

**Exercices résolus de mathématiques.**

# Algèbre

## ALG 3

**EXALG030 – EXALG039**

<http://www.matheux.c.la>

Jacques Collot

1 avril 03

## EXALG030 – FACSA, ULG, Liège, juillet 1997.

Pour quelles valeurs réelles de  $m$  le trinôme  $x^2 + mx + m$  est-il strictement positif dans l'intervalle  $[0, 1]$

Suggestion : Discuter la position de 0 et 1 par rapport aux racines du trinôme quand il y en a.

---

$$\text{On a } x^2 + mx + m = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}(-m - \sqrt{m^2 - 4m}) \\ x_2 = \frac{1}{2}(-m + \sqrt{m^2 - 4m}) \end{cases}$$

D'où, on déduit les conditions d'existence :  $m \leq 0$  et  $m \geq 4$

A) Si  $m < 0$

\* Il faut soit l'ordre suivant  $x_1 \quad x_2 \quad 0 \quad 1$

$$\text{Donc } x_2 = \frac{1}{2}(-m + \sqrt{m^2 - 4m}) < 0 \rightarrow \text{Ce qui est impossible}$$

\* Soit il faut l'ordre suivant  $0 \quad 1 \quad x_1 \quad x_2$

$$\text{Donc } x_1 = \frac{1}{2}(-m - \sqrt{m^2 - 4m}) > 1 \rightarrow \sqrt{m^2 - 4m} < -2 - m$$

• Or une racine est toujours positive  $\rightarrow m < -2$

$$\bullet \text{ De plus : } m^2 - 4m < 4 + 4m + m^2 \rightarrow m > -\frac{1}{2}$$

Les conditions  $m < -2$  et  $m > -\frac{1}{2}$  sont incompatibles.

B) Si  $m = 0$ , le trinôme devient :  $x^2$  qui a pour racine  $x = 0$ . Donc à exclure .

C) Si  $0 < m < 4$ , le  $\Delta$  est négatif et le trinôme est toujours positif

D) Si  $m = 4$ , le trinôme devient :  $(x + 2)^2$  qui a pour racine  $x = -2$ .

Le trinôme est positif dans l'intervalle

E) Si  $m > 4$

\* Il faut soit l'ordre suivant  $x_1 \quad x_2 \quad 0 \quad 1$

$$\text{Donc } x_2 = \frac{1}{2}(-m + \sqrt{m^2 - 4m}) < 0 \rightarrow m > \sqrt{m^2 - 4m} \rightarrow m^2 > m^2 - 4m$$

Ce qui est toujours vérifié.

\* Soit il faut l'ordre suivant  $0 \quad 1 \quad x_1 \quad x_2$

$$\text{Donc } x_1 = \frac{1}{2}(-m - \sqrt{m^2 - 4m}) > 1 \rightarrow \text{Ce qui est impossible.}$$

Conclusion :  $m > 0$

## EXALG031 – FACSA, ULG, Liège, septembre 1997.

Déterminer le nombre de racines réelles distinctes de  $x^4 - mx^2 + m$

---

C'est une équation bicarrée:  $\rightarrow x^2 = m \pm \sqrt{m^2 - 4m} \rightarrow x = \pm \sqrt{m \pm \sqrt{m^2 - 4m}}$

CE : 1)  $m^2 - 4m \geq 0 \rightarrow m \leq 0$  et  $m \geq 4$

2) L'autre condition d'existence sera discutée par après.

1)  $m > 4$

a)  $x = \pm \sqrt{m + \sqrt{m^2 - 4m}}$

CE :  $m + \sqrt{m^2 - 4m} \geq 0 \rightarrow m \geq -\sqrt{m^2 - 4m}$  Toujours vérifié.

b)  $x = \pm \sqrt{m - \sqrt{m^2 - 4m}}$

CE :  $m - \sqrt{m^2 - 4m} \geq 0 \rightarrow m \geq \sqrt{m^2 - 4m} \rightarrow m^2 \geq m^2 - 4m$   
 $\rightarrow 0 \geq -4m$  Toujours vérifié.

Donc si  $m > 4$ , on a 4 racines distinctes.

2)  $m < 0$

a)  $x = \pm \sqrt{m + \sqrt{m^2 - 4m}}$

CE :  $m + \sqrt{m^2 - 4m} \geq 0 \rightarrow m \geq -\sqrt{m^2 - 4m} \rightarrow m^2 \leq m^2 - 4m$   
 $0 \leq -4m$  Toujours vérifié.

b)  $x = \pm \sqrt{m - \sqrt{m^2 - 4m}}$

CE :  $m - \sqrt{m^2 - 4m} \geq 0 \rightarrow m \geq \sqrt{m^2 - 4m}$  Impossible

Donc si  $m < 0$ , on a 2 racines distinctes.

3)  $m = 4$

$\rightarrow x^4 - 4x^2 + 4 = 0 \rightarrow (x^2 - 2)^2 = 0 \rightarrow x = \pm \sqrt{2}$

Deux racines distinctes.

4)  $m = 0$

$\rightarrow x^4 = 0 \rightarrow x = 0$  Une racine distincte.

Conclusion :

$m < 0$	2 racines distinctes
$m = 0$	1 racine distincte
$0 < m < 4$	Pas de racines réelles
$m = 4$	2 racines distinctes
$m > 4$	4 racines distinctes

## EXALG032 – FACSA, ULG, Liège, juillet 1996.

Donner le nombre de solutions strictement positives de l'équation

$$(m^2 - 1)x^2 + 2mx - \sqrt{2}m = 0$$

où  $m$  est un paramètre réel.

---

$$x = -m \pm \sqrt{m^2 + \sqrt{2}m(m^2 - 1)} = -m \pm \sqrt{m(\sqrt{2}m^2 - m + \sqrt{2})}$$

$$CE : m(\sqrt{2}m^2 - m + \sqrt{2}) \geq 0$$

1) Le trinôme  $\sqrt{2}m^2 - m + \sqrt{2}$  est toujours positif car son  $\Delta$  est  $< 0$

2)  $m \geq 0$

$$\underline{A) m = 0} \quad -x^2 = 0 \rightarrow x = 0$$

$$\underline{B) m > 0}$$

\* Pour avoir deux racines positives, il faut l'ordre suivant :  $0 < x_1 < x_2$

$$\text{C'est-à-dire } x_1 > 0. \rightarrow x_1 = -m - \sqrt{m(\sqrt{2}m^2 - m + \sqrt{2})} > 0$$

$$\rightarrow -m > \sqrt{m(\sqrt{2}m^2 - m + \sqrt{2})} \quad \text{Ce qui est impossible.}$$

\* Pour avoir une racine positive, il faut l'ordre suivant :  $x_1 < 0 < x_2$

$$\text{C'est-à-dire } x_2 > 0. \rightarrow x_2 = -m + \sqrt{m(\sqrt{2}m^2 - m + \sqrt{2})} > 0$$

$$\rightarrow m < \sqrt{m(\sqrt{2}m^2 - m + \sqrt{2})} \rightarrow m^2 < m(\sqrt{2}m^2 - m + \sqrt{2})$$

$\rightarrow \sqrt{2}m^2 - 2m + \sqrt{2} > 0$  Le  $\Delta = 4 - 4.2 = -4$  est négatif. L'inégalité est toujours vérifiée.

Conclusion : Une seule racine positive.

## EXALG033 – FACSA, ULG, Liège, juillet 1996.

Quelles conditions faut-il imposer aux nombres réels  $a$  et  $b$  pour que le polynôme  $x^4 + x^3 + ax^2 + bx + 1$  possède deux racines réelles distinctes et opposées ?

---

Soit  $m$  et  $-m$  les deux racines ( $m > 0$ ). Le polynôme peut se mettre sous la forme :

$$(x+m)(x-m)(x^2+px+q) = 0$$

$$(x^2-m^2)(x^2+px+q) = x^4 + px^3 + (q-m^2)x^2 - m^2px - m^2q = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} p = 1 \\ q - m^2 = a \\ -m^2p = b \\ -m^2q = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} p = 1 \\ q = a + m^2 \\ -m^2 = b \text{ (donc } b < 0) \\ -m^2(a + m^2) = 1 \end{cases}$$

Des deux dernières équations, on tire :  $b(a-b) = 1 \rightarrow a = \frac{b^2+1}{b}$  avec  $b < 0$

Exemple:

$$b = -1 \rightarrow a = -2 \rightarrow m = 1. \text{ Donc:}$$

$$x^4 + x^3 - 2x^2 - x + 1 = (x-1)(x+1)(x^2+x-1) = 0$$

## EXALG034 – Polytech, UMons, questions-types 2000-2001.

Résoudre :

$$\sqrt{10-3x} - \sqrt{x+3} - \sqrt{4x+17} = 0$$

---

CE :

$$\left. \begin{array}{l} 1) 10-3x \geq 0 \rightarrow x \leq \frac{10}{3} \\ 2) x+3 \geq 0 \rightarrow x \geq -3 \\ 3) 4x+17 \geq 0 \rightarrow x \geq -\frac{17}{4} \end{array} \right\} \rightarrow -3 \leq x \leq \frac{10}{3}$$

$$\sqrt{10-3x} = \sqrt{x+3} + \sqrt{4x+17}$$

$$10-3x = x+3 + 2\sqrt{(x+3)(4x+17)} + 4x+17$$

$$-(5+4x) = \sqrt{(x+3)(4x+17)}$$

Cette dernière équation rajoute une condition :  $x \leq -\frac{5}{4}$

car une racine carrée est toujours positive.

$$25 + 40x + x^2 = 4x^2 + 12x + 17x + 51$$

$$12x^2 + 11x - 26 = 0$$

$$\rightarrow x = \frac{-11 \pm \sqrt{121 + 4 \times 26 \times 12}}{24} = \frac{-11 \pm 37}{24} \rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = \frac{13}{12} > -\frac{5}{4} \end{cases} \text{ donc à rejeter.}$$

Conclusion :  $x = -2$

CE :

$$1) 10 - 3x \geq 0 \rightarrow x \leq \frac{10}{3}$$

$$2) x + 3 \geq 0 \rightarrow x \geq -3$$

$$3) 4x + 17 \geq 0 \rightarrow x \geq -\frac{17}{4}$$

$$\rightarrow -3 \leq x \leq \frac{10}{3}$$

$$\sqrt{10-3x} = \sqrt{x+3} + \sqrt{4x+17}$$

$$10-3x = x+3 + 2\sqrt{(x+3)(4x+17)} + 4x+17$$

$$-(5+4x) = \sqrt{(x+3)(4x+17)}$$

$$25 + 40x + x^2 = 4x^2 + 12x + 17x + 51$$

$$12x^2 + 11x - 26 = 0$$

$$\rightarrow x = \frac{-11 \pm \sqrt{121 + 4 \cdot 26 \cdot 12}}{24} = \frac{-11 \pm 37}{24}$$

$$x_1 = -2$$

$$x_2 = 1.083 \approx 1 \text{ or } \sqrt{10-3} - \sqrt{x+3} - \sqrt{4x+17} \neq 0 \text{ donc à rejeter.}$$

## EXALG035 – Polytech, UMons, questions-types 2000-2001.

Résoudre l'inéquation :

$$\frac{2x^2 - x - 3}{3x^2 - 2x - 5} \leq 5 \quad x \in \mathbb{R}, x \neq 1$$

---

$$\frac{2x^2 - x - 3}{3x^2 - 2x - 5} \leq 5$$

CE :

$$3x^2 - 2x - 5 = 0 \rightarrow (x+1)\left(x - \frac{5}{3}\right) = 0 \rightarrow x \neq 1, x \neq \frac{5}{3}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} \frac{2x^2 - x - 3}{3x^2 - 2x - 5} \leq 5 &\rightarrow \frac{2x^2 - x - 3}{3x^2 - 2x - 5} - 5 \leq 0 \\ \rightarrow \frac{2x^2 - x - 3 - 15x^2 + 10x + 25}{3x^2 - 2x - 5} &= \frac{-13x^2 + 9x + 22}{3x^2 - 2x - 5} \leq 0 \end{aligned}$$

$$\text{Le numérateur donne : } -13x^2 + 9x + 22 = -(x+1)\left(x - \frac{22}{13}\right)$$

Tableau des signes :

		-1	$\frac{5}{3}$	$\frac{22}{13}$			
$-13x^2 + 9x + 22$	-	0	+	+	+	0	-
$3x^2 - 2x - 5$	+	0	-	0	+	+	+
	-		-		+		-

$$\text{Conclusion: } x \leq \frac{5}{3} \quad x \geq \frac{22}{13}$$

Note:

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 - x - 3}{3x^2 - 2x - 5} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(2x-3)}{(x+1)(3x-5)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(2x-3)}{(3x-5)} = \frac{5}{8} \leq 5$$

Donc, pour  $x = -1$ , la vraie valeur de la forme indéterminée vérifie l'inéquation.



## EXALG036 – Polyetch, UMons, questions-types 2000-2001.

Discuter en fonction de la valeur du paramètre  $m$ , le nombre de solutions de l'équation :

$$2 \cos^2 x - \cos x - 2m - 1 = 0 \quad \text{avec} \quad 0 \leq x < 2\pi$$

Soit  $y = \cos x$  avec  $-1 \leq y \leq 1$

L'équation devient :  $2y^2 - y + 2m - 1 = 0 \rightarrow y = \frac{1 \pm \sqrt{9-16m}}{4}$

Ce qui implique la CE :  $m \leq \frac{9}{16}$

Identifions les points remarquables :

1)  $y = \frac{1 + \sqrt{9-16m}}{4} \leq 1 \rightarrow \sqrt{9-16m} \leq 3 \rightarrow m \leq 0$

2)  $y = \frac{1 + \sqrt{9-16m}}{4} \geq -1 \rightarrow \sqrt{9-16m} \geq -5 \rightarrow$  Toujours vérifié

3)  $y = \frac{1 - \sqrt{9-16m}}{4} \leq 1 \rightarrow -\sqrt{9-16m} \leq 3 \rightarrow$  Toujours vérifié

4)  $y = \frac{1 - \sqrt{9-16m}}{4} \geq -1 \rightarrow -\sqrt{9-16m} \geq -5 \rightarrow m \geq -1$

Les points remarquables sont donc :  $m = -1$ ;  $m = 1$  et  $m = \frac{9}{16}$

1	$m = -1$	$y = \frac{1 \pm 5}{4}$	$y_1 = \frac{6}{4}$	A rejeter	1 solution : $x = 0$
			$y_2 = -1$	$\cos x = -1$	
				$\cos(-x) = -1$	

2	$-1 < m < 0$	$y = \frac{1 \pm \sqrt{\Delta}}{4}$	$y_1 > 1$	A rejeter	2 solutions
			$y_2$	$\cos x = y_2$	
				$\cos(-x) = y_2$	

3	$m = 0$	$y = \frac{1 \pm 3}{4}$	$y_1 = -\frac{3}{4}$	$\cos x = -\frac{3}{4}$	3 solutions
				$\cos(-x) = -\frac{3}{4}$	
			$y_2 = 1$	$\cos x = 1$	
				$\cos(-x) = 1$	

4	$0 < m < \frac{9}{16}$	$y = \frac{1 \pm \sqrt{\Delta}}{4}$	$y_1$	$\cos x = y_1$	4 solutions
				$\cos(-x) = y_1$	
			$y_2$	$\cos x = y_2$	
				$\cos(-x) = y_2$	

5	$m = \frac{9}{16}$	$y = \frac{1}{4}$		$\cos x = \frac{1}{4}$	2 solutions
				$\cos(-x) = \frac{1}{4}$	

## EXALG037 – FACSA, ULG, Liège, juillet 2000.

Résoudre l'équation :

$$Z^2 = -\frac{3}{\sqrt{5}}|Z| + 4i \quad (Z \in \mathbb{C})$$

Suggestion : égaliser les modules des deux membres pour déterminer  $|Z|$ .

---

$$\begin{aligned} Z = a + bi & \quad |Z| = \sqrt{a^2 + b^2} \\ Z^2 = a^2 - b^2 + 2abi & \quad |Z^2| = \sqrt{a^4 - 2a^2b^2 + b^4 + 4a^2b^2} \\ & = \sqrt{(a^2 + b^2)^2} = a^2 + b^2 = |Z|^2 \end{aligned}$$

De même :

$$\left| -\frac{3}{\sqrt{5}}|Z| + 4i \right| = \sqrt{\frac{9}{5}|Z|^2 + 16} \rightarrow |Z|^2 = \sqrt{\frac{9}{5}|Z|^2 + 16} \rightarrow |Z|^4 = \frac{9}{5}|Z|^2 + 16$$

Soit :  $t = |Z|^2$  ( $t$  est un réel positif)

$$\text{On obtient l'équation : } 5t^2 - 9t - 80 = 0 \rightarrow \begin{cases} t = 5 \\ t = -\frac{16}{5} \text{ A rejeter} \end{cases}$$

$$\text{Si } t = 5 \rightarrow |Z|^2 = 5 \rightarrow |Z| = \sqrt{5} \quad (-\sqrt{5} \text{ est à rejeter}) \rightarrow \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{5}$$

$$\text{Or } Z^2 = a^2 - b^2 + 2abi = -\frac{3}{\sqrt{5}}\sqrt{a^2 + b^2} + 4i = -3 + 4i$$

Il reste à prendre la racine carrée de ce nombre :

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = -3 \\ a^2 + b^2 = 5 \\ 2ab = 4 \quad (\text{donc } a \text{ et } b \text{ de même signe}) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2a^2 = 2 \rightarrow a = \pm 1 \\ 2b^2 = 8 \rightarrow b = \pm 2 \end{cases}$$

Conclusion :  $Z = 1 + 2i$  et  $Z = -1 - 2i$

## EXALG038 – FACSA, ULG, Liège, juillet 1999.

- a) Calculer  $(1+\omega)^n$  où  $\omega$  est une racine cubique de 1 ( $n$  entier positif)  
b) Combien de valeurs différentes obtient-on quand  $\omega \neq 1$ . Lesquels ?
- 

$$1 = \text{cis}(k360) \rightarrow \sqrt[3]{1} = \text{cis}(k120)$$

Donc 1)  $\sqrt[3]{1} = 1$

2)  $\sqrt[3]{1} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

2)  $\sqrt[3]{1} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

a) Soit  $\omega = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = \text{cis}120$

$$1 + \omega = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = \text{cis}60$$

$n$	angle	$(1+\omega)^n$
1	60	$\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$
2	120	$-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$
3	180	-1
4	240	$-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$
5	300	$\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$
6	360	1

a) Soit  $\omega = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = \text{cis}240$

$$1 + \omega = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = \text{cis}300$$

Le tableau est le même, mais les angles seront en ordre décroissant.

Conclusion : 6 solutions différentes.

## EXALG039 – FACSA, ULG, Liège, septembre 1999.

Calculer les racines carrées de  $-16-30i$

---

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = -16 \\ 2ab = -30 \quad (\text{donc } a \text{ et } b \text{ de signes contraires}) \end{cases}$$
$$\rightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = -16 \\ a^2 + b^2 + \sqrt{16^2 + 30^2} = 34 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2a^2 = 18 \\ 2b^2 = 50 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = \pm 3 \\ b = \pm 5 \end{cases}$$

Solutions :  $3-5i$  et  $-3+5i$