

Exercices résolus de mathématiques.

Algèbre

ALG 32

EXALG320 – EXALG329

<http://www.matheux.c.la>

Jacques Collot
Benoît Baudalet – Steve Tumson

Novembre 08

EXALG320 – FACS, ULB, Bruxelles, juillet 2008.

Résoudre dans \mathbb{R} l'équation $4^x - 3^{\left(x-\frac{1}{2}\right)} = 3^{\left(x+\frac{1}{2}\right)} - 2^{2x-1}$

$$\begin{aligned}4^x - 3^{\left(x-\frac{1}{2}\right)} &= 3^{\left(x+\frac{1}{2}\right)} - 2^{2x-1} \\ \Leftrightarrow 2^{2x} + \frac{2^{2x}}{2} &= 3^x \sqrt{3} + 3^x \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \Leftrightarrow \frac{3}{2} 2^{2x} &= (\sqrt{3})^{2x} \left(\sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \\ \Leftrightarrow \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right)^{2x} &= \frac{4}{\sqrt{3}} \frac{2}{3} \\ \Leftrightarrow \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right)^{2x} &= \frac{8}{3\sqrt{3}} \\ \Leftrightarrow \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right)^{2x} &= \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right)^3 \\ \Leftrightarrow 2x &= 3 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{3}{2}\end{aligned}$$

10 novembre 08. Modifié le 2 juillet 2009 (Benoit Baudelet)

EXALG321 – FACS, ULB, Bruxelles, juillet 2008.

Si α est une racine cubique non réelle de l'unité alors

a) Démontrer que $\alpha^2 + \alpha + 1 = 0$

b) En déduire que l'expression $(\alpha^2 - \alpha + 1)(1 + \alpha - \alpha^2)$ est indépendante de α .

a)

Si α est une racine cubique de 1, alors α est solution de $x^3 - 1 = 0$ qui se factorise selon

$$(x-1)(x^2 + x + 1) = 0$$

Le premier facteur a pour solution $x = 1$ qui est réel

Le deuxième facteur est une équation du second degré dont le discriminant est négatif.

Il admet donc deux racines complexes : α et son conjugué $\bar{\alpha}$.

Ces racines complexes sont bien des racines cubique de l'unité.

Donc : $\alpha^2 + \alpha + 1 = 0$

b)

Il suffit de faire apparaître la relation précédente :

$$\begin{aligned}(\alpha^2 - \alpha + 1)(1 + \alpha - \alpha^2) &= \left(\underbrace{\alpha^2 + \alpha + 1}_{=0} - 2\alpha \right) \left(\underbrace{\alpha^2 + \alpha + 1}_{=0} - 2\alpha^2 \right) \\ &= (-2\alpha)(-2\alpha^2) = +4 \underbrace{\alpha^3}_{=1} = 4\end{aligned}$$

10 novembre 2008

EXALG322 – FACS, ULB, Bruxelles, juillet 2008..

Résoudre dans \mathbb{R}^3 , en discutant en fonction du paramètre réel m , le système

$$\begin{cases} (10m+7)x - 3y + (7-m)z = -6m \\ (2m+1)x - y + 2z = -2m \\ -(2+m)x + my - (m+1)z = 1+m^2 \end{cases} \quad (m \in \mathbb{R})$$

Indiquer un résumé final de la discussion de ce système

Calculons les Δ

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} 10m+7 & -3 & 7-m \\ 2m+1 & -1 & 2 \\ -(2+m) & m & -(m+1) \end{vmatrix} \xrightarrow{L_3=L_2+L_3} \begin{vmatrix} 10m+7 & -3 & 7-m \\ 2m+1 & -1 & 2 \\ m-1 & m-1 & -m+1 \end{vmatrix} \xrightarrow{(m-1)} \begin{vmatrix} 10m+7 & -3 & 7-m \\ 2m+1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \\ &\xrightarrow{\substack{c_1=c_1-c_2 \\ c_3=c_3+c_2}} (m-1) \begin{vmatrix} 10m+10 & -3 & 4-m \\ 2m+2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -2(m-1)(m+1) \begin{vmatrix} 5 & 4-m \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2(m-1)(m+1)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_x &= \begin{vmatrix} -6m & -3 & 7-m \\ -2m & -1 & 2 \\ 1+m^2 & m & -(m+1) \end{vmatrix} \xrightarrow{L_1=L_1-3L_2} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 7-m \\ -2m & -1 & 2 \\ 1+m^2 & m & -(m+1) \end{vmatrix} = (1-m) \begin{vmatrix} -2m & -1 \\ 1+m^2 & m \end{vmatrix} \\ &= (1-m)(-2m^2 + 1 + m^2) = (1-m)(1-m^2) = (1-m)^2(1+m) \end{aligned}$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 10m+7 & -6m & 7-m \\ 2m+1 & -2m & 2 \\ -(2+m) & 1+m^2 & -(m+1) \end{vmatrix}$$

Pour factoriser ce déterminant, il est plus simple de l'effectuer.

On obtient une équation de degré 4 : $\Delta_x = -2m^4 + 3m^3 + 9m^2 - 3m - 7$

On remarque que ce polynôme est nul pour $m = 1$ et $m = -1$.

Il suffit donc d'appliquer Horner deux fois :

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ & -2 & 3 & 9 & -3 & -7 \\ 1 & & -2 & 1 & 10 & 7 \\ \hline & -2 & 1 & 10 & 7 & 0 \\ -1 & & 2 & -3 & -7 & \\ \hline & -2 & 3 & 7 & 0 & \end{array} \rightarrow \Delta_x = (m-1)(m+1)(-2m^2 + 3m + 7)$$

$$\begin{aligned}
\Delta_z &= \begin{vmatrix} 10m+7 & -3 & -6m \\ 2m+1 & -1 & -2m \\ -(2+m) & m & 1+m^2 \end{vmatrix} \xrightarrow{L_3=L_3+L_2} \begin{vmatrix} 10m+7 & -3 & -6m \\ 2m+1 & -1 & -2m \\ m-1 & m-1 & (m-1)^2 \end{vmatrix} = (m-1) \begin{vmatrix} 10m+7 & -3 & -6m \\ 2m+1 & -1 & -2m \\ 1 & 1 & m-1 \end{vmatrix} \\
&\xrightarrow{L_2=L_2+L_3} (m-1) \begin{vmatrix} 10m+7 & -3 & -6m \\ 2m+2 & 0 & -m-1 \\ 1 & 1 & m-1 \end{vmatrix} = (m-1)(m+1) \begin{vmatrix} 10m+7 & -3 & -6m \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & m-1 \end{vmatrix} \\
&\xrightarrow{C_1=C_1-C_2} (m-1)(m+1) \begin{vmatrix} 10m+10 & -3 & -6m \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & m-1 \end{vmatrix} = 2(m-1)(m+1) \begin{vmatrix} 5m+5 & -3 & -6m \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & m-1 \end{vmatrix} \\
&\xrightarrow{L_1=L_1+3L_3} 2(m-1)(m+1) \begin{vmatrix} 5m+5 & 0 & -3m-3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & m-1 \end{vmatrix} = 2(m-1)(m+1)^2 \begin{vmatrix} 5 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & m-1 \end{vmatrix} \\
&= 4(m-1)(m+1)^2
\end{aligned}$$

Discussion

1er cas : $m = 1$: Le système devient
$$\begin{cases} 17x - 3y + 6z = -6 \\ 3x - y + 2z = -2 \\ -3x + y - 2z = 2 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} 17x - 3y + 6z = -6 \\ 3x - y + 2z = -2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 17x - 3y = -6 - 6z \\ 3x - y = -2 - 2z \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 + 2z \end{cases}$$

Système simplement indéterminé

2ème cas : $m = -1$: Le système devient
$$\begin{cases} -3x - 3y + 10z = 6 \\ -x - y + 2z = 2 \\ -x - y = 2 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} 3x + 3y = -6 \\ x + y = -2 \\ z = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -y - 2 \\ z = 0 \end{cases} \quad \text{Système simplement indéterminé}$$

Dans les autres cas

$$x = \frac{(1-m)^2(1+m)}{-2(m-1)(m+1)^2} \rightarrow \boxed{x = \frac{1-m}{2(m+1)}}$$

$$y = \frac{(m-1)(m+1)(-2m^2+3m+7)}{-2(m-1)(m+1)^2} \rightarrow \boxed{y = \frac{2m^2-3m-7}{2(m+1)}}$$

$$z = \frac{4(m-1)(m+1)^2}{-2(m-1)(m+1)^2} \rightarrow \boxed{z = -2}$$

Le 14 novembre 2008

EXALG323 – FACS, ULB, Bruxelles, juillet 2008..

Déterminer les valeurs réelles des paramètres a, b, c pour lesquelles

$$\begin{vmatrix} a^4 & a & 1 \\ b^4 & b & 1 \\ c^4 & c & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^3 & b^3 & c^3 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Soit A le premier déterminant et B le deuxième

$$\begin{aligned} A &= \begin{vmatrix} a^4 & a & 1 \\ b^4 & b & 1 \\ c^4 & c & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow[\substack{L_2=L_2-L_1 \\ L_3=L_3-L_1}]{L_2=L_2-L_1 \\ L_3=L_3-L_1} \begin{vmatrix} a^4 & a & 1 \\ b^4-a^4 & b-a & 0 \\ c^4-a^4 & c-a & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (b-a)(b+a)(b^2+a^2) & b-a \\ (c-a)(c+a)(c^2+a^2) & c-a \end{vmatrix} \\ &= (b-a)(c-a) \begin{vmatrix} (b+a)(b^2+a^2) & 1 \\ (c+a)(c^2+a^2) & 1 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a) (b^3+ab^2+a^2b - c^3-ac^2-a^2c) \\ &= (b-a)(c-a) (b^3-c^3+a^2(b-c)+a(b^2-c^2)) \\ &= (b-a)(c-a) ((b-c)(b^2+bc+c^2)+a^2(b-c)+a(b-c)(b+c)) \\ &= (b-a)(c-a)(b-c)(b^2+c^2+a^2+bc+ab+ac) \\ B &= \begin{vmatrix} a^3 & b^3 & c^3 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow[\substack{C_2=C_2-C_1 \\ C_3=C_3-C_1}]{C_2=C_2-C_1 \\ C_3=C_3-C_1} \begin{vmatrix} a^3 & b^3-a^3 & c^3-a^3 \\ a^2 & b^2-a^2 & c^2-a^2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (b-a)(b^2+ba+a^2) & (c-a)(c^2+ca+a^2) \\ (b-a)(b+a) & (c-a)(c+a) \end{vmatrix} \\ &= (b-a)(c-a) \begin{vmatrix} b^2+ba+a^2 & c^2+ca+a^2 \\ b+a & c+a \end{vmatrix} \\ &= (b-a)(c-a) (b^2c+ab^2+ac^2+abc - bc^2-abc-ac^2-a^2c) \\ &= (b-a)(c-a) (b^2c+ab^2-bc^2-ac^2) = (b-a)(cb(b-c)+a(b-c)(b+c)) \\ &= (b-a)(c-a)(b-c)(cb+ab+ac) \end{aligned}$$

Donc $A = B$, si

- 1) $a = b$
- 2) $a = c$
- 3) $b = c$
- 4) ou encore si : $b^2 + bc + c^2 + ab + ac = cb + ab + ac$
 $\rightarrow b^2 + c^2 = 0$ qui n'est vrai que si $b = c = 0$

Le 14 novembre 2008

EXALG324 – FACS, ULB, Bruxelles, septembre 2008.

Déterminer $a, b, c \in \mathbb{R}$ pour que le polynôme $P(x) = ax^5 + bx^4 + cx^3 + 1$ soit divisible par $(x-1)^3$. Indiquer le quotient de cette division.

On a alors :

$$P(x) = ax^5 + bx^4 + cx^3 + 1 = (x-1)^3 (mx^2 + px + r)$$

qui doit être égal à :

$$\begin{aligned} P(x) &= (x-1)^3 (mx^2 + px + r) \\ &= (x^3 - 3x^2 + 3x - 1)(mx^2 + px + r) \end{aligned}$$

On effectue.

$$P(x) = mx^5 + (-3m + p)x^4 + (3m - 3p + r)x^3 + (-m + 3p - 3r)x^2 + (-p + 3r)x - r$$

Par identification, on obtient le système :

$$\left\{ \begin{array}{l} m = a \\ -3m + p = b \\ 3m - 3p + r = c \\ -m + 3p - 3r = 0 \\ -p + 3r = 0 \\ -r = 1 \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = -6 \\ b = -3m + p = 18 - 3 = 15 \\ c = -18 + 9 - 1 = -10 \\ m = 3p - 3r = -9 + 3 = -6 \\ p = -3 \\ r = -1 \end{array} \right.$$

Conclusion :

$$P(x) = -6x^5 + 15x^4 - 10x^3 + 1 = (x-1)^3 (-6x^2 - 3x - 1)$$

Le 14 novembre 2008

EXALG325 – FACS, ULB, Bruxelles, septembre 2008.

Déterminer toutes les valeurs réelles du paramètre m pour lesquelles la matrice.

$$A = \begin{pmatrix} m+1 & m-1 & m^2-1 \\ -m & 2-m & -m^2 \\ m+2 & m-1 & m \end{pmatrix} \text{ est inversible.}$$

Calculer l'inverse de cette matrice dans le cas où $m = 0$

Pour que la matrice soit inversible, il faut et il suffit que son déterminant soit nul.

$$\det A = \begin{vmatrix} m+1 & m-1 & m^2-1 \\ -m & 2-m & -m^2 \\ m+2 & m-1 & m \end{vmatrix} \xrightarrow{L_1=L_1+L_2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -m & 2-m & -m^2 \\ m+2 & m-1 & m \end{vmatrix}$$
$$\xrightarrow{\substack{L_2=L_2-L_1 \\ L_3=L_3+L_1}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -m & 2 & -m^2-m \\ m+2 & -3 & 2m+2 \end{vmatrix} = 4m+4-3m^2-3m = -3m^2+m+4$$

Cette équation a pour solutions : $\begin{cases} m = -1 \\ m = \frac{4}{3} \end{cases}$

Conclusion : La matrice est inversible pour $m \in \mathbb{R} \setminus \left\{ -1; \frac{4}{3} \right\}$

Inversion

$$\text{Soit } m = 0 \rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Calcul du déterminant $\det A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 4$

2. Calcul de la matrice adjointe : L'adjointe est la transposée de la matrice obtenue en remplaçant, dans A , chaque élément par son cofacteur.

Le cofacteur de l'élément a_{ij} de la matrice A est le produit du mineur M_{ij} de a_{ij} par le facteur $(-1)^{i+j}$.

Le mineur de l'élément a_{ij} de la matrice A est le déterminant de la matrice obtenue en supprimant la ligne et la colonne de a_{ij} dans A .

$$\text{adj } A = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 0 & -4 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -4 & -1 & 2 \end{matrix} & \begin{matrix} | \\ | \\ | \end{matrix} \end{matrix} = \begin{matrix} \begin{matrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -4 & -1 & 2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} | \\ | \\ | \end{matrix} \end{matrix}$$

3. Calcul de l'inverse :

$$A^{-1} = \frac{\text{adj } A}{\det A} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -1 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Inversion : Méthode de la matrice compagnon

$$\text{Soit } m = 0 \rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

On construit le tableau suivant

Colonne (1) = Description de l'opération

Colonne (2) = Numéro de la ligne

Colonne (3) = Matrice A

Colonne (4) = Matrice inverse

Colonne (5) = Contrôle des opérations : somme de la ligne

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
	1	1 -1 -1	1 0 0	0
	2	0 2 0	0 1 0	3
	3	2 -1 0	0 0 1	2
$L_4 = L_1$	4	1 -1 -1	1 0 0	0
$L_5 = \frac{1}{2}L_2$	5	0 1 0	0 $\frac{1}{2}$ 0	$\frac{3}{2}$
$L_6 = \frac{1}{2}L_3$	6	1 $-\frac{1}{2}$ 0	0 0 $\frac{1}{2}$	1
$L_7 = L_4 + L_5$	7	1 0 -1	1 $\frac{1}{2}$ 0	$\frac{3}{2}$
$L_8 = L_5$	8	0 1 0	0 $\frac{1}{2}$ 0	$\frac{3}{2}$
$L_9 = L_6 - L_4$	9	0 $\frac{1}{2}$ 1	-1 0 $\frac{1}{2}$	1
$L_{10} = L_7$	10	1 0 -1	1 $\frac{1}{2}$ 0	$\frac{3}{2}$
$L_{11} = L_8$	11	0 1 0	0 $\frac{1}{2}$ 0	$\frac{3}{2}$
$L_{12} = L_9 - \frac{1}{2}L_8$	12	0 0 1	-1 $-\frac{1}{4}$ $\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
$L_{13} = L_{10} + L_{12}$	13	1 0 0	0 $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{2}$	$\frac{7}{4}$
$L_{14} = L_{11}$	14	0 1 0	0 $\frac{1}{2}$ 0	$\frac{3}{2}$
$L_{15} = L_{12}$	15	0 0 1	-1 $-\frac{1}{4}$ $\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

$$\text{Donc : } A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -1 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

EXALG326 – FACS, ULB, Bruxelles, septembre 2008..

Résoudre dans \mathbb{R} le système d'inéquations :

$$\begin{cases} \frac{-3x^2 + 40x - 28}{x-2} \geq 2 \\ |x-2| > |2x-1| \end{cases}$$

Réolvons la première inéquation :

$$\begin{aligned} \frac{-3x^2 + 40x - 28}{x-2} \geq 2 &\rightarrow \frac{-3x^2 + 40x - 28}{x-2} - 2 \geq 0 \rightarrow \frac{-3x^2 + 40x - 28 - 2x + 4}{x-2} \geq 0 \\ &\rightarrow \frac{-3x^2 + 38x - 24}{x-2} \geq 0 \rightarrow \frac{(2-3x)(x-12)}{x-2} \geq 0 \end{aligned}$$

Tableau de signe

		$\frac{2}{3}$	2	12	
$2-3x$	+	0	-	-	-
$x-12$	-	-	-	0	+
$x-2$	-	-	0	+	+
	+	0	-	/	+
				0	-

$\rightarrow x \in]-\infty; \frac{2}{3}] \cup]2; 12]$

Réolvons la deuxième inéquation :

- 1) si $x > 2 \rightarrow x-2 > 2x-1 \rightarrow -x > 1 \rightarrow x < 1$ Impossible
- 2) si $x = 2 \rightarrow 0 > 3$ Impossible
- 3) si $\frac{1}{2} < x < 2 \rightarrow -x+2 > 2x-1 \rightarrow -3x > -3$
 $\rightarrow x < 1 \rightarrow \frac{1}{2} < x < 1$
- 4) si $x = \frac{1}{2} \rightarrow -\left(\frac{1}{2}-2\right) > 0 \rightarrow \frac{3}{2} > 0 \rightarrow x = \frac{1}{2}$
- 5) si $x < \frac{1}{2} \rightarrow -x+2 > -2x+1 \rightarrow x > -1 \rightarrow -1 < x < \frac{1}{2}$

Autrement dit : $x \in]-1; 1]$

Conclusion

En combinant les deux solutions : $x \in]-1; \frac{1}{2}]$

Le 17 septembre 2008

EXALG327 – FACS, ULB, Bruxelles, septembre 2008.

Résoudre dans \mathbb{R}^3 , en discutant en fonction du paramètre réel m , le système

$$\begin{cases} (3-m)x + (2-m)y + z = -m \\ (2m+4)x + (2+m)y + (2m+1)z = -2m^2 \\ (3m-1)x + (2m-1)y + mz = -m^2 + m + 1 \end{cases} \quad (m \in \mathbb{R})$$

Indiquer un résumé final de la discussion de ce système

Calculons les déterminants.

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} 3-m & 2-m & 1 \\ 2m+4 & 2+m & 2m+1 \\ 3m-1 & 2m-1 & m \end{vmatrix} \xrightarrow{C_1=C_1-C_2-C_3} \begin{vmatrix} 0 & 2-m & 1 \\ 1-m & 2+m & 2m+1 \\ 0 & 2m-1 & m \end{vmatrix} = (m-1) \begin{vmatrix} 2-m & 1 \\ 2m-1 & m \end{vmatrix} \\ &= (m-1)(2m-m^2-2m+1) = (m-1)(1-m^2) = -(m-1)^2(m+1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_x &= \begin{vmatrix} -m & 2-m & 1 \\ -2m^2 & 2+m & 2m+1 \\ -m^2+m+1 & 2m-1 & m \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{C_1=C_1-C_3 \\ C_2=C_2-C_3}} \begin{vmatrix} -m-1 & 1-m & 1 \\ -2m^2-2m-1 & 1-m & 2m+1 \\ -m^2+1 & m-1 & m \end{vmatrix} \\ &= (m-1) \begin{vmatrix} -m-1 & -1 & 1 \\ -2m^2-2m-1 & -1 & 2m+1 \\ -m^2+1 & 1 & m \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{L_1=L_1+L_3 \\ L_2=L_2+L_3}} (m-1) \begin{vmatrix} -m^2-m & 0 & m+1 \\ -3m^2-2m & 0 & 3m+1 \\ -m^2+1 & 1 & m \end{vmatrix} \\ &= m(m-1)(m+1) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3m+2 & 3m+1 \end{vmatrix} = m(m-1)(m+1)(3m+1-3m-2) \\ &= m(1-m)(m+1) \end{aligned}$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 3-m & -m & 1 \\ 2m+4 & -2m^2 & 2m+1 \\ 3m-1 & -m^2+m+1 & m \end{vmatrix}$$

Il est plus simple de l'effectuer et de factoriser.

$$\begin{aligned} \Delta_y &= -2(3-m)m^3 - m(2m+1)(3m-1) + (2m+4)(-m^2+m+1) \\ &\quad + 2m^2(3m-1) + (m-3)(2m+1)(-m^2+3+1) + m^2(2m+4) \\ &= m^3 - m^2 - m + 1 = m^2(m-1) - (m-1) = (m-1)^2(m+1) \end{aligned}$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 3-m & 2-m & -m \\ 2m+4 & 2+m & -2m^2 \\ 3m-1 & 2m-1 & -m^2+m+1 \end{vmatrix}$$

On effectue et on factorise.

$$\begin{aligned} \Delta_z &= (3-m)(2+m)(-m^2+m+1) - 2m^2(2-m) - m(2m+4)(2m-1) \\ &\quad + m(2+m)(3m-1) + 2m^2(3-m)(2m-1) + (m-2)(2m+4)(-m^2+m+1) \\ &= m^4 - m^3 + m^2 + m - 2 \end{aligned}$$

Ce polynôme est divisible par $(m-1)$ et $(m+1)$. On utilise Horner

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -2 \\ \hline & 1 & -2 & 3 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 2 & \\ \hline & 1 & -1 & 2 & 0 & \end{array} \rightarrow \Delta_z = (m-1)(m+1)(m^2 - m + 2)$$

Discussion

1er cas : $m = 1$

$$\text{Le système devient : } \begin{cases} 2x + y + z = -1 \\ 6x + 3y + 3z = -2 \\ 2x + y + z = 1 \end{cases} \rightarrow \text{Système impossible}$$

2ème cas : $m = -1$

$$\begin{aligned} \text{Le système devient : } & \begin{cases} 4x + 3y + z = 1 \\ 2x + y - z = -2 \\ -4x - 3y - z = -1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 4x + 3y + z = 1 \\ 2x + y - z = -2 \end{cases} \\ \rightarrow & \begin{cases} 4x + 3y = 1 - z \\ 2x + y = -2 + z \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -\frac{7}{2} + 2z \\ y = 5 - 3z \end{cases} \quad \text{Système simplement indéterminé.} \end{aligned}$$

Dans les autres cas

$$x = \frac{-m \cancel{(m-1)} \cancel{(m+1)}}{-(m-1)^{\cancel{x}} \cancel{(m+1)}} \rightarrow \boxed{x = \frac{m}{m-1}}$$

$$y = \frac{(m-1)^2 (m+1)}{-(m-1)^2 (m+1)} = \rightarrow \boxed{y = -1}$$

$$z = \frac{\cancel{(m-1)} \cancel{(m+1)} (m^2 - m + 2)}{-(m-1)^{\cancel{x}} \cancel{(m+1)}} \rightarrow \boxed{z = -\frac{m^2 - m + 2}{m-1}}$$

Le 17 novembre 2008

EXALG328 – FPMs, Mons, groupe C, juillet 2009

Soit l'équation

$$(2m-1)x^2 - (m+2)x + 2m = 0$$

de racines x_1 et x_2 . Déterminez les valeurs du paramètre réel m qui permettent de vérifier

$$0 < x_1 < x_2$$

Solution proposée par Fabienne Zoetard

Notons d'abord la condition $m \neq \frac{1}{2}$ pour avoir une équation du second degré.

L'équation a deux solutions x_1 et x_2 telles que $0 < x_1 < x_2$, si et seulement si

$$\Delta > 0 \quad \text{et} \quad P > 0 \quad \text{et} \quad S > 0$$

a) Etudions le Δ

$$\Delta = (m+2)^2 - 4(2m-1).2m = m^2 + 4m + 4 - 16m^2 + 8m = -15m^2 + 12m + 4$$

Résolvons cette équation :

$$\Delta_{\Delta} = 144 + 240 = 384$$

$$\text{Zéros de } \Delta : m = \frac{-12 \pm 8\sqrt{6}}{-30} = \frac{6 \mp 4\sqrt{6}}{15} \rightarrow \begin{cases} m_1 = -0.253 \\ m_2 = 1.053 \end{cases}$$

$$\text{Signe de } \Delta : \begin{array}{c|ccc} m & -0.253 & 1.053 & \\ \hline \Delta & - & 0 & + & 0 & - \end{array}$$

b) Etudions le produit :

$$P = \frac{2m}{2m-1} \quad \text{Signe de } P : \begin{array}{c|ccc} m & 0 & 1/2 & \\ \hline P & + & 0 & - & // & + \end{array}$$

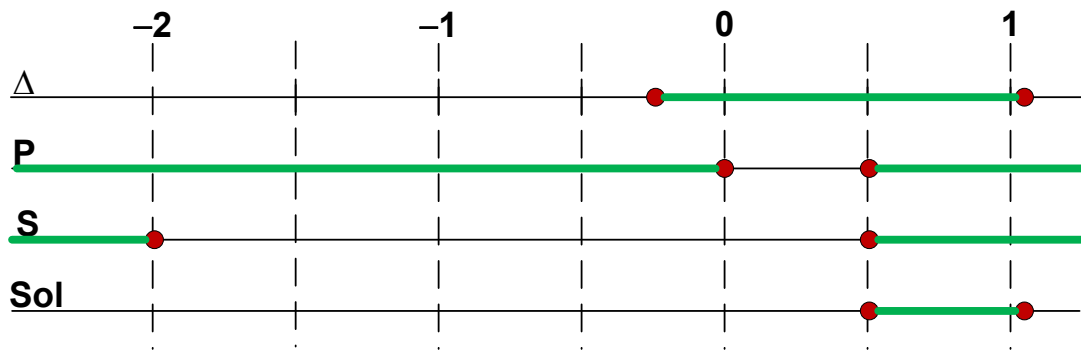
c) Etudions la somme :

$$S = \frac{m+2}{2m-1} \quad \text{Signe de } S : \begin{array}{c|ccc} m & -2 & 1/2 & \\ \hline S & + & 0 & - & // & + \end{array}$$

Conclusion

Condition satisfaite si

$$m \in \left] \frac{1}{2}, \frac{6+4\sqrt{6}}{15} \right[$$



Le 2 juillet 2009

EXALG329 – FACSA – ULG – Liège, juillet 2009.

1. Calculer le produit AB des matrices A et B suivantes :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & 1 & 1 \\ m & m & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} m & m & m \\ 2 & m & m \\ 2 & 2 & m \end{pmatrix}$$

2. Résoudre le système suivant sur \mathbb{R} , dans lequel m est un paramètre réel :

$$\begin{cases} (m+4)x + 2(m+1)y + 3mz = \frac{1}{2}m+2 \\ (m^2+4)x + (m^2+m+2)y + m(m+2)z = m+2 \\ (m^2+2m+2)x + 2(m^2+1)y + m(2m+1)z = 2m+1 \end{cases}$$

Nous reprenons, la solution proposée par l'université.

<http://www.montefiore.ulg.ac.be/~gribomon/prov/Algebre.pdf>

On observe que le produit AB est précisément la matrice des coefficients du système qui peut donc s'écrire.

$$AB \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}m+2 \\ m+2 \\ 2m+1 \end{pmatrix}$$

On calcule ainsi :

$$\text{dtm}(A) = (m-1)^2, \text{dtm}(B) = m(m-2)^2 \text{ et donc } \text{dtm}(AB) = m(m-1)^2(m-2)^2$$

Ce dernier déterminant s'annule si et seulement si $m \in \{0, 1, 2\}$

Si m vaut respectivement 0, 1, 2 le système se réduit respectivement à

$$\begin{cases} 4x+2y=2 \\ 4x+2y=2 \\ 2x+2y=1 \end{cases} ; \begin{cases} 5x+4y+3z=\frac{5}{2} \\ 5x+4y+3z=3 \\ 5x+4y+3z=3 \end{cases} ; \begin{cases} 6x+6y+6z=3 \\ 8x+8y+8z=4 \\ 10x+10y+10z=5 \end{cases}$$

On en tire immédiatement les conclusions suivantes :

- Si $m = 0$, le système est simplement indéterminé; on a $x = \frac{1}{2}$, $y = 0$ et z est un réel quelconque;
- Si $m = 1$, les équations sont incompatibles et le système n'admet aucune solution.
- Si $m = 2$, le système est doublement indéterminé; on a $x = \lambda$, $y = \mu$ et $z = \frac{1}{2} - \lambda - \mu$
où λ et μ sont des réels quelconques.

D'autre part, si $m \notin \{0, 1, 2\}$, le système admet une solution unique

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = B^{-1}A^{-1} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}m+2 \\ m+2 \\ 2m+1 \end{pmatrix}$$

En reportant les valeurs suivantes obtenues par la règle des mineurs:

$$A^{-1} = \frac{1}{m-1} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ m & 0 & -1 \end{pmatrix}, B^{-1} = \frac{1}{m(m-2)} \begin{pmatrix} m & -m & 0 \\ 0 & m & -m \\ -2 & 0 & m \end{pmatrix}$$

Cette solution se réduit à

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{2(m-1)} \begin{pmatrix} -1 \\ -m \\ m+2 \end{pmatrix}$$

Le 20 juillet 2009