ab(c + d) + cd(a + b) = -32\tag{7}$$

$$ab + cd = -32$$

De même les relations (3) et (6) donnent:

$$ab + ac + ad + bc + bd + cd = m$$

$$ab + a(c + d) + b(c + d) + cd = m$$

$$ab + (a + b) + cd = m\tag{8}$$

$$ab + cd + 1 = m$$

Finalement, en combinant cette dernière relation avec (7), on trouve le résultat:

$$m = -31\tag{9}$$

## EXALG285 – FPMS – Mons, Juillet 2005(ALG05.19).

Trouvez toutes les valeurs de  $x$  qui satisfont l'équation

$$2(\log_{10} x)^3 + \log_{10} x^2 = (\log_{10} x^{\sqrt{5}})^2$$

---

Posons :  $t = \log_{10} x$

L'équation devient :  $2t^3 + 2t = 5t^2 \rightarrow t(2t^2 - 5t + 2) = 0$

1er cas :  $t = 0 \rightarrow \log_{10} x = 0 \rightarrow \boxed{x = 1}$

2ème cas :  $2t^2 - 5t + 2 = 0$

$$\rightarrow t_{1,2} = \frac{+5 \pm \sqrt{25 - 16}}{4} \rightarrow \begin{cases} t = 2 \rightarrow \log_{10} x = 2 \rightarrow \boxed{x = 100} \\ t = \frac{1}{2} \rightarrow \log_{10} x = \frac{1}{2} \rightarrow \boxed{x = \sqrt{10}} \end{cases}$$

---

28 juillet 07.



## EXALG286 – FPMS – Mons, Juillet 2005 (ALG05.13)

Résolvez et discuter le système linéaire suivant en fonction de la valeur du paramètre réel  $a$  :

$$\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = a \\ x + y + az = a \end{cases}$$

---

Les déterminants sont :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = (a+2)(a-1)^2 \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & a & a \end{vmatrix} = (a+1)(a-1)^2$$
$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & a & 1 \\ a & 1 & a \end{vmatrix} = -(a-1)^2 \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & a \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = (a+1)(a-1)^2$$

1<sup>er</sup> cas :  $a = 1$

$$\text{Le système devient : } \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + y + z = 1 \rightarrow z = 1 - x - y \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

Système doublement indéterminé :  $S\{x; y; 1 - x - y\}$

2<sup>ème</sup> cas :  $a = -2$

$$\text{Le système devient : } \begin{cases} -2x + y + z = 1 \\ x - 2y + z = -2 \rightarrow 0 = -3 \\ x + y - 2z = -2 \end{cases}$$

Système impossible

Dans les autres cas

$$x = -\frac{1}{a+2} \quad y = z = \frac{a+1}{a+2}$$

## EXALG287 – FSA – Louvain, septembre 2007.

Résoudre dans les réels l'équation suivante :

$$\log(\sqrt{5x+8}) + \frac{1}{2}\log(2x+3) = \log 15$$

---

### Solution proposée par Steve Tumson

Conditions d'existence:

$$5x+8 \geq 0 \quad \text{et} \quad 2x+3 \geq 0$$

$$x \geq -\frac{8}{5} \quad \text{et} \quad x \geq -\frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow x \geq -\frac{3}{2}$$

$$\log(\sqrt{5x+8}) + \frac{1}{2}\log(2x+3) = \log 15$$

$$\Leftrightarrow \log(\sqrt{5x+8}) + \log(\sqrt{2x+3}) = \log 15$$

$$\Leftrightarrow \log(\sqrt{(5x+8)(2x+3)}) = \log 15$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(5x+8)(2x+3)} = 15$$

$$\Leftrightarrow (5x+8)(2x+3) = 225$$

$$\Leftrightarrow 10x^2 + 31x - 201 = 0$$

$$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{-31 \pm \sqrt{9001}}{20}$$

Vu les conditions d'existence:  $S = \left\{ \frac{-31 + \sqrt{9001}}{20} \approx 3,2 \right\}$

---

15 sept. 07

## EXALG288 – FSA – Louvain, septembre 2007.

Résoudre dans les réels, l'inéquation suivante :

$$\frac{x-2}{x+2} \geq -2 - \sqrt{-x}$$

### Solution proposée par Steve Tumson

$$\frac{-3x-2}{x+2} \leq \sqrt{-x} \rightarrow \underline{CE}: x \leq 0$$

		-2		-2/3		
-3x-2	+	+	+	0	-	
x+2	-	/	+	+	+	
		-	/	+	0	-

$\Rightarrow \sqrt{-x}$  étant toujours positif, l'inéquation est vérifiée pour  $\forall x \in ]\leftarrow, -2[ \cup \left[-\frac{2}{3}, 0\right]$

Dans l'intervalle  $\left]-2, -\frac{2}{3}\right[$ , les deux membres sont strictement positifs, on peut donc les élever au carré:

$$\left(\frac{-3x-2}{x+2}\right)^2 \leq -x \Leftrightarrow 9x^2 + 4 + 12x \leq -x(x^2 + 4 + 4x) \Leftrightarrow x^3 + 13x^2 + 16x + 4 \leq 0$$

Ce troisième degré est factorisable via Horner :

	1	13	16	4	
			-1	-12	-4
-1					
	1	12	4	0	

$$\Rightarrow x^3 + 13x^2 + 16x + 4 = (x+1)(x^2 + 12x + 4)$$

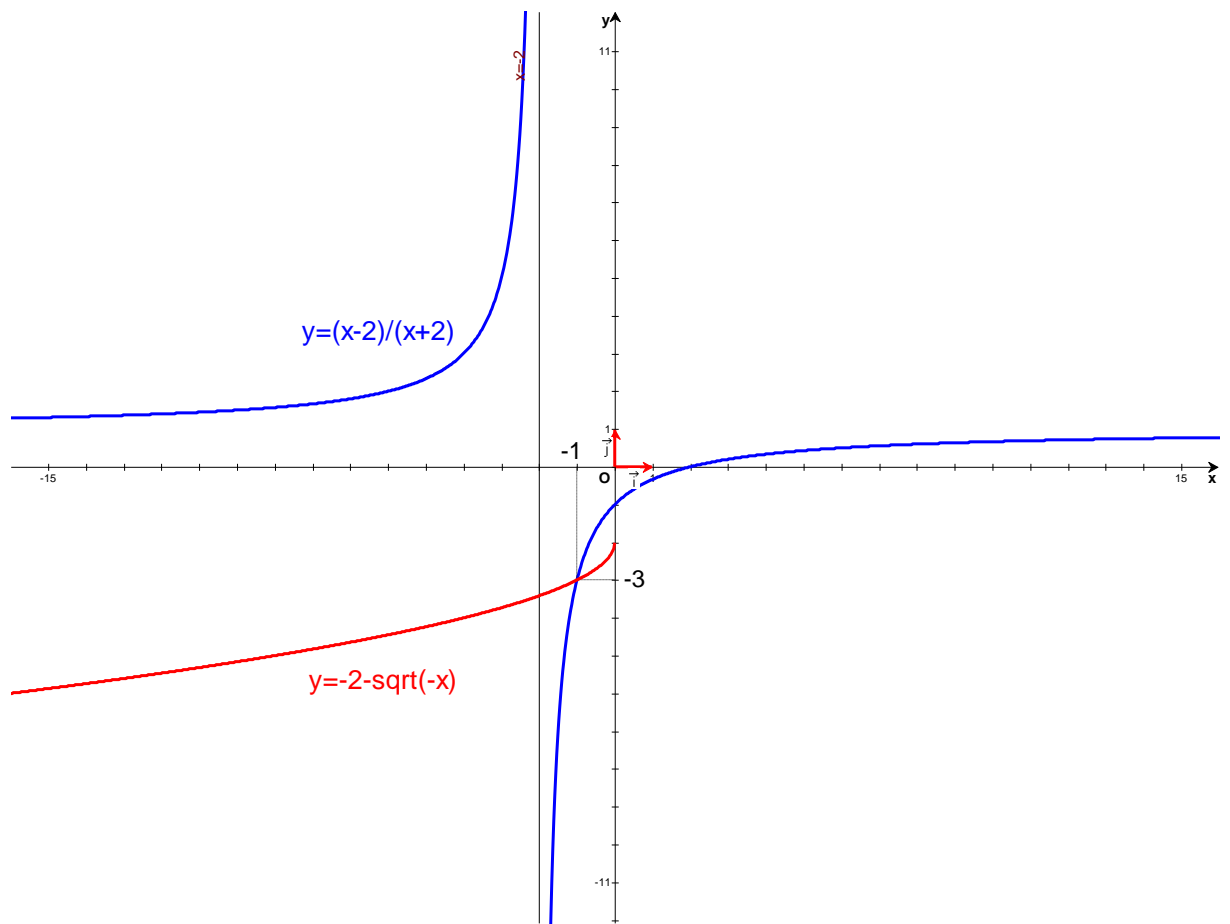
Le second degré admet comme racine:  $x_{1,2} = -6 \pm 4\sqrt{2} \approx -0,34$  et  $-11,65$

		-11,65		-2		-1		-2/3		-0,34	
x+1	-	-	-	-	-	0	+	+	+	+	+
x <sup>2</sup> +12x+4	+	0	-	-	-	-	-	-	-	0	+
	/	/	/	/	+	0	-	-	/	/	/

Dans l'intervalle dans lequel nous opérons, l'inéquation est vérifiée  $\forall x \in \left]-1, -\frac{2}{3}\right]$

Finalement, la solution globale de l'inéquation est :

$$x \in ]\leftarrow, -2[ \cup \left[-1, 0\right]$$



---

15 sept. 07

## EXALG289 – FSA – Louvain, septembre 2007.

Déterminer pour quelle(s) valeur(s) du paramètre réel  $m$ , l'équation suivante :

$$2x^2 - (m-1)x + m + 1 = 0$$

possède deux racines réelles distinctes  $x_1$  et  $x_2$  telles que  $|x_2 - x_1| = 1$

Que valent ces racines ?

---

### Solution proposée Steve Tumson

$$2x^2 - (m-1)x + m + 1 = 0$$

$$\rho = (m-1)^2 - 8(m+1) = m^2 - 10m - 7$$

$$\rho > 0 \Leftrightarrow m \in ]\leftarrow; 5 - 4\sqrt{2} \approx -0,657[ \cup ]5 + 4\sqrt{2} \approx 10,67; \rightarrow[$$

$$x_{1,2} = \frac{(m-1) \pm \sqrt{m^2 - 10m - 7}}{4} \Rightarrow |x_2 - x_1| = \frac{\sqrt{m^2 - 10m - 7}}{2} = 1$$

$$\Leftrightarrow m^2 - 10m - 11 = 0$$

$$\Leftrightarrow (m-11)(m+1) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{m = -1 \text{ ou } 11} \quad \rightarrow \text{Ces deux valeurs donnent bien deux racines distinctes!}$$

Cas où  $m = -1$

$$\boxed{x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{1+10-7}}{4} = \frac{-1 \pm 1}{2} \rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 0 \end{cases}}$$

Cas où  $m = 11$

$$\boxed{x_{1,2} = \frac{10 \pm \sqrt{121-110-7}}{4} = \frac{5 \pm 1}{2} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 3 \end{cases}}$$