Exercices résolus de mathématiques.

Algèbre

ALG 29

EXALG290 – EXALG299

http://www.matheux.be.tf

Jacques Collot

Juillet 08

EXALG290 – FSA – Louvain, septembre 2007.

Candice quitte Bruxelles pour Luxembourg en voiture. Au même moment, son copain Stivy quitte Luxembourg pour Bruxelles en Moto. La distance est de 210km. Ils roulent chacun à une vitesse constante le long de la même route. Ils se croisent à un moment ou il reste deux heures de route à Candice alors que Stivy n'est plus qu'à 9/8 d'heure de Bruxelles.

Calculer leur vitesse.

Solution proposée par Steve Tumson

Après leur croisement, le chemin qu'il reste parcourir est :

$$\begin{cases}\Delta e_{C2} = v_C t_{resteC} \\ \Delta e_{S2} = v_S t_{resteS}\end{cases} \text{ avec } t_{resteC} = 2 \quad \text{et} \quad t_{resteS} = \frac{9}{8}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\Delta e_{C2} = 2v_C \\ \Delta e_{S2} = \frac{9}{8} v_S\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 2v_C + \frac{9}{8} v_S = \Delta e_{C2} + \Delta e_{S2} = 210 \quad (1)$$

On sait aussi que au moment du croisement, le chemin qu'un parcouru Steve vaut le chemin qu'il reste à parcourir à Candice et vice versa :

$$\begin{cases}\Delta e_{C1} = \Delta e_{S2} \Leftrightarrow v_C t_{croisement} = \frac{9}{8} v_S \\ \Delta e_{S1} = \Delta e_{C2} \Leftrightarrow v_S t_{croisement} = 2v_C\end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases}t_{croisement} = \frac{9}{8}\frac{v_S}{v_C} \\ t_{croisement} = 2\frac{v_C}{v_S}\end{cases} \Rightarrow v_C = \frac{3}{4} v_S \quad (2)$$

Il reste simplement de résoudre le système (1) et (2)

$$\begin{cases}2v_C + \frac{9}{8} v_S = 210 \\ v_C = \frac{3}{4} v_S\end{cases} \Leftrightarrow \boxed{v_S = 80\ [km/h] \quad \text{et} \quad v_C = 60\ [km/h]}$$

---

15 sept. 07

EXALG291 – FACS – ULB - Bruxelles, juillet 2007.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$2^{4x+2}+3\left(4^{x}\right)-2^{-1}=0$$

$$2^{4x+3}+3\left(4^{x}\right)-2^{-1}=0\rightarrow 2^{3}.\left(2^{2x}\right)^{2}+3.2^{2x}-\frac{1}{2}=0\rightarrow 2^{4}.\left(2^{2x}\right)^{2}+6.2^{2x}-1=0$$

C'est une équation du second degré en 2^{2x}

$$2^{2x}=\frac{-3\pm\sqrt{3^{2}+16}}{16}=\frac{-3\pm 5}{16}\rightarrow\begin{cases}2^{2x}=-\dfrac{1}{2} & \text{A rejeter}\\ 2^{2x}=\dfrac{1}{8}\rightarrow 2^{2x}=2^{-3}\rightarrow\boxed{x=-\dfrac{3}{2}}\end{cases}$$

---

05 Jan 08

EXALG292 – FACS – ULB - Bruxelles, juillet 2007.

a) Déterminer les valeurs réelles des paramètres a, b, c pour que le polynôme

$$P(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + ax + c$$

soit divisible pas $1 - x^2$

b) Pour les valeurs des paramètres trouvées ce-dessus :

1. Déterminer le quotient de la division du polynôme P par $1 - x$
2. Factoriser P au maximum dans $\mathbb{R}$
3. Factoriser P au maximum dans $\mathbb{C}$, en déduire les racines complexes et les représenter dans le plan de Gauss.

---

a) Si P est divisible par $1 - x^2$, il est divisible par $(1-x)(1+x)$ et donc 1 et -1 sont des racines

$$\to \begin{cases} P(1) = a + b + c + a + c = 0 \\ P(-1) = a - b + c - a + c = 0 \end{cases} \to \begin{cases} a = -2c \\ b = -a \end{cases} \to \begin{cases} a = -2c \\ b = 2c \end{cases}$$

Donc : $P(x) = -2cx^4 + 2cx^3 + cx^2 - 2cx + c$

b) 1. Par Horner :

$$\begin{array}{c|cccc|c} & -2c & 2c & c & -2c & c \\ 1 & & -2c & 0 & c & -c \\ \hline & -2c & 0 & c & -c & 0 \end{array}$$

$\to P(x) = (1-x)\left(2cx^3 - cx + c\right)$

2. On peut encore diviser par $x + 1$

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 2c & 0 & -c & c \\ -1 & & -2c & 2c & -c \\ \hline & 2c & -2c & c & 0 \end{array}$$

Finalement : $\boxed{P(x) = c(x+1)(1-x)\left(2x^2 - 2x + 1\right)}$ dans $\mathbb{R}$

Le delta du troisième facteur est négatif.

3. Factorisons $2x^2 - 2x + 1$ dans $\mathbb{C} \to \quad x = \dfrac{1 \pm i}{2}$

Et donc : $\boxed{P(x) = 2c(x+1)(1-x)\left(x - \dfrac{1+i}{2}\right)\left(x - \dfrac{1-i}{2}\right)}$ dans $\mathbb{C}$

---

05 Jan 08

EXALG293 – FACS – ULB - Bruxelles, juillet 2007.

Résoudre dans $\mathbb{R}^3$, en discutant en fonction du paramètre réel *m*, le système

$$\begin{cases} x - 2y - mz = 1 \\ 2x - (m+3)y + 3z = 2m \\ mx - (1+m)y + (1-2m^2)z = m \end{cases} \qquad (m \in \mathbb{R})$$

Indiquer un résumé final de la discussion de ce système.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -m \\ 2 & -(m+3) & 3 \\ m & -(1+m) & 1-2m^2 \end{vmatrix} = (m-1)(m^2-2m-4) = (m-1)(m-1-\sqrt{5})(m-1+\sqrt{5})$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -m \\ 2m & -(m+3) & 3 \\ m & -(1+m) & 1-2m^2 \end{vmatrix} = 5m^2(1-m)$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -m \\ 2 & 2m & 3 \\ m & m & 1-2m^2 \end{vmatrix} = -2(m-1)^2(1+m)$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -(m+3) & 2m \\ m & -(1+m) & m \end{vmatrix} = -2(m-1)^2$$

Discussion

1) $m=1$ Le système devient :

$$\begin{cases} x-2y-z=1 \\ 2x-4y+3z=2 \\ x-2y-z=1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x-2y-z=1 \\ 2x-4y+3z=2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=2y+1 \\ z=0 \end{cases}$$ Simple indétermination

2) $m=1+\sqrt{5}$ Le système devient :

$$\begin{cases} x-2y-\left(1+\sqrt{5}\right)z=1 \\ 2x-\left(4+\sqrt{5}\right)y+3z=2+2\sqrt{5} \\ \left(1+\sqrt{5}\right)x-\left(2+\sqrt{5}\right)y-\left(11+4\sqrt{5}\right)z=1+\sqrt{5} \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x-2y-\left(1+\sqrt{5}\right)z=1 & (1) \\ x-\dfrac{4+\sqrt{5}}{2}y+\dfrac{3}{2}z=1+\sqrt{5} & (2) \\ x-\dfrac{2+\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}y-\dfrac{11+4\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}z=1 & (3) \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} (3)-(1) \rightarrow \left(-\dfrac{2+\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}+2\right)y+\left(-\dfrac{11+4\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}+1+\sqrt{5}\right)z=0 \\ (2)-(1) \rightarrow \left(-\dfrac{4+\sqrt{5}}{2}+2\right)y+\left(\dfrac{3}{2}+1+\sqrt{5}\right)z=\sqrt{5} \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} \left(-2-\sqrt{5}+2+2\sqrt{5}\right)y+\left(-11-4\sqrt{5}+6+2\sqrt{5}\right)z=0 \\ \left(-4-\sqrt{5}+4\right)y+\left(5+2\sqrt{5}\right)z=2\sqrt{5} \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} \sqrt{5}y+\left(-5-2\sqrt{5}\right)z=0 & (4) \\ -\sqrt{5}y+\left(5+2\sqrt{5}\right)z=2\sqrt{5} & (5) \end{cases}$$

$\rightarrow (4)+(5) \rightarrow 0=2\sqrt{5}$ Système impossible.

3) <u>$m=1-\sqrt{5}$</u> Le système devient :

$$\begin{cases} x-2y-\left(1-\sqrt{5}\right)z=1 \\ 2x-\left(4-\sqrt{5}\right)y+3z=2-2\sqrt{5} \\ \left(1-\sqrt{5}\right)x-\left(2-\sqrt{5}\right)y+\left(-11+4\sqrt{5}\right)z=1-\sqrt{5} \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x-2y-\left(1-\sqrt{5}\right)z=1 & (1) \\ x-\dfrac{4-\sqrt{5}}{2}y+\dfrac{3}{2}z=1-\sqrt{5} & (2) \\ x-\dfrac{2-\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}}y+\dfrac{-11+4\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}}z=1 & (3) \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} (3)-(1) \rightarrow \left(-\dfrac{2-\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}}+2\right)y+\left(\dfrac{-11+4\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}}+1-\sqrt{5}\right)z=0 \\ (2)-(1) \rightarrow \left(-\dfrac{4-\sqrt{5}}{2}+2\right)y+\left(\dfrac{3}{2}+1-\sqrt{5}\right)z=-\sqrt{5} \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} \left(-2+\sqrt{5}+2-2\sqrt{5}\right)y+\left(-11+4\sqrt{5}+6-2\sqrt{5}\right)z=0 \\ \left(-4+\sqrt{5}+4\right)y+\left(5-2\sqrt{5}\right)z=-2\sqrt{5} \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} -\sqrt{5}y+\left(-5+2\sqrt{5}\right)z=0 & (4) \\ \sqrt{5}y+\left(5-2\sqrt{5}\right)z=-2\sqrt{5} & (5) \end{cases}$$

$\rightarrow (4)+(5) \rightarrow 0=-2\sqrt{5}$ Système impossible.

4) <u>Dans les autres cas</u>

$$\begin{cases} x=-\dfrac{5m^2}{m^2-2m-4} \\ y=-\dfrac{2(m-1)(m+1)}{m^2-2m-4} \\ z=-\dfrac{2(m-1)}{m^2-2m-4} \end{cases}$$

05 Jan 08. Modifié le 24 janvier 10 (Carine Demesmaeker)

EXALG294 – FACS – ULB - Bruxelles, juillet 2007.

Déterminer toutes les valeurs réelles du paramètre m pour lesquelles la matrice

$$A=\begin{pmatrix} 2m^2+4 & m & 1+m^2 \\ 3m & m^2 & m \\ 2m^2+1 & m+1 & m^2 \end{pmatrix} \quad \text{est inversible}$$

Calculer l'inverse de cette matrice dans le cas où $m=-\dfrac{1}{2}$

<u>Conditions d'inversion</u>

Pour que la matrice A soit inversible, il faut que sont déterminant soit différent de zéro.

$$D\acute{e}t(A)=\begin{vmatrix} 2m^2+4 & m & 1+m^2 \\ 3m & m^2 & 3 \\ 2m^2+1 & m+1 & m^2 \end{vmatrix} \overset{L1=L1-L3}{=} m\begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 3 & m & 1 \\ 2m^2+1 & m+1 & m^2 \end{vmatrix} \overset{L2=L2-L1}{=} m\begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & m+1 & 0 \\ 2m^2+1 & m+1 & m^2 \end{vmatrix}$$

$$=m.(m+1)\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2m^2+1 & m^2 \end{vmatrix}=m(m+1)\left(3m^2-2m^2-1\right)=m(m+1)^2(m-1)$$

Il faut donc : $m \in \mathbb{R}\backslash\{0,-1,1\}$

Calcul de l'inverse - Méthode de Gauss

Le tableau suivant donne le détail du calcul.

Les deux dernières colonnes sont des colonnes de contrôle.

L'avant-dernière représente la somme des lignes. La dernière représente ce que doit être cette somme en faisant les opérations mentionnées à la première colonne.

Ces contrôles ne sont pas indispensables mais très utiles et donc recommandés

Opération	Ligne	A			A^{-1}			$\sum L_i$	$\sum$ Crtl
	$L1$	$9/2$	$-1/2$	$5/4$	1	0	0	$25/4$	
	$L2$	$-3/2$	$1/4$	$-1/2$	0	1	0	$-3/4$	
	$L3$	$3/2$	$1/2$	$1/4$	0	0	1	$13/4$	
$L1\times 2/9$	$L4$	1	$-1/9$	$5/18$	$2/9$	0	0	$25/18$	$25/18$
$L2+L1\times 1/3$	$L5$	0	$1/12$	$-1/12$	$1/3$	1	0	$4/3$	$4/3$
$L3-L1\times 1/3$	$L6$	0	$2/3$	$-1/6$	$-1/3$	0	1	$7/6$	$7/6$
$L4$	$L7$	1	$-1/9$	$5/18$	$2/9$	0	0	$25/18$	$25/18$
$L5\times 12$	$L8$	0	1	-1	4	12	0	16	16
$L6-L5\times 8$	$L9$	0	0	$1/2$	-3	-8	1	$-19/2$	$-19/2$
$L7+L8\times 1/9$	$L10$	1	0	$1/6$	$2/3$	$4/3$	0	$19/6$	$19/6$
$L8+L9\times 2$	$L11$	0	1	0	-2	-4	2	-3	-3
$L9\times 2$	$L12$	0	0	1	-6	-16	2	-19	-19
$L10-L12\times 1/6$	$L13$	1	0	0	$5/3$	4	$-1/3$	$19/3$	$19/3$
$L11$	$L14$	0	1	0	-2	-4	2	-3	-3
$L12$	$L15$	0	0	1	-6	-16	2	-19	-19

Conclusion : $\boxed{A^{-1}=\begin{pmatrix} 5/3 & 4 & -1/3 \\ -2 & -4 & 2 \\ -6 & -16 & 2 \end{pmatrix}}$

05 Jan 08

EXALG295 – FACS – ULB - Bruxelles, septembre 2007.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ le sytème d'inéquations.

$$\begin{cases} \dfrac{3x+5}{7-3x} < 4 \\ \dfrac{12x^2+13x-14}{2-x} \geq 0 \end{cases}$$

On traite d'abord chaque inéquation séparèment.

1) $\dfrac{3x+5}{7-3x} < 4 \rightarrow \dfrac{3x+5}{7-3x} - 4 < 0 \rightarrow \dfrac{3x+5-28+12x}{7-3x} < 0 \rightarrow \dfrac{15x-23}{7-3x} < 0$

Tableau de signe :

		23/15		7/3	
$15x-23$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$7-3x$	$+$	$+$	$+$	0	$-$
(1)	$-$	0	$+$	/	$-$

$\rightarrow$ $Sol(1): \left]-\infty, \dfrac{23}{15}\right[\cup \left]\dfrac{7}{3}, +\infty\right[$

2) $\dfrac{12x^2+13x-14}{2-x} \geq 0 \rightarrow \dfrac{12\left(x+\frac{7}{4}\right)\left(x-\frac{2}{3}\right)}{2-x} \geq 0$

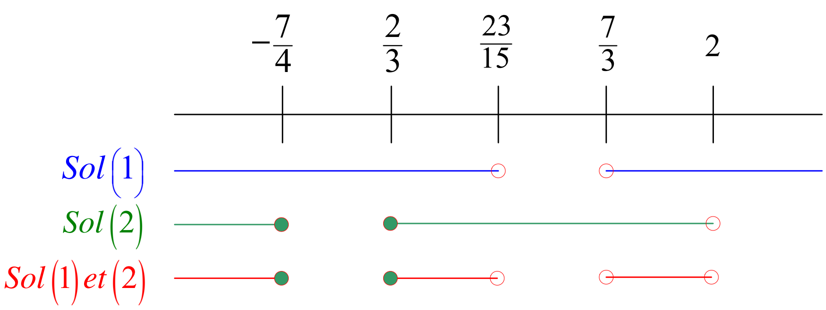
Tableau de signe :

		$-7/4$		$2/3$		2	
$12\left(x+\frac{7}{4}\right)\left(x-\frac{2}{3}\right)$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$2-x$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-$
(2)	$+$	0	$-$	0	$+$	/	$-$

$Sol(2): \left]-\infty, -\dfrac{7}{4}\right] \cup \left[\dfrac{2}{3}, 2\right[$

En mettant ensemble les deux séries de solution, on trouve :

$Sol: \left]-\infty, -\dfrac{7}{4}\right] \cup \left[\dfrac{2}{3}, \dfrac{23}{15}\right[\cup \left]\dfrac{7}{3}, 2\right[$



---

05 Jan 08

EXALG296 – FACS – ULB - Bruxelles, septembre 2007.

a) Vérifier que $3i$ est racine du polynôme $P(x)=x^4-2x^3+7x^2-18(x+1)$

b) Enoncer une propriété qui vous permet de déduire du a) une autre racine de P

c) Factoriser P au maximum dans $\mathbb{C}$.

---

a) $P(3i)=(3i)^4-2(3i)^3+7(3i)^2-18(3i)-18$

$=81+54i-63-54i-18=0$

$3i$ est donc bien une racine de P

b) Si un polynôme admet une racine complexe z, alors le conjugué $\bar{z}$ est aussi une racine du polynôme. Autrement dit $-3i$ est aussi une racine.

c) On peut donc facilement factoriser par Horner :

	4	3	2	1	0
	1	-2	7	-18	-18
$3i$		$3i$	$-9-6i$	$18-6i$	18
	1	$-2+3i$	$-2-6i$	$-6i$	0
$-3i$		$-3i$	$+6i$	$+6i$	
	1	-2	-2	0	

Et donc : $P(x)=(x-3i)(x+3i)(x^2-2x-2)$

Il reste à factoriser le troisième facteur, ce qui est facile.

$\rightarrow \boxed{P(x)=(x-3i)(x+3i)\left(x-1-\sqrt{3}\right)\left(x-1+\sqrt{3}\right)}$

---

05 Jan 08

EXALG297 – FACS – ULB - Bruxelles, septembre 2007.

Factoriser au maximum le déterminant

$$\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ a-b & b-c & c-a \\ a^2-b^2 & b^2-c^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix} \qquad (a,b,c\in\mathbb{R})$$

$$\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ a-b & b-c & c-a \\ a^2-b^2 & b^2-c^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix} \overset{C3=C1+C2+C3}{=} \begin{vmatrix} a+b & b+c & 2(a+b+c) \\ a-b & b-c & 0 \\ a^2-b^2 & b^2-c^2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 2(a+b+c)\begin{vmatrix} a-b & b-c \\ (a+b)(a-b) & (b-c)(b+c) \end{vmatrix}$$

$$= 2(a+b+c)(a-b)(b-c)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a+b & b+c \end{vmatrix}$$

$$= \boxed{2(a+b+c)(a-b)(b-c)(c-a)}$$

---

05 Jan 08

EXALG298 – FACS – ULB - Bruxelles, septembre 2007.

Résoudre dans $\mathbb{R}^3$, en discutant en fonction du paramètre réel m, le système

$$\begin{cases} -x & + & (m^2-1)y & + & mz & = & m \\ m^2x & + & m^2y & - & (m^3+1)z & = & -m^3 \\ (1-m^2)x & - & (2m^2-1)y & + & m^3z & = & 1-m^2 \end{cases} \qquad (m\in\mathbb{R})$$

Indiquer un résumé final de la discussion de ce système.

$$\Delta=\begin{vmatrix} -1 & m^2-1 & m \\ m^2 & m^2 & -(m^3+1) \\ 1-m^2 & -(2m^2-1) & m^3 \end{vmatrix} \overset{L1=L1+L2+L3}{=} \begin{vmatrix} 0 & 0 & m-1 \\ m^2 & m^2 & -(m^3+1) \\ 1-m^2 & -(2m^2-1) & m^3 \end{vmatrix}$$

$$=(m-1)\begin{vmatrix} m^2 & m^2 \\ 1-m^2 & -(2m^2-1) \end{vmatrix}=m^2(m-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1-m^2 & -(2m^2-1) \end{vmatrix}$$

$$=m^2(m-1)(-2m^2+1-1+m^2)=-m^4(m-1)$$

Ce qui nous donne $m=0$ et $m=1$ comme cas particuliers à étudier.

Le calcul des autres Δ, en particulier Δ_x est assez compliqué. On utilisera donc la méthode de Gauss pour le cas général.

1) $\underline{m=0}$ Le système devient $\begin{cases} -x-y=0 \\ -z=0 \\ x+y=1 \end{cases}$ Système impossible

2) $\underline{m=1}$ Le système devient

$$\begin{cases} -x+z=1 \\ x+y-2z=-1 \\ -y+z=0 \end{cases} \xrightarrow{L1+L2} \begin{cases} y-z=0 \\ -y+z=0 \end{cases} \to y=z \to x=z-1$$

Système simplement indéterminé.

Opération	Ligne	Coeff			
	$L1$	-1	m^2-1	m	m
	$L2$	m^2	m^2	$-m^3-1$	$-m^3$
	$L3$	$1-m^2$	$-2m^2+1$	m^3	$1-m^2$
$L1\times(-1)$	$L4$	1	$-m^2+1$	$-m$	$-m$
$L2/m^2$	$L5$	1	1	$\dfrac{-m^3-1}{m^2}$	$-m$
$L3/\left(1-m^2\right)$	$L6$	1	$\dfrac{-2m^2+1}{1-m^2}$	$\dfrac{m^3}{1-m^2}$	1
$L4$	$L7$	1	$-m^2+1$	$-m$	$-m$
$L5-L4$	$L8$	0	m^2	$-\dfrac{1}{m^2}$	0
$L6-L4$	$L9$	0	$-\dfrac{m^4}{1-m^2}$	$\dfrac{m}{1-m^2}$	$1+m$
$L7$	$L10$	1	$-m^2+1$	$-m$	$-m$
$L8/m^2$	$L11$	0	1	$-\dfrac{1}{m^4}$	0
$L9/\left(-\dfrac{m^4}{1-m^2}\right)$	$L12$	0	1	$-\dfrac{1}{m^3}$	$-\dfrac{(1+m)^2(1-m)}{m^4}$
$L10$	$L13$	1	$-m^2+1$	$-m$	$-m$
$L11$	$L14$	0	1	$-\dfrac{1}{m^2}$	0
$L12-L11$	$L15$	0	0	$\dfrac{-m+1}{m^4}$	$-\dfrac{(1+m)^2(1-m)}{m^4}$

De $L15$, on trouve z : $z=-\dfrac{(1+m)^2(1-m)}{m^4}\times\dfrac{m^4}{-m+1}=-(1+m)^2$

De $L14$, on trouve y : $y=-\dfrac{(1+m)^2}{m^4}$

De $L13$, on trouve x : $x=-m+\dfrac{\left(-m^2+1\right)(1+m)^2}{m^4}-m(1+m)^2$

$$=\frac{1}{m^4}\left[-m^5+\left(-m^2+1\right)\left(1+2m+m^2\right)-m^5\left(1+2m+m^2\right)\right]$$

$$=\frac{1}{m^4}\left(-m^5-m^2+1-2m^3+2m-m^4+m^2-m^5-2m^6-m^7\right)$$

$$=-\frac{1}{m^4}\left(m^7+2m^6+2m^5+m^4+2m^3-2m-1\right)$$

Résumé

$m = 0$ Système impossible

$m = 1$ Simple indétermination $\begin{cases} x = z - 1 \\ y = z \end{cases}$

Dans les autres cas : $\begin{cases} x = -\dfrac{1}{m^4}\left(m^7 + 2m^6 + 2m^5 + m^4 + 2m^3 - 2m - 1\right) \\ y = -\dfrac{(1+m)^2}{m^4} \\ z = -(1+m)^2 \end{cases}$

---

05 Jan 08

EXALG299 – FACSA – ULG – Liège, septembre 2007.

a. Démontrer que

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)$$

b. Pour quelles valeurs du paramètre réel a le système suivant n'est-il pas de Cramer?
(Un système linéaire est dit de Cramer s'il admet une et une seule solution.)

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ a^2 x + (a-2)^2 y + (2a-1)^2 z = 11-8a \\ a^4 x + (a-2)^4 y + (2a-1)^4 z = 83-80a \end{cases}$$

c. Résoudre le système pour les valeurs de a trouvées au point b.

Nous reprenons la solution proposée par l'université.

On a $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a \\ a^2 & b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b-a & c-a \\ b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix}$

$= (b-a)(c-a)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ b+a & c+a \end{vmatrix}$

ce qui se réduit à $(b-a)(c-a)(c-b) = (a-b)(b-c)(c-a)$.

Le déterminant du système proposé au point b est donc

$$\begin{aligned} \Delta &= \left(a^2-(a-2)^2\right)\left((a-2)^2-(2a-1)^2\right)\left((2a-1)^2-a^2\right) \\ &= 2(2a-2)(3a-3)(-a-1)(3a-1)(a-1) \\ &= -12(a-1)^3(a+1)(3a-1)\ . \end{aligned}$$

Ce déterminant s'annule pour $a \in \{1, -1, 1/3\}$.

Pour $a = 1$, le système se réduit à trois fois l'équation $x + y + z = 3$;

l'ensemble des triplets solutions est donc $\{(\lambda, \mu, 3-\lambda-\mu) : \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$.

Pour $a = -1$, le système se réduit à

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x + 9y + 9z = 19 \\ x + 81y + 81z = 183 \end{cases} \text{ ou encore } \begin{cases} 81x + 81y + 81z = 243 \\ 9x + 81y + 81z = 171 \\ x + 81y + 81z = 163 \end{cases}$$

Par différence, on trouve $8x = 8$ $(II - III)$ et donc $x = 1$. En remplaçant x par sa valeur, chacune des trois équations se réduit à $81y + 81z = 162$, c'est-à-dire à $y + z = 2$.

L'ensemble des triplets solutions est donc $\{(1, \lambda, 2-\lambda) : \lambda \in \mathbb{R}\}$.

Pour $a = 1/3$, le système se réduit à :

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ \dfrac{x}{9} + \dfrac{25y}{9} + \dfrac{z}{9} = \dfrac{25}{3} \\ \dfrac{x}{81} + \dfrac{625y}{81} + \dfrac{z}{81} = \dfrac{169}{3} \end{cases} \text{ ou encore } \begin{cases} x + y + z = 3 \\ x + 25y + z = 75 \\ x + 625y + z = 4563 \end{cases}$$

Par différence, on trouve d'une part $24y = 72$ $(II - I)$ et d'autre part $624y = 4560$ $(III - II)$; ces deux égalités sont incompatibles et le système n'admet aucune solution.

---

05 Jan 08