Exercices résolus de mathématiques.

Algèbre

ALG 34

EXALG340 – EXALG349

http://www.matheux.c.la

Jacques Collot
Benoit Baudelet – Steve Tumson

Aout 09

EXALG340 – EPL, UCL, Louvain, septembre 2009

Déterminer toutes les racines (réelles ou complexes) de l'équation complese en z :

$$z^4-(15-10i)z^2-(16+30i)=0$$

où i est l'unité (la particule) imaginaire (ou encore $i^2=-1$).

(Réponse sous la forme $(a+bi)$ ou (r,ϕ) au choix.

C'est une équation bicarée. Posons $Z=z^2$

$\rightarrow Z^2-(15-10i)Z-(16+30i)=0$

$\Delta=189-180i=9(21-20i)$

Calculons $\sqrt{21-20i}$: $\begin{cases}x^2-y^2=21\\2xy=-20\end{cases}\rightarrow\begin{cases}x^2-y^2=21\\x^2+y^2=29\end{cases}\rightarrow\begin{cases}x^2=25\\y^2=4\end{cases}\rightarrow\begin{cases}x=\pm5\\y=\pm2\end{cases}$

$\rightarrow\sqrt{21-20i}=5-2i$

$\rightarrow Z=\dfrac{15-10i\pm3(5-2i)}{2}$

1) $z^2=15-8i\rightarrow\begin{cases}x^2-y^2=15\\2xy=-8\end{cases}\rightarrow\begin{cases}x^2-y^2=15\\x^2+y^2=17\end{cases}\rightarrow\begin{cases}x^2=16\\y^2=1\end{cases}\rightarrow\begin{cases}x=\pm4\\y=\pm1\end{cases}$

$\rightarrow\boxed{z_1=4-i\qquad\text{et}\qquad z_2=-4+i}$

2) $z^2=-2i\rightarrow\begin{cases}x^2-y^2=0\\2xy=-2\end{cases}\rightarrow\begin{cases}x^2-y^2=0\\x^2+y^2=2\end{cases}\rightarrow\begin{cases}x^2=1\\y^2=1\end{cases}\rightarrow\begin{cases}x=\pm1\\y=\pm1\end{cases}$

$\rightarrow\boxed{z_3=1-i\qquad\text{et}\qquad z_4=-1+i}$

---

12 septembre 2009

EXALG341 – EPL, UCL, Louvain, septembre 2009.

Soit un paramètre a réel. Discuter et résoudre, dans les nombres réels, le système suivant :

$$\begin{cases} 2^x & + & ay^3 & = & 2 \\ a2^{x+1} & + & (a+1)y^3 & = & a+3 \end{cases}$$

Solution proposée par Paul Etienne

Posons $\begin{cases} X = 2^x \quad \text{avec } X > 0 \\ Y = y^3 \end{cases}$. Le système devient $\begin{cases} X + aY = 2 \\ 2aX + (a+1)Y = a+3 \end{cases}$

On trouve facilement les déterminants du système

$\det = -2a^2 + a + 1 = (1-a)(2a+1)$

$N_X = -a^2 - a + 2 = (1-a)(a+2)$

$N_Y = 3(a-1)$

<u>1er cas</u> : $a \neq 1$ et $a \neq -\dfrac{1}{2}$

$$\begin{cases} X = \dfrac{a+2}{2a+1} \\ Y = \dfrac{3}{2a+1} \end{cases}$$

Si $a \in \left]\leftarrow;-2\right[\cup \left]-\dfrac{1}{2};1\right[$ alors $\begin{cases} x = \log_2 X \\ y = \sqrt[3]{Y} \end{cases}$

Si $a \in \left[-2;-\dfrac{1}{2}\right[$ alors $S = \varnothing$

<u>2ème cas</u> : $a = 1 \rightarrow \begin{cases} X + Y = 2 \\ 2X + 2Y = 4 \end{cases}$ Système indéterminé.

$$S = \left\{ \left(x, \sqrt[3]{2-2^x}\right) \mid x \in \mathbb{R} \right\}$$

<u>3ème cas</u> : $a = -\dfrac{1}{2} \rightarrow \begin{cases} X - \dfrac{1}{2}Y = 2 \\ -X + \dfrac{1}{2}Y = \dfrac{5}{2} \end{cases}$ Système impossible $S = \varnothing$

Résolu le 12 septembre 2009

EXALG342 – EPL, UCL, Louvain, septembre 2009.

Un nombre est constitué de trois chiffres dont la somme vaut 11 et la somme des carrés de ces chiffres vaut 45. Si l'on retranche à ce nombre, le nombre renversé (= écrit à l'envers), on obtient 198.
Calculez ce nombre.

Solution proposée par Paul Etienne

$a,b,c \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ et $a \neq 0$

Soit le nombre $x = 100a + 10b + c$

$$\rightarrow \begin{cases} a+b+c=11 \\ a^2+b^2+c^2=45 \rightarrow a,b,c \text{ sont } <17 \\ 100a+10b+c-100c-10b-a=198 \rightarrow a-c=2 \end{cases}$$

On fait des essais.

6	1	4	$36+16+1>47$
5	3	3	$25+9+9=43$
4	5	2	$16+25+4=45$
3	7	1	Non
2	9	0	Non

Conclusion : $\boxed{x=452}$

Solution proposée par Jan Frans Broeckx

Mise en équations

Soit : a = le chiffre des centaines du nombre ;
b = le chiffre des dizaines du nombre ;
c = le chiffre des unités du nombre.

avec : $a, b, c \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ et $a \neq 0$.

Les données se traduisent alors par les trois équations suivantes :

$$a + b + c = 11 \qquad (1)$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = 45 \qquad (2)$$

$$(100a + 10b + c) - (100c + 10b + a) = 198 \qquad (3)$$

Résolution

$$(3) \Leftrightarrow \quad 99(a - c) = 198$$

$$\Leftrightarrow \quad a - c = 2 \qquad (4)$$

$$(1) \Leftrightarrow \quad a + c = 11 - b \qquad (5)$$

Des équations (4) et (5) on trouve, par addition et par soustraction :

$$a = \frac{1}{2}(13 - b) \qquad (6)$$

$$c = \frac{1}{2}(9 - b) \qquad (7)$$

Injectons (6) et (7) dans (2) :

$$\frac{1}{4}(13 - b)^2 + b^2 + \frac{1}{4}(9 - b)^2 = 45$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{4}\left((169 - 26b + b^2) + 4b^2 + (81 - 18b + b^2)\right) = 45$$

$$\Leftrightarrow \quad 6b^2 - 44b + 250 = 180$$

$$\Leftrightarrow \quad 3b^2 - 22b + 35 = 0 \qquad (8)$$

Résolution de l'équation du second degré en b :

$$\Delta = 22^2 - 4.3.35 = 64$$

$$\sqrt{\Delta} = 8$$

$$b_{1,2} = \frac{1}{6}(22 \pm 8) \Rightarrow \begin{cases} b_1 = 5 \\ b_2 = \frac{7}{3} \end{cases}$$

La deuxième solution n'est pas un entier et doit donc être rejetée. Par conséquent :

$$b = 5$$

Avec (6) et (7) on trouve alors :

$$a = 4 \quad \text{et} \quad c = 2$$

Le nombre recherché est donc

452

Résolu le 12 septembre 2009. Modifié le 28 janvier 2012 (Jan Frans Broeckx)

EXALG343 – EPL, UCL, Louvain, septembre 2009.

Une entreprise de jardin gère la maintenance de terrains sportifs. En particulier, l'entretien des pelouses est un marché important pour lequel l'entreprise envisage une augmentation des tarifs sur base des coûts actuels suivants :

- la tonte des pelouses revient à 4 Euros l'are (1 are = 100 mètres carrés).
- le traçage des limites des terrains revient lui à 40 Eurocents par mètre.

Soit k *l'augmentation* de prix envisagée pour la tonte d'un are de pelouse (en Euros). L'entrepreneur estime que l'augmentation du coût devrait être de $k/2$ (en Euros) pour la tarification du traçage par mètre.

Sachant que les terrains en maintenance sont de forme carrée, quelles sont les conditions sur $k\,(>0)$ pour qu'après augmentation :

1. Il y ait deux tailles distinctes de terrain remplissant la condition suivante : le coût du traçage total de chaque terrain moins le coût de la tonte de toute surface de ce même terrain égale $4*(25k+2)$ Euros
2. Le marquage au sol complet de ces deux terrains ne dépasse pas 170 mètres au total.

Dans ces conditions, quelle est l'augmentation k maximale qui peut être pratiquée (arrondir à l'Eurocent).

NB. On ne demande pas de calculer la dimension de ces terrains.

Solution proposée par Paul Etienne

On doit donc avoir la relation, si x est le côté du carré en m :

$$4x\left(0.4+\frac{k}{2}\right)-\left(\frac{4+k}{100}\right)x^2=4(25k+2)$$

$$\rightarrow (4+k)x^2-(160+200k)x+10000k+800=0$$

Le Δ' doit être positif $\left(\text{Rappel : on calcule un } \Delta' \text{ si le coefficient de } x \text{ est paire}\right)$

$$\Delta'=(80+100k)^2-(4+k)(10000k+800)=800(4-31k)$$

$$\rightarrow \text{ donc : } 0<k<\frac{31}{4}$$

On a également

$$4(x_1+x_2)<170 \rightarrow 4\frac{160+200k}{4+k}<170 \rightarrow \boxed{k<\frac{4}{63}\simeq 6 \text{ cents}}$$

Le 12 septembre 2009

EXALG344 – FACSA, ULG, Liège 2009.

Résoudre et discuter le système suivant, dans lequel a est un paramètre réel :

$$\begin{cases} 2ax & + & (a+1)y & + & (a-1)z & = & 2a+3 \\ 2x & + & (1+a)y & + & (1-a)z & = & 4a+1 \\ (a+1)x & + & (a+1)y & & & = & 3a+2 \end{cases}$$

Nous reprenons la solution proposée par l'université

On peut d'abord observer que la troisième équation est inutile puisque c'est la demi-somme des deux autres. En remplaçant la première équation par la différence de la première et de la seconde, on obtient

$$2(a-1)x+2(a-1)z=-2(a-1)$$
$$2x+(1+a)y+(1-a)z=4a+1$$

- Si $a=1,$ la première équation disparaît et le système se réduit à

$$2x+2y=5$$

Les solutions sont $x=\dfrac{5-2\lambda}{2};\ y=\lambda;\ z=\mu$

- Si $a=-1,$ le système devient

$$2x+2z=-4$$
$$2x+2z=-3$$

Il n'admet pas de solution.

- Dans les autres cas, c'est-à-dire quand $(a+1)(a-1)\neq 0,$ le système devient

$$2x+2z=-2$$
$$2x+(1+a)y+(1-a)z=4a+1$$

Les solutions sont $z=\lambda;\ x=1-\lambda;$

$$(1+a)y=4a+1+2+2\lambda+(a-1)\lambda=4a+3+(a+1)\lambda$$
$$\to y=\lambda+\frac{4a+3}{a+1}$$

$(\lambda$ et μ sont des paramètres quelconques$)$

Le 25 octobre 2009

EXALG345 – – FACSA, ULG, Liège 2009.

Trouver dans $\mathbb{C}$ les racines du polynôme P tel que :

$$P(z)=\left(1-z^2\right)^3-\left(1-z\right)^3$$

Nous reprenons la solution proposée par l'université

De l'égalité $1-z^2=(1-z)(1+z)$, on tire successivement $\left(1-z^2\right)^3=(1-z)^3(1+z)^3$ et

$$P(z)=(1-z)^3\left[(1+z)^3-1\right]$$

Le premier facteur admet la racine triple de 1. Les trois racines cubiques complexes de l'unité étant $\operatorname{cis} 0=1$, $\operatorname{cis}\dfrac{2\pi}{3}=\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ et $\operatorname{cis}\dfrac{4\pi}{3}=\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}$, le second facteur admet les trois racines simples 0, $\dfrac{-3+i\sqrt{3}}{2}$ et $\dfrac{-3-i\sqrt{3}}{2}$

Le 25 octobre 2009

EXALG346 – FACSA, ULG, Liège 2009.

On a et b les racines du polynôme

$$x^2 - \sqrt{2+\sqrt{3-\sqrt{5}}}\ x + \sqrt{3-\sqrt{5}}$$

Donner un polynôme du second degré dont les racines sont a^2+b^2 et $2+ab$.
Les coefficients de ce polynôme doivent être écrits sous une forme aussi simple que possible.

Nous reprenons la solution proposée par l'université

On a $\quad a+b=\sqrt{2+\sqrt{3-\sqrt{5}}}$ et $ab=\sqrt{3-\sqrt{5}}$

D'où on tire

$$a^2+b^2=(a+b)-2ab=2+\sqrt{3-\sqrt{5}}-2\sqrt{3-\sqrt{5}}=2-\sqrt{3-\sqrt{5}}$$

et $\quad 2+ab=2+\sqrt{3-\sqrt{5}}$

La somme de ces deux nombres est 4, leur produit est $2^2-\left(3-\sqrt{5}\right)=1+\sqrt{5}$.

Le polynôme demandé est donc : $\boxed{x^2-4x+\left(1+\sqrt{5}\right)}$

Remarque : On a utilisé deux fois la propriété suivante : "Si deux nombnres (réels ou complexes) ont pour somme S et pour produit P, alors ces deux nombres sont les racines du polynôme x^2-Sx+P"

Le 25 octobre 2009

EXALG347 – FACS, ULB, Bruxelles - juillet 2009.

Déterminez toutes les valeurs réelles des paramètres a et b telles que le polynôme

$$P(x) = x^5 + bx^4 + ax^3 + a^2 + x^2 + b^2x + b$$

soit divisible par $x^2 + b$

Effectuons la division

$$\begin{array}{cccccc|c}
x^5 & +bx^4 & +ax^3 & +x^2 & b^2x & +a^2+b & x^2+b \\
\cline{7-7}
\underline{x^5} & \underline{} & \underline{+bx^3} & & & & x^3 \\
0 & +bx^4 & +(a-b)x^3 & & & & +bx^2 \\
 & \underline{+bx^4} & \underline{} & \underline{+b^2x^2} & & & +(a-b)x \\
 & & +(a-b)x^3 & +(1-b^2)x^2 & & & +(1-b^2) \\
 & & \underline{+(a-b)x^3} & \underline{} & \underline{+b(a-b)x} & & \\
 & & & +(1-b^2)x^2 & +(b^2-b(a-b))x & & \\
 & & & \underline{+(1-b^2)x^2} & \underline{} & \underline{+b(1-b^2)} & \\
 & & & & +(2b^2-ab)x & +a^2+b^3 &
\end{array}$$

Le reste est donc : $(2b^2 - ab)x + a^2 + b^3$ qui doit être nul quelque soit la valeur de x.

On en déduit le système : $\begin{cases} 2b^2 - ab = 0 \\ a^2 + b^3 = 0 \end{cases}$

<u>Premier cas :</u> $\boxed{b = 0 \to a = 0}$

On a alors : $P(x) = x^5 + x^2 = x^2(x^3 + 1)$

<u>Deuxième cas :</u>

Le système devient : $\begin{cases} 2b - a = 0 \\ a^2 + b^3 = 0 \end{cases} \to 4b^2 + b^3 = 0 \to b^2(4 + b) = 0 \to \boxed{b = -4 \to a = -8}$

On a alors : $P(x) = x^5 - 4x^4 - 8x^3 + x^2 + 16x + 60 = (x^2 - 4)(x^3 - 4x^2 - 4x - 15)$

Le 18 juin 2010

EXALG348 – FACS, ULB, Bruxelles - juillet 2009.

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante :

$$\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^3+\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^3=0$$

Posons : $Z=\frac{z+1}{z-1}$. L'équation devient : $Z^3+\frac{1}{Z^3}=0\to Z^6=-1$.

Calculons les racines sixième de -1 par la formule de Moivre :

$Z^6=-1=\text{cis }\pi\to Z=\text{cis}\,\frac{\pi+2k\pi}{6}$

Reprenons : $Z=\frac{z+1}{z-1}\to z=\frac{Z+1}{Z-1}$

Prenons la première racine : $k=0\to Z=\text{cis}\,\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}$.

On obtient :

$$z=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}+1}{\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}-1}=\frac{\sqrt{3}+2+i}{\sqrt{3}-2+i}=\frac{\left(\sqrt{3}+2+i\right)\left(\sqrt{3}-2-i\right)}{\left(\sqrt{3}-2+i\right)\left(\sqrt{3}-2-i\right)}=\frac{-4i}{8-4\sqrt{3}}=-i\frac{2+\sqrt{3}}{\left(2-\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{3}\right)}=-i\left(2+\sqrt{3}\right)$$

On recommence pour les autres racines de Z pour obtenir le tableau suivant :

k	Z	z
0	$\frac{\sqrt{3}+i}{2}$	$-i\left(2+\sqrt{3}\right)$
1	i	$-i$
2	$-\frac{\sqrt{3}-i}{2}$	$-i\left(2-\sqrt{3}\right)$
3	$-\frac{\sqrt{3}-i}{2}$	$i\left(2-\sqrt{3}\right)$
4	$-i$	i
5	$\frac{\sqrt{3}-i}{2}$	$i\left(2+\sqrt{3}\right)$

On notera que toutes les solutions sont imaginaires.

Le 20 juin 2009

EXALG349 – FACS, ULB, Bruxelles - juillet 2009.

Factoriser au maximum dans $\mathbb{R}$ le déterminant

$$\begin{vmatrix} a+b+1 & a^2-b^2+1 & a-b+1 \\ a-b & a+b & a+b \\ a^2-b^2 & a-b & a^2-b^2 \end{vmatrix}$$

où a et b sont des réels.

$$\begin{vmatrix} a+b+1 & a^2-b^2+1 & a-b+1 \\ a-b & a+b & a+b \\ a^2-b^2 & a-b & a^2-b^2 \end{vmatrix} \overset{C_2=C_2+C_3}{=} \begin{vmatrix} a+b+1 & a^2-b^2-a+b & a-b+1 \\ a-b & 0 & a+b \\ a^2-b^2 & -\left(a^2-b^2-a+b\right) & a^2-b^2 \end{vmatrix}$$

$$=\left(a^2-b^2-a+b\right)\begin{vmatrix} a+b+1 & 1 & a-b+1 \\ a-b & 0 & a+b \\ a^2-b^2 & -1 & a^2-b^2 \end{vmatrix}$$

$$\overset{L_3=L_3+L_1}{=}\left[(a-b)(a+b)-(a-b)\right]\begin{vmatrix} a+b+1 & 1 & a-b+1 \\ a-b & 0 & a+b \\ a^2-b^2+a+b+1 & 0 & a^2-b^2+a-b+1 \end{vmatrix}$$

$$=-(a-b)(a+b-1)\begin{vmatrix} a-b & a+b \\ a^2-b^2+a+b+1 & a^2-b^2+a-b+1 \end{vmatrix}$$

$$\overset{C_2=C_2-C_1}{=}-(a-b)(a+b-1)\begin{vmatrix} a-b & 2b \\ a^2-b^2+a+b+1 & -2b \end{vmatrix}$$

$$=-2b(a-b)(a+b-1)\begin{vmatrix} a-b & 1 \\ a^2-b^2+a+b+1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\overset{L_1=L_1+L_2}{=}-2b(a-b)(a+b-1)\begin{vmatrix} a^2-b^2+2a+1 & 0 \\ a^2-b^2+a+b+1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$=2b(a-b)(a+b-1)\left(a^2-b^2+2a+1\right)=2b(a-b)(a+b-1)\left[(a+1)^2-b^2\right]$$

$$=\boxed{2b(a-b)(a+b-1)(a+b+1)(a-b+1)}$$

Le 6 aout 2009